

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۲

جلد ۷، شماره ۲، ص ۲۶۹-۲۸۵

کران‌های پایین باتاچاریا و شیرساگار چند پارامتری برای واریانس برآوردگرهای ناریب

سمیرا نایبان، عبدالحمید رضایی رکن‌آبادی، غلامرضا محتشمی برزاداران
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۵/۱۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۲/۱۲/۱۳

چکیده: در این مقاله ضمن معرفی کران‌های باتاچاریا و شیرساگار، سعی شده است کران باتاچاریا چندپارامتری را که کمتر مورد بررسی دقیق قرار گرفته به‌طور ساده‌تر و قابل فهم‌تر بازنویسی شود. همچنین کران شیرساگار چندپارامتری که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است بیان و اثبات می‌شود. در نهایت با ارائه چند مثال از توزیع لگ‌نرمال به محاسبه و مقایسه کران‌های معرفی شده پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کران باتاچاریا، کران کرامر-رائو، کران شیرساگار، کران هامرسلی-چپمن-رایبیز.

۱ مقدمه

یکی از مباحث قابل توجه و مهم در ارتباط با برآورد یک پارامتر یا تابعی از آن، مقدار واریانس برآوردگر است، زیرا این مقدار در عین حالی که مقدار خطای برآورد را نشان می‌دهد در مباحث استنباطی از قبیل بازه اطمینان و آزمون فرضیه‌ها نیز کاربرد فراوانی دارد. اما یکی از مشکلات در این زمینه، پیچیده بودن اکثر

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: غلامرضا محتشمی برزاداران، grmohtashami@um.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲P۳۰، ۶۲F۹۹، ۶۲N۰۵، ۶۵D۲۰

۲۷۰..... کران‌های باتاچاریا و شیرساگار چند پارامتری

برآوردگرها و توزیع احتمال آنهاست که محاسبه دقیق واریانس را مشکل و بعضاً غیر ممکن می‌سازد. از جمله راه‌های رفع این مشکل، محاسبه کران برای واریانس و در نتیجه تقریب آن است.

کران کرامر-رائو یکی از مشهورترین کران‌های پایین برای واریانس برآوردگرها تحت شرایط نظم است. همچنین کران هامرسلی-چپمن-رایینز نیز از دیگر کران‌های پایین برای واریانس است که به شرایط نظم نیاز ندارد و نسبت به کران کرامر-رائو به واریانس واقعی برآوردگر نزدیکتر است. باتاچاریا (۱۹۴۶)، (۱۹۴۷) تعمیمی از کران کرامر-رائو براساس ماتریس باتاچاریا ارائه داد که از کران کرامر-رائو و در بعضی موارد از کران هامرسلی-چپمن-رایینز نیز بزرگتر و به مقدار واقعی واریانس برآوردگر نزدیکتر است. همچنین بلایت و رائو (۱۹۷۴) همگرایی کران‌های باتاچاریا را به واریانس واقعی برآوردگر نااریب نشان دادند. شیرساگار (۲۰۰۰) با تعمیم کران هامرسلی-چپمن-رایینز مشابه رهیافت باتاچاریا، کرانی موسوم به کران شیرساگار ارائه نمود. این کران علاوه بر عدم نیاز به برقراری شرایط نظم، از کران متناظر باتاچاریا بزرگتر و به مقدار واقعی واریانس نزدیکتر است.

در این مقاله ابتدا به معرفی کران باتاچاریا، در دو حالت یک و چند پارامتری و کران شیرساگار و بررسی برخی خواص و ویژگی‌های آنها پرداخته می‌شود. سپس کران شیرساگار در حالت چند پارامتری بیان و اثبات می‌شود. در ادامه فرم کلی ماتریس‌های باتاچاریا و شیرساگار که در محاسبه این کران‌ها استفاده می‌شود، برای توزیع لگ نرمال ارائه خواهد شد. همچنین برای واریانس برآوردگرهای نااریب برخی توابع مختلف از پارامترهای این توزیع، کران‌های مختلف باتاچاریا و شیرساگار را محاسبه و مقایسه نموده، بهترین کران در شرایط مختلف معرفی می‌شود. نتایج این مقاله برای مطالعات بعدی محققین به منظور یافتن برآوردی برای واریانس برآوردگر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۲ کران باتاچاریا

باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) یک فرم تعمیم یافته از نابرابری کرامر-رائو بدست آورد که در ادامه برای دو حالت یک پارامتری و چند پارامتری معرفی و بررسی می شود.

الف- حالت یک پارامتری: در محاسبه کران باتاچاریا، نیاز به محاسبه ماتریس باتاچاریا است که در حالت یک پارامتری، همان ماتریس کواریانس بردار تصادفی $(\frac{f^{(1)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \dots, \frac{f^{(k)}(X|\theta)}{f(X|\theta)})$ است، که در آن $f^{(k)}(X|\theta)$ مشتق k ام تابع چگالی احتمال $f(X|\theta)$ نسبت به پارامتر $\theta \in R$ و k ، مرتبه ماتریس می باشد. بدیهی است که برای مقدار $k = 1$ این ماتریس تبدیل به اطلاع فیشر می شود. بر اساس این ماتریس، نابرابری باتاچاریا به صورت زیر بیان می شود.

