مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۲

جلد ۷، شماره ۲، ص ۱۸۹-۲۰۶

رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی با مانده‌های مانا و نامانا

صدیقه زمانی‌مهریان، علیرضا نعمت‌اللهی

گروه آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۲۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۲/۱۱/۱۹

چکیده : در این مقاله برآوردگرهای (شبه) درستنمایی و توزیع حدی آماره آزمون نمره مربوط به چند آزمون فرض مختلف از جمله آزمون داشتن ریشه واحد برای مدل رگرسیونی خطی با مانده‌های مانا و نامانا به‌دست آورده می‌شوند . سپس با روش مونت کارلو نشان داده می‌شود که برآوردگرهای (شبه) درستنمایی به‌دست آمده، برآوردگرهای مناسبی هستند و چندک‌های توزیع حدی آماره‌های آزمون داشتن ریشه واحد محاسبه و در جداولی ارائه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی : مدل خودبازگشتی، رگرسیون خطی، برآوردگر (شبه) درستنمایی، آماره آزمون نمره، آزمون ریشه واحد، قضیه حد مرکزی تابعی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: صدیقه زمانی‌مهریان، s.zamani121@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲M۱۰، ۶۰F۱۷، ۶۰J۶۵

۱ مقدمه

مدل رگرسیون خطی $i = 1,\ldots,n$ $y_i = \beta^T x_i + \varepsilon_i$ را در نظر بگیرید، که در آن x_i بردار d بعدی غیر تصادفی و مانده‌ها از مدل $AR(1)$ پیروی می‌کنند. یعنی

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \eta_i \quad i = 2,\ldots,n \quad -\infty < \rho < \infty$$

به‌طوری که $\rho \in (-\infty,\infty)$ و η_i متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. برای $\rho \in (-\infty,\infty)$ ماتریس‌های $d \times d$ بعدی

$$\boldsymbol{X}_n(\rho) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \rho x_{i-1})(x_i - \rho x_{i-1})^T$$

تعریف و فرض می‌شود برای nهای به اندازه کافی بزرگ، همیشه مثبت هستند و

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} x_i^T \boldsymbol{X}_n^{-1}(\rho) x_i = 0 \tag{1}$$

تحت فرض ۱، $\boldsymbol{X}_n(\rho)$ برای همه n ها نا منفرد است (راس مالر، ۲۰۰۳). در ادامه برآوردگرهای (شبه) درستنمایی و توزیع حدی آماره‌های آزمون داشتن ریشه واحد، آزمون خودهمبستگی در مدل خودبازگشتی، آزمون خودهمبستگی در رگرسیون خطی برای مدل رگرسیون خطی با مانده‌های مانا و نامانا محاسبه می‌شوند. توزیع حدی آماره این آزمون‌ها را راس مالر (۲۰۰۳) با اثباتی نسبتا پیچیده ارائه نمود. در بخش ۳ با استفاده از آماره آزمون نمره با اثباتی ساده‌تر رفتار حدی آماره آزمون‌های بیان شده مطالعه می‌شوند. سپس با استفاده از روش مونت کارلو چندک‌های توزیع حدی آماره‌های آزمون ریشه واحد محاسبه می‌شوند. در بخش ۴ جداولی مشابه جداول دیکی (۱۹۷۶) ارائه می‌شوند که می‌تواند در آزمون فرضیه‌های مربوط به ریشه‌های واحد مورد استفاده محققان قرار گیرد.

۲ برآورد پارامترها

مدل

$$y_i = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}_i + e_i \quad i = 1,\ldots,n \tag{2}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $\boldsymbol{x}_i$ بردار غیر تصادفی و e_i ها متغیرهای تصادفی هستند، به‌طوری که $e_1 = \eta_1$ و

$$e_i = \rho e_{i-1} + \eta_i \quad i = 2, \ldots, n \tag{3}$$

که در آن η_i ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند.

ابتدا فرض می‌شود η_i متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک $N(0, \sigma^2)$ باشند. در این صورت لگاریتم تابع (شبه) درستنمایی $y_2, \ldots, y_n$ به شرط y_1 عبارت است از

$$\varphi(\rho, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n-1}{2}\log 2\pi - \frac{n-1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1})^2.$$

در این مرحله با حذف فرض نرمالیتی و ماکسیمم کردن تابع لگاریتم (شبه) درستنمایی برآوردگرهای (شبه) درستنمایی پارامترهای $\sigma^2, \boldsymbol{\beta}, \rho$ محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma^2} &= -\frac{n-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=2}^{n}(\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1})^2 \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial\boldsymbol{\beta}} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1})(\boldsymbol{x}_i - \rho\boldsymbol{x}_{i-1}) \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial\rho} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_{i-1}(\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1})
\end{aligned}$$

برآوردگر پارامترها در صورت وجود به‌صورت

$$\begin{aligned}
&\hat{\sigma}^2(n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\rho}(n)\hat{\varepsilon}_{i-1})^2, \\
&\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\rho}(n)\hat{\varepsilon}_{i-1})(\boldsymbol{x}_i - \hat{\rho}(n)\boldsymbol{x}_{i-1}) = 0 \\
&\sum_{i=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{i-1}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\rho}(n)\hat{\varepsilon}_{i-1}) = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

قابل محاسبه‌اند. حال بردار $d+1$ بعدی $\boldsymbol{\theta}_\circ = (\beta_\circ, \rho_\circ)$ را در نظر بگیرید و به‌طور مشابه فرض کنید $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \rho)$ و قرار دهید

$$\boldsymbol{S}_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \boldsymbol{\theta}} = (\frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta}, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \rho})$$
$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T},$$