تعریف ۱: اگر $T(X)$ برآوردگر ناریب $\tau(\theta)$ باشد و شرایط نظم برقرار باشد داریم:

$$Var_{\theta}(T(X)) \geq \xi_{\theta} J^{-1} \xi_{\theta}^T,$$

که در آن T نماد ترانهاده، $\xi_{\theta} = (\tau^{(1)}(\theta), \dots, \tau^{(k)}(\theta))$ ، $\tau^{(j)}(\theta) = \frac{\partial^j E_{\theta}(T(X))}{\partial \theta^j}$ ، J ، ماتریس باتاچاریا با درایه های $j, j = 1, \dots, k$

$$J_{rs} = Cov(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(s)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}), \quad r, s = 1, \dots, k$$

$$E_{\theta}(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}) = 0 \text{ است و}$$

در این تحقیق کران های باتاچاریا یک پارامتری با نماد $B_k(\theta)$ نشان داده می شود. لذا بر اساس نابرابری باتاچاریا برای مقادیر مختلف k می توان کران های مختلفی را برای واریانس آماره پیدا کرد. به ازای مقدار $k = 1$ این نابرابری به کران کرامر-رائو تبدیل می شود. باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) نشان داد هر چه مرتبه ماتریس افزایش یابد و تابع $\tau(\theta)$ نیز مشتق پذیر از مرتبه k باشد، کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک تر می شود. به عبارتی برای $k \geq 1$ و $\theta \in \Theta \subset R$ ، نابرابری $B_{k+1}(\theta) \geq B_k(\theta)$ برقرار است.

ب- حالت چند پارامتری: فرض کنید بردار پارامتر به صورت $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \Theta \subset R^r$ باشد، در این صورت با تعریف عملگرهای

$$\partial_z := \left(\frac{\partial^z}{\partial \theta_1^{i_1} \dots \partial \theta_r^{i_r}} \Big|_{\theta} \circ \leq i_1, \dots, i_r, \sum_{j=1}^r i_j = z \right); \quad z \in N,$$

و $\mathbf{D}_k := (\partial_1 \dots \partial_k)^t$ ماتریس باتاچاریا از مرتبه k ام به صورت ماتریس کواریانس بردار تصادفی $\frac{\mathbf{D}_k f(X|\theta)}{f(X|\theta)}$ تعریف می‌شود. چون تعداد درایه‌های ∂_z برابر $m_z = \binom{z+r-1}{r-1}$ است، ماتریس باتاچاریا چند پارامتری از مرتبه k $n_k \times n_k$ خواهد بود، که در آن $n_k = \sum_{i=1}^k m_i$ بدیهی است به‌ازای $k = 1$ ماتریس فوق به ماتریس اطلاع فیشر $r \times r$ تبدیل می‌شود.

تعریف ۲: اگر $T(X)$ برآوردگر حقیقی مقدار و ناریب تابع حقیقی مقدار $\tau(\theta)$ باشد و شرایط نظم برای مشتقات جزئی برقرار باشد، آنگاه

$$\text{Var}_\theta(T(X)) \geq \eta_\theta J_r^{-1} \eta_\theta^t, \quad (1)$$

که در آن $\eta_\theta = \mathbf{D}_k \tau(\theta)$ و J_r^{-1} وارون ماتریس باتاچاریا چند پارامتری است. در ادامه کران باتاچاریا چند پارامتری از مرتبه k وقتی r پارامتر وجود دارد با نماد $B_{r,k}(\theta)$ نشان داده می‌شود. که در آن $B_{r,1}(\theta)$ همان کران کرامر-رائو چند پارامتری است و $B_{1,k}(\theta) = B_k(\theta)$ به‌عنوان مثال درایه‌های فرم کلی ماتریس متقارن باتاچاریا از مرتبه $k = 2$ وقتی توزیع دارای دو پارامتر α و β ($r = 2$) باشد عبارتند از:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int \frac{(\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x))^T}{f(x)} dx & a_{12} &= a_{21} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x) \frac{\partial}{\partial \beta} f(x)}{f(x)} dx \\ a_{13} &= a_{31} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x)}{f(x)} dx & a_{14} &= a_{41} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f(x)}{f(x)} dx \\ a_{15} &= a_{51} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x)}{f(x)} dx & a_{22} &= \int \frac{(\frac{\partial}{\partial \beta} f(x))^T}{f(x)} dx \\ a_{23} &= a_{32} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x)}{f(x)} dx & a_{24} &= a_{42} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f(x)}{f(x)} dx \\ a_{25} &= a_{52} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x)}{f(x)} dx & a_{33} &= \int \frac{(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x))^T}{f(x)} dx \\ a_{34} &= a_{43} = \int \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f(x)}{f(x)} dx & a_{35} &= a_{53} = \int \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x)}{f(x)} dx \\ a_{44} &= \int \frac{(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f(x))^T}{f(x)} dx & a_{45} &= a_{54} = \int \frac{\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x)}{f(x)} dx \\ a_{55} &= \int \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} f(x)}{f(x)} dx \end{aligned}$$