که در آن داریه‌های ماتریس $\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{\theta})$ به‌صورت

$$F_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \beta \partial \beta^T} = -\frac{\partial}{\partial \beta}(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta^T}) = -\frac{\partial}{\partial \beta}(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta})^T$$
$$= \frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}} \sum_{i=\text{۱}}^{n} (x_i - \rho x_{i-\text{۱}})(x_i - \rho x_{i-\text{۱}})^T \quad = \frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}} \boldsymbol{X}_n(\rho),$$
$$F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\theta) = -\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \beta \partial \rho} = \frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}} \sum_{i=\text{۲}}^{n} x_{i-\text{۱}}(\varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-\text{۱}}) + \varepsilon_{i-\text{۱}}(x_i - \rho x_{i-\text{۱}}$$
$$F_{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \rho^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}} \sum_{i=\text{۲}}^{n} \varepsilon_{i-\text{۱}}^{\text{۲}}$$

قابل محاسبه‌اند که در آن‌ها $\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \rho^{\text{۲}}} = -F_{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}} \sum_{i=\text{۲}}^{n} \varepsilon_{i-\text{۱}}^{\text{۲}} < \circ$ همچنین با توجه به رابطه (۵) ثابت $\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \beta^T} = -F_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}} \boldsymbol{X}_n(\rho) < \circ$ می‌شود (راس مالر، ۲۰۰۳) $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \beta \partial \beta^T} & \frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \beta \partial \rho} \\ \frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \beta^T \partial \rho} & \frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \rho^{\text{۲}}} \end{array} \right|_{\theta = \hat{\theta}} > \circ$.

توجه شود که $E(\boldsymbol{S}_n(\boldsymbol{\theta}_\circ) = \circ$، $\boldsymbol{D}_n = E(\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{\theta}_\circ)) = -E(\frac{\partial^{\text{۲}} \varphi_n}{\partial \theta \partial \theta^T}|_{\theta = \theta_\circ}$ و $V(\boldsymbol{S}_n(\boldsymbol{\theta}_\circ)) = \boldsymbol{D}_n$.

برای هر $n = \text{۱}, \ldots$ همسایگی $N_n(A)$ برای $\boldsymbol{\theta}_\circ$ به‌صورت

$$N_n(A) = \{\boldsymbol{\theta} \in R^{d+\text{۱}} : (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_\circ)^T \boldsymbol{D}_n (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_\circ) \leq A^{\text{۲}}\}, A \geq \circ,$$

تعریف می‌شود و فرض می‌کنیم $\boldsymbol{\theta} \in N_n(A)$. همچنین برای هر $A \geq \circ$ داریم

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in N_n(A)} \left|\left| \boldsymbol{D}_n^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{D}_n^{-\frac{T}{\text{۲}}} - \boldsymbol{G}_n \right|\right| \xrightarrow{p} \infty \qquad (\text{۵})$$

که در آن $\boldsymbol{G}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_d & \circ \\ \circ & \frac{\sum_{t=\text{۲}}^{n} e_{t-\text{۱}}^{\text{۲}}}{\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ)} \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{G}_n$ در توزیع به ماتریس

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_d & ۰ \\ ۰ & \boldsymbol{S}^*(\rho_۰, \sigma_۰) \end{pmatrix}$$

همگرا است. (راس مالر، ۲۰۰۳) که در آن $\Delta_n(\rho_۰, \sigma_۰) = E(\sum_{t=۲}^{n} e_{t-۱}^{۲}) \geq nc$ و

$$S^*(\rho_۰, \sigma_۰) = \begin{cases} ۱ & , |\rho_۰| < ۱ \\ ۲ \int_۰^۱ W^۲(t) & , |\rho_۰| = ۱ \\ S^۲(\rho_۰, \sigma_۰) & , |\rho_۰| > ۱ \end{cases}$$

درحالت $|\rho_۰| > ۱$، متغیر تصادفی $S(\rho_۰, \sigma_۰) = \frac{\sqrt{\rho_۰ - ۱}}{\sigma_۰} \sum_{j \geq ۱} \frac{n_j}{\rho_۰^j}$ به‌طور تقریبا مطمئن متناهی است، چون سری تعریف شده به‌طور تقریبا مطمئن، مطلقا همگرا است (چاو، ۱۹۶۵).

با توجه به‌رابطه (۵) داریم (راس مالر، ۲۰۰۳)

$$\boldsymbol{F}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}(n)) = \boldsymbol{D}_n^{\frac{۱}{۲}} \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{D}_n^{\frac{T}{۲}}. \tag{۶}$$

۳ آزمون فرض‌ها

در این بخش رفتار حدی آماره‌های آزمون نمره (هینکلی، ۱۹۷۴) مربوط به چند آزمون فرض مختلف بررسی می‌شوند.

۱.۳ آزمون ریشه واحد در مانده‌های رگرسیونی

تحت فرض $\rho_۰ = ۱$ مدل $e_i = \rho_۰ e_{i-۱} + \eta_i$ به قدم تصادفی تبدیل می شود. آزمون ریشه واحد در مانده‌های رگرسیونی معادل آزمون $H_{۰۱} : \rho_۰ = ۱$ در مقابل $H_{۱۱} : \rho_۰ \neq ۱$ است. در این آزمون $\rho_۰$ پارامتر مورد علاقه و $\beta_۰$ و $\sigma_۰^۲$ پارامترهای مزاحم هستند. آماره آزمون نمره برای فرضیه $H_{۰۱}$ برابر $SC_۱ = S_\rho^۲(\boldsymbol{F}_n^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta})|_{\theta=\hat{\theta}_۰})^{-۱}$ است، که در آن $F_n^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}) = F_{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_۰) - F_{\rho\beta}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_۰)(F_{\beta\beta}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_۰))^{-۱} F_{\beta\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_۰)$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}_۰$ برآوردگر شبه‌درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ تحت $H_{۰۱}$ است.

قضیه ۱ : تحت روابط (۱) تا (۳) توزیع حدی آماره آزمون تحت فرضیه $H_{01} : \rho_0 = 1$ در مقابل $H_{11} : \rho_0 \neq 1$ به‌صورت

$$SC_1 = S_\rho^2 (\boldsymbol{F}_n^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta})|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0})^{-1} \xrightarrow{d} \frac{(W^2(1) - 1)^2}{4 \int_0^1 W^2(t)dt}, \ n \to \infty$$

است، که در آن $W(t)$ فرایند وینر استاندارد است.