در زمینه کران باتاچاریا چند پارامتری می‌توان به پومرت (۱۹۹۷)، بارتوسزویچ (۱۹۸۰)، تاناکا (۲۰۰۶)، شنباگ (۱۹۷۲، ۱۹۷۹)، بلایت و راثو (۱۹۷۴)، محتشمی (۲۰۰۱، ۲۰۰۶) و تاناکا (۲۰۰۳) اشاره کرد. خراشادی‌زاده و محتشمی (۱۳۸۶) فرم کلی کران باتاچاریا را در خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع‌های واریانس درجه ۲ و ۳ از θ به‌دست آوردند و با شبیه‌سازی و محاسبات عددی نشان دادند که کران باتاچاریا به‌عنوان تقریبی از واریانس آماره، بهتر از کران پایین کرامر-راثو است. محتشمی و همکاران (۲۰۱۰) به محاسبه، شبیه‌سازی و مقایسه کران‌های باتاچاریا در توزیع گاوسی وارون برای توابع مختلفی از پارامتر پرداختند.

۳ کران هامرسلی-چپمن-رابینز و کران شیرساگار

یکی دیگر از نابرابری‌ها برای واریانس برآوردگر ناریب که نیاز به شرایط نظم ندارد و از کران کرامر-راثو نیز بهتر است، نابرابری هامرسلی-چپمن-رابینز است که مستقلاً توسط هامرسلی (۱۹۵۰) و چپمن و رابینز (۱۹۵۱) به‌صورت زیر معرفی شد.

تعریف ۳: اگر $T(X)$ برآوردگر ناریب $\tau(\theta)$ باشد، آنگاه

$$Var_{\theta}(T(X)) \geq \sup_{\phi \in \Theta} \frac{[\tau(\phi) - \tau(\theta)]^2}{E\left(\frac{f(X|\phi) - f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)^2}, \quad (2)$$

که در آن سوپریموم روی تمام مجموعه $R \supset \Theta \subset R$ با $\phi \in \Theta$ و $\tau(\phi) \neq \tau(\theta)$ است. $S(\phi) \subset S(\theta) = \{x | f(x|\theta) > 0\}$

کران هامرسلی-چپمن-رابینز با نماد $H(\theta)$ نمایش داده می‌شود و چپمن و رابینز (۱۹۵۱) نشان دادند $H(\theta) \geq B_1(\theta)$. به علاوه سن و گوش (۱۹۷۶) شرایطی که این نابرابری به برابری تبدیل می‌شود را مورد بررسی قرار دادند و کران $H(\theta)$ را با کران‌های باتاچاریا مقایسه کرده و شرایط کافی برای برتری هر یک از دیگری را بیان کردند. آکاهیرا و اهیاجی (۲۰۰۷) کران هامرسلی-چپمن-رابینز را از دیدگاه بیزی مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند.

۲۷۴ کران‌های باتاچاریا و شیرساگار چند پارامتری

الف- کران شیرساگار یک پارامتری: شیرساگار (۲۰۰۰) یک کران توسعه یافته از نابرابری هامرسلی-چپمن-رابینز به دست آورد که نیاز به شرایط نظم ندارد و از کران باتاچاریا نیز بهتر است. وی این نابرابری را در حالت یک پارامتری بیان و اثبات نموده است.

تعریف ۴: فرض کنید

$$\psi_r = \frac{f(x|\phi_r) - f(x|\theta)}{f(x|\theta)}, r = 1, \dots, k,$$

نابرابری شیرساگار به صورت

$$Var_{\theta}(T(X)) \geq \sup_{\phi} \lambda_{\theta} \Sigma^{-1} \lambda_{\theta}^t, \quad (3)$$

است، که در آن $\lambda_{\theta} = (\tau(\phi_1) - \tau(\theta), \dots, \tau(\phi_k) - \tau(\theta))$ و Σ ماتریسی با درایه‌های

$$\Sigma_{rs} = Cov(\psi_r, \psi_s), \quad r, s = 1, \dots, k,$$

است. چون برای هر $r = 1, \dots, k$ $E(\psi_r) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma_{rs} &= E(\psi_r \psi_s) \\ &= \int \frac{f(x; \phi_r) f(x; \phi_s)}{f(x; \theta)} dx - 1. \end{aligned}$$

در نابرابری سوپریموم روی تمام مجموعه $\Theta \subset R$ با شرط

$$S(\phi_k) \subset S(\phi_{k-1}) \subset \dots \subset S(\phi_1) \subset S(\theta), i = 1, \dots, k,$$

گرفته می‌شود.

کران‌های شیرساگار با نماد $K_k(\theta)$ نشان داده می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای $k = 1$ ، $K_1(\theta) = H(\theta)$ و بنابراین $K_1(\theta) \geq B_1(\theta)$. شیرساگار (۲۰۰۰) نشان داد برای $\theta \in \Theta \subset R$ و هر مقدار $k \geq 1$ ، نامساوی $K_k(\theta) \geq B_k(\theta)$ برقرار است. یعنی کران شیرساگار از مرتبه k نسبت به کران باتاچاریا از مرتبه k به واریانس برآوردگر نزدیکتر است. کیسکه (۲۰۰۲) نیز کرانی در ارتباط با کران شیرساگار و کران باتاچاریا ارائه نمود و نشان داد که از کران شیرساگار ضعیف‌تر و

از کران باتاچاریا بهتر است. کین و نایاک (۲۰۰۸) با استفاده از نابرابری شیرساگار، کران‌هایی برای میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی^۱ به دست آوردند و با کران‌های نابرابری باتاچاریا مقایسه کردند. همچنین نایبان و همکاران (۲۰۱۳) به مقایسه کران‌های باتاچاریا و شیرساگار در توزیع گامای تعمیم‌یافته پرداختند.

ب- کران شیرساگار چند پارامتری: فرض کنید Ω فضای پارامتر در زیر مجموعه‌ای باز از R^r به صورت $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ و برای هر $i = 1, 2, \dots$ $\Phi_i(\theta)$ مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های فضای پارامتر به صورت

$$\Phi_i(\theta) : (\Phi_{i_1}(\theta_1), \dots, \Phi_{i_r}(\theta_r)) \mid \sum_{j=1}^r i_j = i, \quad i_j \in \{0, 1, \dots\}, \quad (4)$$

باشد، که در آن $\Phi_{i_j}(\theta_j)$ تابعی از θ_j است به طوری که برای $j = 1, \dots, r$ $\Phi_0(\theta_j) = \theta_j$ و

$$S(\Phi_k(\theta)) \subset \dots \subset S(\Phi_1(\theta)) \subset S(\theta). \quad (5)$$

هر $\Phi_i(\theta)$ دارای $m_i = \binom{i+r-1}{r-1}$ عضو است. به عنوان نمونه می‌توان عناصر $\Phi_i(\theta)$ را به صورت $\Phi_{i_j}(\theta_j) = \theta_j + i_j \delta_j$ در نظر گرفت که در آن δ_j به نحوی تعیین می‌شود که رابطه (۵) همواره برقرار باشد. مثلاً

$$\Phi_1(\theta) = \{(\theta_1 + \delta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), (\theta_1, \theta_2 + \delta_2, \dots, \theta_r), \dots, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r + \delta_r)\},$$

یا

$$\Phi_2(\theta) = \{(\theta_1 + 2\delta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), \dots, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r + 2\delta_r),$$

$$(\theta_1 + \delta_1, \theta_2 + \delta_2, \theta_3, \dots, \theta_r), \dots, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{r-1} + \delta_{r-1}, \theta_r + \delta_r)\}.$$

حال بردار $\lambda_k = (h_1, \dots, h_k)$ را در نظر بگیرید، که در آن $h_i = (\tau(\Phi_i(\theta)) - \tau(\theta))$ برداری با اندازه m_i و ۱ برداری با درایه‌های یک است، بنابراین λ_k برداری با اندازه $n_k = \sum_{i=1}^k m_i$ خواهد بود. حال با تعریف بردار

$$\Psi_i = \frac{f(X; \Phi_i(\theta)) - f(X; \theta)}{f(X; \theta)}, \quad i = 1, \dots, k,$$

^۱ Mean square error of prediction

۲۷۶ کران‌های باتاچاریا و شیرساگار چند پارامتری

و استفاده از عملگر $A_k f(x; \theta) := (f(x; \Phi_1(\theta)), \dots, f(x; \Phi_k(\theta)))$ ماتریس کواریانس بردار (Ψ_1, \dots, Ψ_k) به صورت $\Sigma_k = Cov(\frac{A_k f(X; \theta)}{f(X; \theta)} - 1)$ خواهد شد. قضیه ۱: اگر $T(X)$ برآوردگر حقیقی مقدار و ناریب تابع حقیقی مقدار $\tau(\theta)$ باشد، آنگاه

$$Var_{\theta}(T(X)) \geq \sup \lambda_k \Sigma_k^{-1} \lambda_k^t := K_{r,k}(\theta), \quad (6)$$

که در آن سوپریمم روی تمام $\Phi_i(\theta)$ است که در شرط (۵) صدق می‌کند. برهان: با توجه به تعاریف نمادها و عملگرها به راحتی مشاهده می‌شود که برای هر $k, E_{\theta}(\frac{A_k f(X; \theta)}{f(X; \theta)} - 1) = 0$. از طرفی ماتریس کواریانس Σ_k رامی‌توان به صورت