برهان : فرض کنید $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}(n), \hat{\rho}(n))$ برآوردگرهای بدون محدودیت (شبه) درستنمایی پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ باشند و $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\beta_0, 1)$ مقادیر صحیح $\boldsymbol{\theta}$ تحت فرضیه H_{01} باشد. با توجه به بسط تیلور $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})$ حول $\hat{\theta}_0$ داریم

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \boldsymbol{S}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0) + O_p(1) \\ &= \boldsymbol{S}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) - \boldsymbol{F}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} + O_p(1)\end{aligned}$$

باتوجه به این که $\boldsymbol{S}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ و $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = 0$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\boldsymbol{S}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ \beta_{\boldsymbol{\rho}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\beta\beta}}(\hat{\beta}_0) & \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\beta\rho}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\rho\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) & \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\rho\rho}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} + O_p(1)$$

بنابراین

$$\boldsymbol{S}_\rho(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = (F_{\rho\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\Delta\hat{\beta} + F_{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\Delta\hat{\rho}) + O_p(1)$$

و

$$0 = (F_{\boldsymbol{\beta\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\Delta\hat{\beta} + F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\Delta\hat{\rho} + O_p(1)$$

که در آن $O_p(1)$ نماد کرانداری تصادفی است، یعنی برای هر $\varepsilon > 0$, $P(|X_n| \geq k) \leq \varepsilon$. درنتیجه

$$\boldsymbol{S}_\rho(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = \big(\boldsymbol{F}_{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) - F_{\rho\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\beta\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0))^{-1}F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\big)\Delta\hat{\rho} + O_p(1)$$

$$= F^{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)\Delta\hat{\rho} + O_p(۱)$$

که در آن

$$F^{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) = \frac{۱}{\hat{\sigma}_\circ^۲}\sum_{i=۲}^{n} e_{i-۱}^۲ - \frac{۱}{\hat{\sigma}_\circ^۲}[\sum_{i=۲}^{n} x_{i-۱}^T(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱}) + e_{i-۱}(\boldsymbol{x}_i - \hat{\rho}_\circ \boldsymbol{x}_{i-۱})^T]$$
$$\times \quad \boldsymbol{X}_n^{-۱}(\hat{\rho}_\circ)[\sum_{i=۲}^{n} \boldsymbol{x}_{i-۱}^T(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱}) + e_{i-۱}(\boldsymbol{x}_i - \hat{\rho}_\circ \boldsymbol{x}_{i-۱})^T] \qquad (۷)$$

تحت فرض $H_{\circ ۱}$ آماره‌ای برای این آزمون به‌صورت $\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(n) - ۱ = \frac{\sum_{i=۲}^{۲} e_{i-۱}\eta_i}{\sum_{i=۲}^{۲} e_{i-۱}^۲}$ است، چنانچه جمله دوم رابطه (۷) از چپ و راست در $\Delta\hat{\rho}$ ضرب شود داریم

$$\Delta\hat{\rho}|(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱})\boldsymbol{X}_n^{-\frac{T^۲}{۲}} x_{i-۱}|^۲ \Delta\hat{\rho} \leq \max_{۱\leq i\leq n} x_i^T \boldsymbol{X}_n^{-۱}(\hat{\rho}_\circ)x_i$$
$$\times\Delta\hat{\rho}(\sum_{i=۲}^{n}(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱}))^۲\Delta\hat{\rho}$$
$$= \max_{۱\leq i\leq n} x_i^T \boldsymbol{X}_n^{-۱}(\hat{\rho}_\circ)x_i(\frac{\sum_{i=۲}^{۲} e_{i-۱}\eta_i}{\sum_{i=۲}^{۲} e_{i-۱}^۲})^۲ \sum_{i=۲}^{n}(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱}))^۲$$
$$= o(۱)o_p(۱) = o_p(۱)$$

رابطه آخر با توجه به رابطه (۱) و نامساوی چپیشف برقرار است. برای این منظورتوجه کنید که

$$\max_{۱\leq i\leq n} \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{X}_n^{-۱}(\hat{\rho}_\circ)\boldsymbol{x}_i \to \circ \quad n\to\infty$$

در نتیجه $\max_{۱\leq i\leq n} x_i^T \boldsymbol{X}_n^{-۱}(\hat{\rho}_\circ)x_i = O(۱)$. همچنین

$$P(\frac{\sum_{i=۲}^{n}(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱})}{\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ^۲)} \geq k) \leq P(\frac{\sum_{i=۲}^{n}(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱})}{n} \geq k)$$
$$\leq P(\frac{\sum_{i=۲}^{n} E(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱})}{nk})$$
$$= \circ \quad n\to\infty$$

بنابراین $(\sum_{i=2}^{n}(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-1}))^2 = o_p(\Delta_n^2(\rho_\circ, \sigma_\circ^2))$ و

$$P(\frac{\sum_{i=2}^{n}(e_{i-1}^2)}{\Delta_n^2(\rho_\circ, \sigma_\circ^2)} \geq k) \leq P(\frac{\sum_{i=2}^{n} E(e_{i-1}^2)}{\Delta_n^2(\rho_\circ, \sigma_\circ^2) k})$$
$$= \frac{1}{\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ^2) k} \leq \frac{1}{nk} \to 0 \quad n \to \infty$$

بنابراین $\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2 = o_p(\Delta_n^2(\rho_\circ, \sigma_\circ^2))$. همچنین

$$P(\frac{\sum_{i=2}^{n}(e_{i-1}\eta_i)}{\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ^2)} \geq k) \leq P(\frac{\sum_{i=2}^{n} E(e_{i-1}^2) E(\eta_i^2)}{\Delta_n^2(\rho_\circ, \sigma_\circ^2) k})$$
$$= \frac{\sigma_\circ^2}{\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ^2) k} \leq \frac{1}{nk} \to 0 \;\; as \;\; n \to \infty$$