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{k1} & \dots & \Sigma_{kk} \end{pmatrix} \quad (7)$$

افراز کرد، که در آن ماتریس بلوک $m_{\ell} \times m_s$ به صورت

$$\Sigma_{\ell s} = E_{\theta}(\Psi_{\ell} \Psi_s), \quad \ell, s = 1, \dots, k,$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned} Cov_{\theta}(T(X), \Psi_i) &= E_{\theta}(T(X) \Psi_i) \\ &= \int T(x) \cdot f(x; \Phi_i(\theta)) d\mu(x) - \int T(x) \cdot f(x; \theta) d\mu(x) \\ &= \tau(\Phi_i(\theta)) - \tau(\theta) \\ &= h_i, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

حال ضریب همبستگی چندگانه بین $T(X)$ و (Ψ_1, \dots, Ψ_k) به صورت

$$\rho_k^{\Psi} = \frac{\lambda \Sigma^{-1} \lambda^t}{Var_{\theta}(T(X))}, \quad (8)$$

خواهد شد، که از آن رابطه (۶) نتیجه می‌شود.

در قضیه بعد نشان داده می‌شود که با افزایش مرتبه ماتریس، کران حاصل به واریانس برآوردگر نزدیکتر می‌شود.

قضیه ۲: کران شیرساگار چند پارامتری که در قضیه ۱ معرفی شد، نسبت به k صعودی است. یعنی برای هر k ,

$$M_k(\theta) \leq M_{k+1}(\theta). \quad (9)$$

برهان: باتوجه به تعریف ماتریس Σ_k و افراز (۷) می‌تون نوشت:

$$\Sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} \Sigma_k & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A' & \vdots & B \end{pmatrix}, \quad (10)$$

که در آن $A = (\Sigma_{1(k+1)} \dots \Sigma_{k(k+1)})^T$ ماتریس $n_k \times m_{k+1}$ و $B = \Sigma_{(k+1)(k+1)}$ یک ماتریس مربعی $m_{k+1} \times m_{k+1}$ است. در نتیجه

$$\Sigma_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} (\Sigma_k - AB^{-1}A')^{-1} & -\Sigma_k^{-1}A(B - A'\Sigma_k^{-1}A)^{-1} \\ -B^{-1}A'(\Sigma_k - AB^{-1}A')^{-1} & (B - A'\Sigma_k^{-1}A)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

بنابراین کران شیرساگار مرتبه $k+1$ را می‌توان به صورت

$$M_{k+1}(\theta) = \sup[\lambda \quad h_{k+1}]_{\Sigma_{k+1}^{-1}} \begin{bmatrix} \lambda' \\ h'_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

بیان کرد، که در آن $h_{k+1} = (\tau(\Phi_{k+1}(\theta)) - \tau(\theta))$ برداری با اندازه m_{k+1} است. حال با جایگذاری (۱۱) در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$M_{k+1}(\theta) = \sup [\lambda C_{11}\lambda' + h_{k+1}C_{21}\lambda' + \lambda C_{12}h'_{k+1} + h_{k+1}C_{22}h'_{k+1}].$$

از طرفی با استفاده از لمی در کن میسر (۱۹۸۱) می‌توان C_{11} را به صورت مناسب داریم:

$$M_{k+1}(\theta) = M_k(\theta) + \sup \left[\lambda(I - \Sigma_k^{-1}AB^{-1}A')^{-1}\Sigma_k^{-1}AB^{-1}A'\Sigma_k^{-1}\lambda' + h_{k+1}C_{21}\lambda' + \lambda C_{12}h'_{k+1} + h_{k+1}C_{22}h'_{k+1} \right],$$

چون جمله دوم سمت راست تساوی همواره مثبت است نامساوی (۹) برقرار است.

۴ کران‌های باتاچاریا و شیرساگار در توزیع لگ نرمال

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و σ^2 و تابع چگالی احتمال به صورت

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

باشد، که در آن $\sigma > 0, \mu \in R, x > 0$.

الف- با فرض معلوم بودن σ^2 و نامعلوم بودن μ ماتریس باتاچاریای یک پارامتری قطری با درایه‌های قطر اصلی به صورت

$$J_{rr} = \frac{r!}{\sigma^{2r}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (14)$$

است و فرم کلی درایه‌های ماتریس شیرساگار نیز به صورت

$$\Sigma_{rs} = e^{\frac{rs\delta^2}{\sigma^2}} - 1, \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (15)$$

هستند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این ماتریس برخلاف ماتریس باتاچاریا قطری نیست.

ب- با فرض معلوم بودن μ و نامعلوم بودن σ^2 ماتریس باتاچاریای یک پارامتری همچنان قطری است. به‌عنوان مثال ماتریس 5×5 آن عبارت است از

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{45}{\sigma^{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{315}{\sigma^{16}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14175}{\sigma^{20}} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

از جمله مزایای قطری بودن ماتریس باتاچاریا سهولت محاسبه معکوس آن است که در محاسبه کران باتاچاریا از آن استفاده می‌شود. اما در این حالت انتگرال‌های موجود در درایه‌های ماتریس شیرساگار فرم بسته‌ای ندارند و نیاز به استفاده از روش‌های عددی خواهد بود.

ج- هنگامی که هر دو پارامتر نامعلوم باشند، ماتریس باتاچاریای دوپارامتری به صورت شبه قطری است. به عنوان مثال ماتریس باتاچاریای دو پارامتری مرتبه سوم ($k = 3$) توزیع لگ نرمال به صورت

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2} & \frac{2}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sigma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2\sigma^2} & \frac{2}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sigma^2} & \frac{7}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{45}{4\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

است. در حالی که همه درایه‌های ماتریس شیرساگار چند پارامتری غیر صفر هستند. به عنوان مثال درایه‌های ماتریس متقارن شیرساگار از مرتبه دوم عبارتند از:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \exp\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1 & a_{12} &= a_{21} = \exp\left(\frac{\delta_1^2 \delta_2}{\sigma^2}\right) - 1 \\ a_{13} &= a_{31} = \exp\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1 & a_{14} &= a_{41} = \exp\left(\frac{\delta_1^2 \delta_2}{\sigma^2}\right) - 1 \\ a_{15} &= a_{51} = \exp\left(\frac{(2\sigma^2 + \delta_2)\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) - 1 & a_{22} &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - \delta_2^2}} - 1 \\ a_{23} &= a_{32} = \exp\left(\frac{2\delta_1^2 \delta_2}{\sigma^2}\right) - 1 & a_{24} &= a_{42} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - 2\delta_2^2}} - 1 \\ a_{25} &= a_{52} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - \delta_2^2}} \exp\left(\frac{\delta_2 \delta_1^2}{2(\sigma^2 - \delta_2^2)}\right) - 1 & a_{33} &= \exp\left(\frac{4\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1 \\ a_{35} &= a_{53} = \exp\left(\frac{2(\sigma^2 + \delta_2)\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1 & a_{34} &= a_{43} = \exp\left(\frac{4\delta_1^2 \delta_2}{\sigma^2}\right) - 1 \\ a_{45} &= a_{54} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - 2\delta_2^2}} \exp\left(\frac{\delta_1^2 \delta_2}{\sigma^2 - 2\delta_2^2}\right) - 1 & a_{44} &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - 4\delta_2^2}} - 1 \\ a_{55} &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - \delta_2^2}} \exp\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma^2 - \delta_2}\right) - 1 \end{aligned}$$

۱.۴ کران‌های پایین واریانس برآوردگرهای نارایب میانگین

با استفاده از ماتریس‌های باتاچاریا در روابط (۱۴) و (۱۶)، شکل کلی کران باتاچاریای یک پارامتری مرتبه k ام برای واریانس برآوردگرهای نارایب میانگین توزیع لگ نرمال، یعنی $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ ، عبارت است از:

الف - μ نامعلوم و σ^2 معلوم:

$$B_k(\mu) = \sigma^2 e^{2\mu + \sigma^2} \sum_{i=1}^k \frac{\sigma^{2(i-1)}}{i!}.$$

ب - σ^2 نامعلوم و μ معلوم:

$$B_k(\sigma^2) = (\sigma^2 e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}})^2 \sum_{i=1}^k \frac{\sigma^{4i-4}}{(2i)!}.$$

رد و مدنراذنی اهتسبم ریف، م و بلعم σ^2 و م و بلعمانذ μ ت بلاجر د را، گاسریشی اهن ارک. دناه د شه ئارا ۱ ل و دجر د ایراچاتا بی اهن ارکا بی ددعی اهل اشم ب لاق

جدول ۱: کران‌های مختلف باتاچاریا و شیرساگار برای واریانس برآوردگرهای نارایب میانگین توزیع لگ نرمال (μ نامعلوم و σ^2 معلوم)

$K_1 \approx \dots \approx K_4$	B_4	B_3	B_2	B_1	σ^2	μ
۴/۶۷۰۷	۴/۶۴۳	۴/۵۳۰	۴/۰۷۷۴	۲/۷۱۸	۱	۰
۳۴/۵۱۲	۳۴/۳۱۲	۳۳/۴۷۵	۳۰/۱۲۸	۲۰/۰۸۵	۱	۱
۳۴۸/۸۳۰	۱۶۳/۷۹۴	۱۴۵/۵۹۵	۱۰۹/۱۹۶	۵۴/۵۹۸	۲	۱

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود کران‌های باتاچاریا با افزایش مرتبه ماتریس افزایش می‌یابد، اما میل همگرایی کران‌های شیرساگار بسیار بالاتر از کران‌های باتاچاریا است. از آنجایی که کران‌های مختلف شیرساگار اختلاف زیادی با هم ندارند، کران اول شیرساگار را می‌توان به‌عنوان بهترین تقریب برای واریانس برآوردگر نارایب میانگین توزیع لگ نرمال وقتی μ نامعلوم و σ^2 معلوم باشد، معرفی نمود.