بنابراین $\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}\eta_i = o_p(\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ^2))$. پس می‌توان نتیجه گرفت

$$(\frac{\sum_{i=2}^{n}(e_{i-1}\eta_i)}{\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2})^2 (\sum_{i=2}^{n}(e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1}))^2 = o_p(1)$$

همچنین توجه شود که

$$\Delta\hat{\rho}(\sum_{i=2}^{n}(e_{i-1}(\boldsymbol{x}_i - \hat{\rho}_\circ x_{i-1})\boldsymbol{X}_n^{-\frac{T^2}{2}}(\hat{\rho}_\circ))^2 \Delta\hat{\rho}$$

$$\leq (\boldsymbol{X}_n^{-\frac{1}{2}}(\hat{\rho}) \sum_{i=2}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \hat{\rho}_\circ x_{i-1})^T (x_i - \hat{\rho}_\circ \boldsymbol{x}_{i-1}) \boldsymbol{X}_n^{-\frac{T^2}{2}}(\hat{\rho}_\circ)) \Delta\hat{\rho} (\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2)^2) \Delta\hat{\rho}$$
$$= \boldsymbol{X}_n^{-\frac{1}{2}}(\hat{\rho}_\circ) \boldsymbol{X}_n^{1}(\hat{\rho}_\circ) \boldsymbol{X}_n^{-\frac{T}{2}}(\hat{\rho}_\circ) \frac{(\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}\eta_i)^2}{\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2} = o_p(1)$$

از آنجا که $\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2 = o_p\big(\Delta_n^2(\rho_\circ, \sigma_\circ^2)\big)$ و $\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}\eta_i = o_p\big(\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\circ^2)\big)$ داریم

$$\Delta\hat{\rho} F^{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) \Delta\hat{\rho} = \frac{\Delta\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_\circ} \sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2 \Delta\hat{\rho} + o_p(1).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} SC_1 &= \{S_p^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)(F^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}))^{-1}\}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_0} \\ &= \Delta\hat{\rho}(F^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}))(F^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}))^{-1}(F^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}))\Delta\hat{\rho} \\ &= \Delta\hat{\rho}(F^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}))\Delta\hat{\rho} \\ &= (\hat{\rho}-1)(\frac{1}{\hat{\sigma}_0}\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2)(\hat{\rho}-1) + o_p(1) \\ &= n(\hat{\rho}-1)(\frac{n^{-2}}{\hat{\sigma}_0}\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2)n(\hat{\rho}-1) + o_p(1) \\ &= \frac{(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} e_{i-1}\eta_i)^2}{\hat{\sigma}_0 n^{-2}\sum_{i=1}^{n} e_{i-1}^2} + o_p(1) \end{aligned}$$

بنابراین تحت فرض H_{01} با توجه به قضیه حدمرکزی تابعی داریم (وی، ۲۰۰۶)

$$SC_1 \xrightarrow{d} \frac{(W^2(1)-1)^2}{4\int_0^1 W^2(t)dt}, \ n \to \infty$$

که در آن $W(t)$ فرایند وینر است.

۲.۳ آزمون خودهمبستگی در مدل خودبازگشتی

توجه شود اگر $\rho_0 = 0$، آنگاه مدل (۲) به مدل رگرسیونی با مانده‌های مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس متناهی تبدیل می‌شود. آزمون خودهمبستگی در رگرسیون خطی معادل آزمون $H_{02} : \rho_0 = 0$ در مقابل $H_{12} : \rho_0 \neq 0$ است. در این آزمون ρ_0 پارامتر مورد علاقه و β_0 و σ_0^2 پارامترهای مزاحم هستند. آماره آزمون نمره برای H_{02} برابر $S_\rho^2(F_n^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta})|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_0})^{-1}$ است، که در آن $F_n^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}) = F_{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) - F_{\rho\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)(F_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0))^{-1}F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ برآوردگر (شبه) درستنمایی θ تحت فرض H_{02} است.

قضیه ۲ : تحت روابط (۱) تا (۳) آماره آزمون تحت فرضیه $H_{\circ ۲}$ به توزیع کای اسکور با یک درجه آزادی همگرا می‌شود به عبارت دیگر

$$SC_۲ = S_\rho^۲(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)(F_n^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta})|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ})^{-۱} \xrightarrow{d} \chi^۲(۱),\ \ n \to \infty$$

برهان : فرض کنید $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}(n), \hat{\rho}(n))$ برآوردگرهای بدون محدودیت (شبه) درستنمایی پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ باشند و $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ = (\beta_\circ, \circ)$ مقادیر صحیح $\boldsymbol{\theta}$ تحت فرض $H_{\circ ۲}$ باشد. مشابه حالت قبل داریم

$$\begin{aligned} S_\rho(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) &= \big(F_{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) - F_{\rho\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)(F_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\theta}_\circ))^{-۱}F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)\big)\Delta\hat{\rho} + O_p(۱) \\ &= F^{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)\Delta\hat{\rho} + O_p(۱) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} F^{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) = \frac{۱}{\hat{\sigma}_\circ^۲}\sum_{i=۲}^{n} e_{i-۱}^۲ - \frac{۱}{\hat{\sigma}_\circ^۲}[\sum_{i=۲}^{n} x_{i-۱}^T(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱}) + e_{i-۱}(x_i - \hat{\rho}_\circ x_{i-۱})^T] \\ \times \boldsymbol{X}_n^{-۱}(\hat{\rho}_\circ)[\sum_{i=۲}^{n} \boldsymbol{x}_{i-۱}^T(e_i - \hat{\rho_\circ} e_{i-۱}) + e_{i-۱}(x_i - \hat{\rho}_\circ \boldsymbol{x}_{i-۱})^T] \qquad (۸) \end{aligned}$$