جدول ۲: کران‌های مختلف باتاچاریا برای واریانس برآوردگرهای ناریب میانگین توزیع لگ نرمال (μ معلوم و σ^2 نامعلوم)

B_4	B_3	B_2	B_1	σ^2	μ
۱/۴۷۶	۱/۴۷۶	۱/۴۷۲	۱/۳۵۹	۱	۰
۱۰/۹۰۸	۱۰/۹۰۷	۱۰/۸۷۹	۱۰/۰۴۲	۱	۱
۳۵/۸۰۸	۳۵/۷۹۶	۳۵/۴۵۸	۳۰/۳۹۳	۲	۱

اما در حالتی که μ معلوم و σ^2 نامعلوم باشد، با توجه به جدول ۲ کران‌های باتاچاریا از مرتبه ۳ به بعد به مقدار معینی میل می‌کنند لذا می‌توان از کران ۳ یا ۴ به‌عنوان تقریبی برای واریانس برآوردگر استفاده نمود.

ج- هر دو پارامتر نامعلوم:

فرم کلی کران‌های باتاچاریا دو پارامتری برای واریانس برآوردگرهای ناریب میانگین توزیع لگ نرمال به صورت

$$B_{r,k}(\theta) = \sigma^2 e^{\gamma\mu + \sigma^2} \sum_{i=1}^{\gamma k} \frac{\sigma^{2(i-1)}}{i!},$$

است و به‌ازای بعضی از مقادیر مختلف پارامتر، این کران‌ها در جدول ۳ ارائه شده‌اند.

جدول ۳: کران‌های مختلف باتاچاریای دو پارامتری برای واریانس برآوردگرهای ناریب میانگین توزیع لگ نرمال (هر دو پارامتر نامعلوم)

$B_{2,5}$	$B_{2,4}$	$B_{2,3}$	$B_{2,2}$	$B_{2,1}$	σ^2	μ
$\frac{4}{170}$	$\frac{4}{170}$	$\frac{4}{170}$	$\frac{4}{144}$	$\frac{4}{177}$	۱	۰
$\frac{24}{514}$	$\frac{24}{512}$	$\frac{24}{508}$	$\frac{24}{312}$	$\frac{20}{128}$	۱	۱
$\frac{348}{782}$	$\frac{348}{706}$	$\frac{347}{001}$	$\frac{327}{588}$	$\frac{218}{392}$	۲	۱
$\frac{1}{142} \times 10^6$	$\frac{1}{138} \times 10^6$	$\frac{1}{102} \times 10^6$	$\frac{9}{205} \times 10^5$	$\frac{4}{490} \times 10^5$	۳	۴
$\frac{2}{529} \times 10^{10}$	$\frac{2}{227} \times 10^{10}$	$\frac{1}{599} \times 10^{10}$	$\frac{7}{485} \times 10^9$	$\frac{1}{575} \times 10^9$	۶	۶
$\frac{1}{046} \times 10^{12}$	$\frac{9}{886} \times 10^{12}$	$\frac{8}{073} \times 10^{12}$	$\frac{4}{635} \times 10^{12}$	$\frac{1}{260} \times 10^{12}$	۵	۱۰

کران‌های شیرساگار دو پارامتری از مرتبه اول و دوم ارائه شده در جدول ۴، حاکی از رشد سریع تر کران شیرساگار نسبت به کران باتاچاریا به مقدار واقعی واریانس برآوردگر است.

جدول ۴: کران‌های مختلف شیرساگار دو پارامتری برای واریانس برآوردگرهای نارایب میانگین توزیع لگ نرمال (هر دو پارامتر نامعلوم)

$K_{2,2}$	$K_{2,1}$	σ^2	μ
۴/۶۷۰	۴/۶۵۹	۱	۰
۳۴/۷۹۵	۳۴/۴۸۱	۱	۱
۳۴۹/۲۰۴	۳۴۷/۰۰۱	۲	۱
$۸/۹۱۱ \times ۱۰^۶$	$۹/۴۸۱ \times ۱۰^۵$	۳	۴
$۴/۸۸۲ \times ۱۰^{۱۰}$	$۸/۹۸۰ \times ۱۰^۹$	۶	۶
$۶/۰۷۸ \times ۱۰^{۱۳}$	$۹/۸۰۰ \times ۱۰^{۱۲}$	۵	۱۰

کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگرهای نارایب گشتاور^rام توزیع لگ نرمال، یعنی $E(X^r) = e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}}$ نیز به صورت زیر است که رفتار آنها همانند میانگین است.