تحت فرض $H_{\circ ۲}$، داریم $\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(n) - ۱ = \frac{\sum_{i=۲}^{۲} e_{i-۱}\eta_i}{\sum_{i=۲}^{۲} e_{i-۱}^۲}$ با ضرب $\Delta\hat{\rho}$ در طرفین رابطه (۸) مشابه اثبات قضیه ۱ داریم

$$\Delta\hat{\rho}F^{\rho\rho}(\hat{\theta}_\circ)\Delta\hat{\rho} = \Delta\hat{\rho}\frac{\sum_{i=۲}^{n} e_{i-۱}^۲}{\hat{\sigma}_\circ}\Delta\hat{\rho} + o_p(۱)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} SC_۲ &= \{S_\rho^۲(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)(F^{\rho\rho}(\boldsymbol{\theta}))^{-۱}\}_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ} \\ &= \{\Delta\hat{\rho}F^{\rho\rho}(\theta))(F^{\rho\rho}(\theta))^{-۱}\big(F^{\rho\rho}(\theta)\big)\Delta\hat{\rho} \\ &= \Delta\hat{\rho}\frac{\sum_{i=۲}^{n} e_{i-۱}^۲}{\hat{\sigma}_\circ}\Delta\hat{\rho} + o_p(۱) \end{aligned}$$

تذکر ۱ : اگر $\hat{\boldsymbol{\theta}}(n)$ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ باشد، تحت شرایط مطلوب و برای nهای بزرگ داریم

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}(n)-\boldsymbol{\theta}}{\sigma_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}(n))} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

که در آن $\sigma_n(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$ و $I(\boldsymbol{\theta})$ اطلاع فیشر است که در اینجا همان $F_n(\boldsymbol{\theta})$ است. بنابراین تحت فرضیه H_{02} و با توجه به تذکر ۱ $(\hat{\rho}(n)-1)\left(\frac{\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2}{\hat{\sigma}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ در نتیجه $SC_2 \xrightarrow{d} \chi^2(1)$.

۳.۳ آزمون خودهمبستگی در رگرسیون خطی

اگر $\beta_0 = 0$ مدل (۲) به مدل خودبازگشتی مرتبه اول تبدیل می‌شود. آزمون رگرسیون در حضور خودهمبستگی معادل آزمون $H_{03} : \beta_0 = 0$ در مقابل $H_{13} : \beta_0 \neq 0$ است. در این آزمون β_0 پارامتر مورد علاقه و ρ_0 و σ_0^2 پارامترهای مزاحم هستند. آماره آزمون نمره برای H_{03} برابر $SC_3 = S_{\boldsymbol{\beta}}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)(F^{\boldsymbol{\beta\beta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_0}$ است، که در آن $F_n^{\boldsymbol{\beta\beta}}\beta\beta(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) - F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)(F_{\rho\rho}(\hat{\hat{\boldsymbol{\theta}}_0})_0))^{-1}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ برآوردگر (شبه) درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ تحت فرضیه H_{03} است.

قضیه ۳ : تحت روابط (۱) تا (۳) آماره آزمون تحت فرضیه H_{03} به توزیع کای اسکور با d درجه آزادی همگرا می‌شود به عبارت دیگر

$$SC_3 = S_{\boldsymbol{\beta}}^2(F^{\boldsymbol{\beta\beta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_0})^{-1} \xrightarrow{d} \chi^2(d),\ \ n \to \infty$$

برهان : فرض کنید $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}(n), \hat{\rho}(n))$ برآوردگرهای بدون محدودیت (شبه) درستنمایی پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ باشند و $\boldsymbol{\theta}_0 = (0, \rho)$ مقادیر صحیح $\boldsymbol{\theta}$ تحت فرضیه H_{03} باشد. مشابه حالت قبل داریم

$$S_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0) = F_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0)\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}} + O_p(1).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) &= \big(F_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) - F_{\boldsymbol{\beta}_\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)(F_{\rho\rho}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ))^{-۱}F_{\rho\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)\big)\Delta\hat{\beta} + O_p(۱) \\ &= F^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)\Delta\hat{\beta} + O_p(۱) \end{aligned}$$

باتوجه به رابطه (۵) داریم

$$F^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ) = F_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\theta}_\circ) = \boldsymbol{X}_n(\rho_\circ)$$

در نتیجه

$$SC_۳ = (\Delta\beta)^T(F^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\circ)^{-۱}\Delta\beta = |\boldsymbol{X}_n^{\frac{۱}{۲}}(\rho_\circ)\Delta\beta|^۲$$

باتوجه به اینکه $\boldsymbol{X}_n^{\frac{۱}{۲}}(\rho_\circ)\Delta\beta \xrightarrow{d} N_d(\circ, I)$ نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

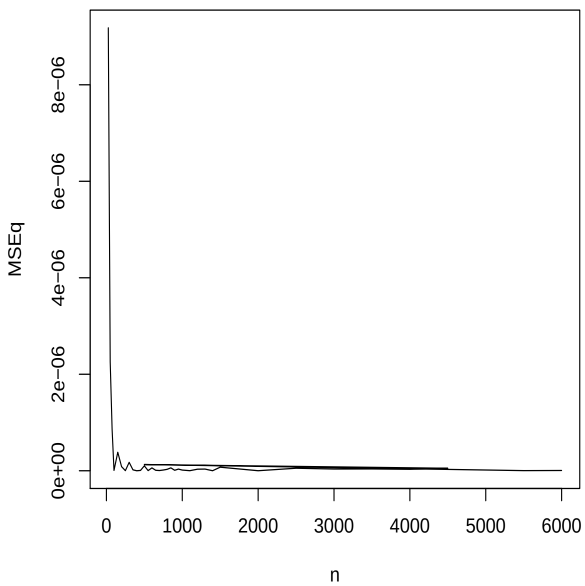
در این بخش در دو مرحله با استفاده از نرم افزار R با نمونه‌های شبیه‌سازی شده با اندازه های $n = ۲۵, ۵۰, ۷۵, \ldots$ و تعداد نمونه‌های بوت استرپ به اندازه $m = ۲۰۰۰$ تکرار، برآوردگرهای (شبه) درستنمایی پارامترهای ρ و β محاسبه و نمودارهای میانگین توان دوم خطا مربوط به این برآورد گرها رسم می‌شوند همچنین چندک‌های آماره آزمون داشتن ریشه واحد تعیین می‌شوند. برای این منظور مدل $y_i = \boldsymbol{\beta}^T x_i + e_i \quad, i = ۱, \ldots, n$ به فرم ماتریسی $Y = X\boldsymbol{\beta} + E$ بازنویسی می‌شود. که $d = ۲$، $\rho = ۱$ و $\beta = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشند و مانده‌ها از مدل خودبازگشتی مرتبه اول $e_i = \rho_{i-۱} + a_i$ پیروی کنند و

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n۱} & x_{n۲} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_۱ \\ \beta_۲ \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

همچنین خطاها دارای توزیع نرمال استاندارد هستند.

مرحله اول: برآوردگرهای (شبه) درستنمایی پارامترهای ρ و β شبیه‌سازی می‌شوند. چون برآورد (شبه) درستنمایی این پارامترها فرم بسته ای ندارد برای شبیه‌سازی آن‌ها از روش عددی استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا خطاها را از توزیع نرمال استاندارد و x را از توزیع $U(۰,۱)$ شبیه سازی کرده و برآوردگرهای پارامترهای ρ و β را برای $n = ۲۵, ۵۰, ۷۵, \ldots$ و نمونه بوت استرپ $m = ۲۰۰۰$ تکرار با $seed(۱۲۰)$ تولید نموده و میانگین توان دوم خطا مربوط به برآورد پارامترهای تولید شده محاسبه شده و در جداول ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. همچنین نمودار میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای تولید شده نیز در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ رسم شده است.

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود مقادیر به‌دست آمده برای برآورگرهای (شبه) درستنمایی پارامترها نزدیک به مقادیر واقعی $\rho = ۱$، $\beta_۱ = ۱$ و $\beta_۲ = ۲$ هستند.



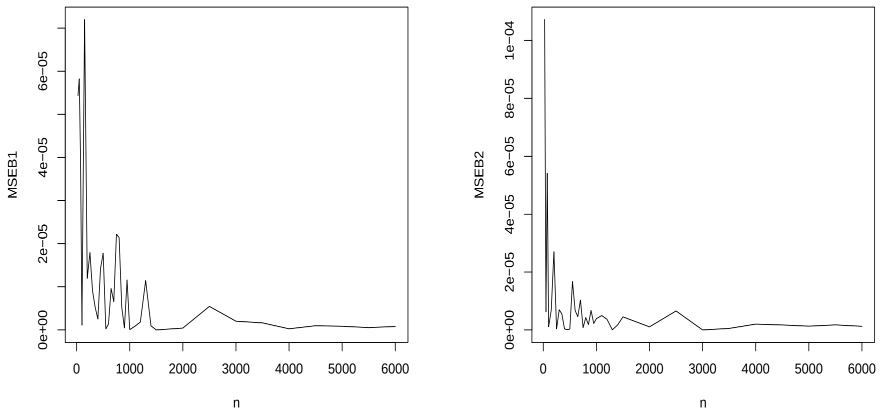
شکل ۱: نمودار MSE برآوردگر ρ در مقابل n

جدول ۱: مقادیر برآورد پارامترهای ρ، β_1و β_2

N	$\hat{\rho}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
۲۵	۰/۹۶۲۷	۱/۰۲۹۲	۱/۹۸۲۹
۵۰	/۹۶۱۵	۱۰/۰۱۱۸	۲/۰۱۱۵
۷۵	۰/۹۵۹۰	۰/۹۹۲۸	۱/۹۹۵۸
۱۰۰	۰/۹۶۷۰	۰/۹۹۲۳	۲/۰۰۳۳
۱۵۰	۰/۱۹۷۰	۱/۰۰۳۹	۲/۰۰۴۷
۲۰۰	۰/۹۷۴۴	۱/۰۰۷۹	۲/۰۰۹۲
۲۵۰	۰/۹۷۸۰	۱/۱۰۰۱	۲/۰۰۷۶
۳۰۰	۰/۹۸۲۱	۱/۰۱۴۷	۲/۰۱۵۷
۳۵۰	۰/۹۸۱۸	۱/۰۰۶۸	۲/۰۱۸۰
۴۰۰	۰/۹۸۱۷	۱/۰۰۶۵	۲/۰۱۵۹
۴۵۰	۰/۹۸۰۳	۱/۰۲۰۲	۲/۰۲۶۰
۵۰۰	۰/۹۸۲۴	۱/۲۱۷۱	۲/۰۱۲۶
۵۵۰	۰/۹۸۱۴	۱/۰۲۲۳	۲/۰۱۶۴
۶۰۰	۰/۹۸۲۱	۰/۹۸۲۱	۱/۰۱۹۷
۶۵۰	۰/۹۸۳۴	۱/۰۲۳۵	۲/۰۲۵۲
۷۰۰	۰/۹۸۴۷	۱/۰۱۶۷	۲/۰۱۶۸
۷۵۰	۰/۹۸۴۳	۱/۰۱۸۷	۲/۰۱۳۴
۸۰۰	۰/۹۸۴۴	۱/۰۲۵۸	۲/۰۲۰۱
۸۵۰	۰/۹۸۳۵	۱/۰۳۳۲	۲/۰۲۷۰
۹۰۰	۰/۹۸۴۳	۱/۰۲۶۷	۲/۰۲۵۱
۱۰۰۰	۰/۹۸۴۳	۰/۰۱۶۳	۲/۰۱۷۰
۱۱۰۰	۰/۹۸۵۴	۱/۰۲۴۱	۲/۰۲۰۳
۱۲۰۰	۰/۹۸۴۹	۱/۰۲۳۰	۲/۰۲۱۴
۱۳۰۰	۰/۹۸۴۲	۱/۰۲۹۷	۲/۰۲۸۶
۱۴۰۰	۰/۹۸۵۴	۱/۰۱۳۹	۲/۰۱۳۴
۱۵۰۰	۰/۹۸۵۲	۱/۰۱۰۸	۲/۰۰۶۰
۲۰۰۰	۰/۹۸۵۱	۱/۰۲۹۳	۲/۰۲۹۲
۲۵۰۰	۰/۹۸۵۲	۱/۲۴۴۳	۲/۰۲۳۶
۳۰۰۰	۰/۹۸۵۰	۱/۰۳۶۷	۲/۰۳۷۷
۳۵۰۰	۰/۹۸۴۵	۱/۰۴۷۰	۲/۰۵۲۱
۴۰۰۰	۰/۹۸۵	۱/۰۴۰۷	۲/۰۳۹۴
۴۵۰۰	۰/۹۸۵۲	۱/۰۴۷۱	۲/۰۴۶۸
۵۰۰۰	۰/۹۸۵۰	۱/۰۵۱۹	۲/۰۴۶۹
۵۵۰۰	۰/۹۸۵۵	۱/۰۴۳۰	۲/۰۴۲۵
۶۰۰۰	۰/۹۸۵۵	۱/۰۴۵۲	۲/۰۴۴۲