الف - μ نامعلوم و σ^2 معلوم:

$$B_k(\mu) = (r\sigma e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}})^2 \sum_{i=1}^k \frac{(r\sigma)^{2(i-1)}}{i!}.$$

ب - σ^2 نامعلوم و μ معلوم:

$$B_k(\sigma^2) = (r^2\sigma^2 e^{r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}})^2 \sum_{i=1}^k \frac{(r\sigma)^{4i-4}}{(2i)!}.$$

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا کران‌های باتاچاریا و شیرساگار معرفی و سپس کران شیرساگار چند پارامتری بیان و اثبات شد. سپس فرم‌های کلی ماتریس و کران‌های باتاچاریا و شیرساگار در توزیع لگ نرمال محاسبه و برای توابع مختلفی از پارامترها مقایسه شدند. به عنوان مثال زمانی که پارامتر μ نامعلوم و σ^2 معلوم باشد، کران اول شیرساگار که همان کران هامرسلی-چپمن-رابینز است به عنوان بهترین تقریب برای واریانس برآوردگرهای نارایب تابع میانگین توزیع لگ نرمال به دست آمد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات و پیشنهادات ارزنده داوران و سردبیر محترم نشریه که باعث بهبود مقاله شد، تقدیر و تشکر می کنند.

مراجع

خراشادی زاده، م. و محتشمی برزاداران، غ. (۱۳۸۶)، ساختار ماتریس باتاچاریا در خانواده توزیع های نمایی طبیعی و نقش آن در تقریب واریانس یک آماره، مجله پژوهش های آماری ایران، ۴، ۲۹-۴۶.

Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2007), A Bayesian View of the Hammersley-Chapman-Robbins-type Inequality, *Statistics*, **41**, 137-144.

Bartoszewicz, J. (1980), On the Convergence of Bhattacharyya Bounds in the Multiparameter Case, *Zastosowanie Matematyki*, **16**, 601-608.

Bhattacharyya, A. (1946), On Some Analogues of the Amount of Information and their Use in Statistical Estimation, *Sankhya A*, **8**, 1-14.

Bhattacharyya, A. (1947), On Some Analogues of the Amount of Information and their Use in Statistical Estimation II, *Sankhya A*, **8**, 201-218.

Blight, B. J. N. and Rao, P. V. (1974), The Convergence of Bhattacharyya Bounds, *Biometrika*, **61**, 137-142.

Chapman, D. G. and Robbins, H. (1951), Minimum Variance Estimation without Regularity Assumptions, *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 581-586.

Hammersley, J. M. (1950), On Estimating Restricted Parameters, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **12**, 192-240.

کران‌های باتاچاریا و شیرساگار چند پارامتری ۲۸۴

Koike, K. (2002), On the Inequality of Kshirsagar, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **31**, 1617-1627.

Kshirsagar, A. M. (2000), An Extension of the Chapman-Robbins Inequality, *Journal of Indian Statistical Association*, **38**, 355-362.

Miller, K. S. (1981), On the Inverse of the Sum of Matrices, *Mathematics Magazine*, **54**, 67-72.

Mohtashami Borzadaran, G. R. (2001), Results Related to the Bhattacharyya Matrices, *Sankhya, A*, **63**, 113-117.

Mohtashami Borzadaran, G. R. (2006), A Note via Diagonality of the 2×2 Bhattacharyya Matrices, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **1**, 79-84.

Mohtashami Borzadaran, G. R., Rezaei Roknabadi, A. H. and Khorashadizadeh, M. (2010), A View on Bhattacharyya Bounds for Inverse Gaussian Distributions, *Metrika*, **72**, 151-161.

Nayeban, S., Rezaei Roknabadi, A. H. and Mohtashami Borzadaran, G. R. (2013), Bhattacharyya and Kshirsagar Bounds in Generalized Gamma Distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **42**, 969-980.

Pommeret, D. (1997), Multidimensional Bhattacharyya Matrices and Exponential Families, *Journal of Multivariate Analysis*, **63**, 105-118.

Qin, M. and Nayak, T. K. (2008), Kshirsagar Type Lower Bounds for Mean Squared Error of Prediction, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **37**, 861-872.

- Sen, P. K. and Ghosh, B. K. (1976), Comparison of Some Bounds in Estimation Theory, *The Annals of Statistics*, **4**, 755-765.
- Shanbhag, D. N. (1972), Some Characterizations Based on the Bhattacharyya Matrix, *Journal of Applied Probability*, **9**, 580-587.
- Shanbhag, D. N. (1979), Diagonality of the Bhattacharyya Matrix as a Characterization, *Theory of Probability and its Applications*, **24**, 430-433.
- Tanaka, H. (2003), On a Relation Between a Family of Distributions Attaining the Bhattacharyya Bound and that of Linear Combinations of the Distributions from an Exponential Family, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **32**, 1885-1896.
- Tanaka, H. (2006), Location and Scale Parameter Family of Distributions Attaining the Bhattacharyya Bound, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**, 1611-1628.