جدول ۲: مقادیرمیانگین توان دوم خطای برآوردگرهای $\hat{\rho}$، $\hat{\beta}_۱$ و $\hat{\beta}_۲$

N	$MSEq$	$MSE\beta_۱$	$MSE\beta_۲$
۲۵	۹/۱۸۰۹e-۰۶	۵/۴۳۵۲e-۰۵	۰.۰۰۰۱
۵۰	۲/۲۵۸۷e-۰۶	۵/۸۲۳۳e-۰۵	۶/۲۹۴۷e-۰۶
۷۵	۸/۶۵۸۲e-۰۷	۳/۸۰۴۴e-۰۵	/۴۰۸۴e-۰۵
۱۰۰	۶/۸۲۱۳e-۰۹	۱/۰۹۵۰e-۰۶	۱/۰۹۸۵۰e-۰۶
۱۵۰	۳/۸۳۰۱e-۰۷	۷/۱۹۹۳e-۰۵	۶/۸۵۷۹e-۰۶
۲۰۰	۸/۵۰۲۷e-۰۸	۱/۱۹۶۳e-۰۵	۲/۷۰۰۸e-۰۵
۲۵۰	۱/۶۰۷۱e-۰۹	۱/۷۹۱۸e-۰۵	۳/۷۵۸۶e-۰۷
۳۰۰	۱/۷۴۳۲e-۰۷	۹/۰۲۲۲e-۰۶	۶/۹۷۰۶e-۰۶
۳۵۰	۱/۸۴۸۲e-۰۸	۵/۲۱۱۱e-۰۶	۵/۵۳۰۲e-۰۶
۴۰۰	۱/۴۲۶۶e-۱۱	۲/۵۲۷۷e-۰۶	۳/۴۱۶۴e-۰۷
۴۵۰	۶/۹۸۳۷e-۰۹	۱/۴۲۴۸e-۰۵	۱/۱۶۵۲e-۰۷
۵۰۰	۱/۰۱۶۰e-۰۷	۱/۷۸۲۰e-۰۵	۲/۹۶۵۲e-۰۷
۵۵۰	۲/۶۱۵۶e-۰۹	۲/۴۹۹۰e-۰۷	۱/۶۶۸۷e-۰۵
۶۰۰	۵/۹۴۶۵e-۰۸	۱/۳۷۱۸e-۰۶	۶/۷۲۴۴-۰۶
۶۵۰	۹/۳۰۴۱e-۰۹	۹/۵۸۶۶e-۰۶	۴/۵۷۸۲e-۰۶
۷۰۰	۴/۶۴۴۱e-۰۹	۶/۵۷۸۲e-۰۶	۱/۰۳۲۵e-۰۵
۷۵۰	۱/۵۰۰۵e-۰۸	۲/۲۱۹۷e-۰۵	۸/۱۵۰۰e-۰۷
۸۰۰	۲/۹۳۰۲e-۰۸	۲/۱۴۲۵e-۰۵	۴/۲۶۹۷e-۰۶
۸۵۰	۵/۹۶۷۲e-۰۸	۵/۲۷۵۲e-۰۶	۱/۸۶۰۰e-۰۶
۹۰۰	۹/۷۵۱۷e-۰۹	۴/۵۶۷۴e-۰۷	۶/۷۳۴۸e-۰۶
۹۵۰	۳/۴۴۱۶e-۰۸	۱/۱۵۸۷e-۰۵	۲/۲۳۵۰e-۰۶
۱۰۰۰	۱/۴۰۵۶e-۰۸	۷/۲۱۴۱e-۰۸	۳/۸۹۱۴e-۰۶
۱۱۰۰	۱/۴۳۹۱e-۰۹	۸/۶۸۵۸e-۰۷	۴/۹۶۷۱e-۰۶
۱۲۰۰	۳/۲۰۱۶e-۰۱	۱/۸۲۹۷e-۰۶	۳/۶۹۴۷e-۰۶
۱۳۰۰	۳/۴۶۵۷e-۰۸	۱/۱۴۵۰e-۰۵	۵/۴۳۴۶e-۰۸
۱۴۰۰	۶/۸۳۶۰e-۱۰	۹/۵۵۴۸e-۰۷	۱/۷۲۴۲e-۰۶
۱۵۰۰	۷/۴۰۵۷e-۰۸	۲/۳۹۰۴e-۱۱	۴/۵۲۷۸e-۰۶
۲۰۰۰	۷/۰۲۵۳e-۱۰	۴/۲۷۲۹e-۰۷	۱/۰۶۴۱e-۰۶
۲۵۰۰	۵/۲۵۸۲e-۰۸	۵/۴۵۳۴e-۰۶	۶/۵۵۲۱e-۰۶
۳۰۰۰	۳/۵۸۲۸e-۰۸	۲/۰۲۴۶e-۰۶	۵/۴۲۷۶e-۰۹
۳۵۰۰	۳/۷۵۳۵e-۰۸	۱/۶۳۵۶e-۰۶	۵/۲۷۸۶e-۰۷
۴۰۰۰	۳/۰۱۷۳e-۰۸	۲/۶۲۵۰e-۰۷	۲/۰۱۲۰e-۰۶
۴۵۰۰	۵/۱۲۵۴e-۰۸	۹/۷۵۸۰e-۰۷	۸/۷۲۵۶e-۰۶
۵۰۰۰	۱/۲۸۸۸e-۰۷	۸/۴۶۲۴e-۰۷	۶/۳۰۵۶e-۰۶
۵۵۰۰	۲/۸۳۴۴e-۰۹	۵/۴۳۳۶e-۰۷	۱/۷۴۹۸e-۰۶
۶۰۰۰	۵/۵۸۱۰e-۰۹	۷/۹۸۹۹e-۰۷	۱/۲۵۸۵e-۰۶



(ب) (الف)

شکل ۲: نمودار MSE برآوردگرالف: β_2 ب : β_1 در مقابل n

در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با بزرگ شدن n، میانگین توان دوم خطا تقریبا روند نزولی پیدا کرده که نشان دهنده خوب بودن برآوردگرهای محاسبه شده به روش عددی است.

مرحله دوم: چون توزیع حدی آماره آزمون فرم بسته‌ای ندارد و در بعضی مواقع محاسبه جبری انتگرال‌ها میسر نیست، مشابه دیکی (۱۹۷۶) چندک‌های این توزیع‌ها با روش مونت کارلو محاسبه شده‌اند. برای این منظور ابتدا خطاها از توزیع نرمال استاندارد و x از توزیع $U(۰,۱)$ شبیه‌سازی شده وتوزیع حدی آماره آزمون داشتن ریشه واحد برای $n = ۲۵, ۵۰, ۷۵, \ldots$ و نمونه بوت‌استرپ با $m = ۵۰۰۰$ تکرار $seed(۲۰۰)$ تولید گردیده‌اند. چندک‌های ۰/۰۱، ۰/۰۲۵، ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۵، ۰/۹، ۰/۹۵، ۰/۹۷۵، ۰/۹۹ توزیع حدی تولید شده و در جدول ۳ ارائه شده‌اند.

به‌طور مشابه چندک‌های توزیع حدی با $seed(۱۰۰۰)$ نیز تولید شده‌اند.

جدول ۳: توزیع تجربی $d_۱$ برای $\rho = ۱$

$seed$	N	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۹۹	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۵۰	۰/۹۰	۰/۹۵	۰/۹۷۵
۲۰۰	۲۵	۸/۹e-۰۵	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۸	۰/۵۳۰	۳/۳۳۰	۴/۷۲۱	۶/۵۶۳	۸/۹۹۷
	۵۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۶	۰/۰۲۲	۰/۵۶۷	۳/۳۳۷	۴/۸۱۰	۶/۱۲۴	۸/۷۱۳
	۱۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۲۰	۰/۴۵۹	۲/۸۷۹	۴/۰۹۴	۵/۳۵۲	۷/۲۷۰
	۲۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۶	۰/۴۷۳	۲/۸۶۴	۳/۹۵۳	۵/۲۱۰	۶/۹۰۷
	۵۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۶	۰/۴۸۰	۲/۶۹۹	۳/۸۳۲	۵/۰۰۶	۶/۴۵۷
۱۰۰۰	۲۵	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۴	۰/۰۱۳	۰/۰۴۶	۱/۴۸۹	۸/۴۴۹	۱۱/۸۷۰	۱۵/۶۶۰	۲۱/۴۷۰
	۵۰	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۱۳	۰/۰۶۱	۱/۴۱۰	۶/۹۱۳	۹/۳۷۰	۱۱/۶۶۰	۱۴/۶۴۰
	۱۰۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۶	۰/۵۰۲	۲/۹۱۵	۴/۱۴۵	۵/۴۵۶	۷/۵۵۱
	۲۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۷	۰/۴۶۷	۲/۸۴۶	۴/۰۴۶	۵/۳۰۸	۷/۰۱۵
	۵۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۸	۰/۴۶۳	۲/۷۴۳	۳/۸۶۸	۴/۹۳۱	۶/۷۳۸

بحث و نتیجه‌گیری

برآوردگرهای (شبه) درستنمایی و توزیع حدی آماره آزمون نمره فرضیه‌های مختلف برای مدل رگرسیون خطی با مانده‌های مانا و نامانا و توزیع حدی آماره این آزمون ها با اثباتی ساده‌تر از راس مالر (۲۰۰۳) ارائه شد. مطالعات شبیه‌سازی نشان دادند که برآورگرهای (شبه) درستنمایی مناسب هستند. به‌علاوه چندک‌های توزیع حدی آماره‌های آزمون داشتن ریشه واحد محاسبه و در جداولی مشابه دیکی (۱۹۶۷) برای آزمون فرضیه‌های مربوط به ریشه‌های واحد ارائه گردید.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم مقاله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند را دارند.

مراجع

Chow, Y. S. (1965), Local Convergence of Martingales and the Law of Large Numbers, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 552-558.

Cox, D. R. and Hinkley, S. (1983), Diagnostics for Heteroscedasticity in Regression, *Biometrika*, **70**, 1-10.

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1967), Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.

Maller, R. A. (2003), Asymptotic of Regression with Stationary and Non-stationary Residuals, *Stochastic Processes and their Applications*, **105**,33-67.

Wei, W. W. S. (2006), *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, 2nd Edition, Gerg Tobin.