مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۳
جلد ۸، شماره ۲، ص ۱۷۵-۱۸۴

برآوردگر بهبودیافته میانگین در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل

احسان زمان‌زاده
گروه آمار، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۳/۱۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۷/۲۳

چکیده : در این مقاله برآوردگر بهبودیافته میانگین در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل معرفی می‌شود که براساس این واقعیت که تابع توزیع آماره‌های مرتب به‌طور تصادفی مرتب شده هستند، به‌دست می‌آید. همچنین نشان داده می‌شود این برآوردگر همگراست و عملکرد بهتری نسبت به برآوردگر تجربی میانگین در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل دارد.

واژه‌های کلیدی : برآورد میانگین، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل، رگرسیون هم‌توان.

۱ مقدمه

نظریه نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار[۱] (RSS)، که برای نخستین بار توسط مک اینتایر (۱۹۵۲) معرفی شد، روشی موثر برای جمع‌آوری نمونه‌ای با اطلاعات بیشتر و در نتیجه استنباطی معتبرتر در مقابل نمونه‌گیری تصادفی ساده[۲] (SRS)، از جامعه

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احسان زمان‌زاده، e.zamanzade@sci.ui.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲D۰۵، ۶۲G۰۵

۱ Ranked Set Sampling
۲ Simple Random Sampling

است. به‌شرط این‌که مقایسه و مرتب کردن واحدهای جامعه، ارزان‌تر و ساده‌تر از اندازه‌گیری دقیق آن‌ها باشد. نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار می‌تواند به‌صورت متعادل[۳] یا نامتعادل[۴] باشد. روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار متعادل را می‌توان به‌صورت زیر شرح داد:

الف) تعداد k نمونه تصادفی، هر یک به حجم k از جامعه استخراج می‌شود.

ب) هر یک از نمونه‌های مستخرج‌شده به حجم k، بدون اندازه‌گیری دقیق آن‌ها (به کمک چشم یا متغیر کمکی و ...) به‌صورت صعودی مرتب می‌شود.

ج) iامین مشاهده از نمونه iام به‌طور دقیق اندازه‌گیری می‌شود.

د) مراحل (الف) تا (ج) را n دفعه تکرار کرده تا نمونه‌ای به حجم $N = kn$ استخراج شود.

بدین ترتیب، نمونه مجموعه رتبه‌دار متعادل n دوره‌ای[۵] به‌صورت $\{X_{[i]j}, i = ۱, \ldots, k, j = ۱, \ldots, n\}$ حاصل می‌شود، که در آن نماد $[\cdot]$ نشانگر این است که مشاهدات بر اساس رتبه‌بندی تخمینی و نه اندازه‌گیری دقیق از میان سایر مشاهدات انتخاب شده‌اند و لذا وجود خطای رتبه‌بندی در انتخاب آن‌ها کاملاً محتمل است.

طرح نمونه‌گیری از مجموعه رتبه‌دار غیرمتعادل، مشابه نمونه‌گیری از مجموعه رتبه‌دار متعادل است با این تفاوت که تعداد دوره‌ها برای آماره‌های رتبه‌بندی شده مختلف یکسان نیستند. در واقع نمونه حاصل از طرح نمونه‌گیری از مجموعه رتبه‌دار نامتعادل، نمونه‌ای به‌صورت $\{X_{[i]j}, i = ۱, \ldots, k, j = ۱, \ldots, n_i\}$ است، که در آن $n_۱, \ldots, n_k$ مقادیر صحیح بزرگتر یا مساوی صفر هستند و $N = \sum_{i=۱}^{k} n_i$ حجم کل نمونه است.

نکته قابل توجه در طرح نمونه‌گیری در مجموعه رتبه‌دار این است که تمام N عضو نمونه، مشابه نمونه‌گیری تصادفی ساده، مستقل از هم هستند و اعضایی که اندیس داخل کروشه‌شان با هم برابر است، هم‌توزیع نیز هستند. به عبارت دیگر

---

۳ Balanced

۴ Unbalanced

۵ Cycle

$X_{[r]1}, \ldots, X_{[r]n_i}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع، با توزیع $F_{[r]}$ هستند. بنابراین به‌صورت شهودی انتظار می‌رود که مشاهدات حاصل از طرح نمونه‌گیری از مجموعه رتبه‌دار اطلاعاتی بیشتر نسبت به مشاهدات حاصل از طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده داشته باشند و لذا منجر به نتایج بهتر در استنباط آماری شوند.

مک‌اینتایر (۱۹۵۲) ادعا کرد که میانگین نمونه، بر مبنای نمونه استخراج شده از طرح RSS، برآوردگری نااریب برای میانگین جامعه است، اما نتوانست ادعای خود را به‌طور جبری اثبات کند. تاکاهاشی و واکیموتو (۱۹۶۸) اولین کسانی بودند که توانستند به‌طور رسمی ثابت کنند که میانگین نمونه مبتنی بر طرح RSS، برآوردگری نااریب برای میانگین جامعه است و از برآوردگر میانگین بر مبنای نمونه‌گیری تصادفی ساده، کاراتر است. استوکس (۱۹۸۰) برآوردگر واریانس را در طرح RSS پیشنهاد داد و نشان داد که برآورد بهتری نسبت به SRS ارائه می‌دهد و این برآوردگر توسط پرون و سینها (۲۰۰۴) برای حالت چند دوره‌ای بهبود داده شد. همچنین برآورد واریانس برای توزیع نمایی توسط سنگوپتا و موخوتی (۲۰۰۶) پیشنهاد شد. برآورد تابع توزیع توسط استوکس و سیگر (۱۹۸۸) ارائه شد و نشان دادند برآورد تابع توزیع در RSS، به‌طور یکنواخت از برآورد تابع توزیع در SRS بهتر است. بوهن و ولف (۱۹۹۴) و مهدی‌زاده و ارقامی (۲۰۱۰) با استفاده از برآورد تابع توزیع پیشنهادی استوکس و سیگر (۱۹۸۸)، به‌ترتیب آزمون من‌ویتنی–ویلکاکسون و آزمون نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی را پیشنهاد دادند و نشان دادند که آزمون‌های پیشنهادی‌شان به‌طور قابل توجهی از حالت SRS بهتر هستند. فری (۲۰۱۱) به بهبود برآورد میانگین در RSS با کمک متغیر همراه پرداخت. احمدی و زمان‌زاده (۱۳۹۰) به مساله یافتن بازه اطمینان ناپارامتری برای چندک تحت RSS و علیزاده و احمدی (۱۳۹۱) به مساله برآورد بیزی پارامترهای توزیع پارتو تحت RSS پرداختند. ولف (۲۰۰۴) مروری کوتاه اما جامع بر تحقیقات انجام شده در زمینه نمونه‌گیری از مجموعه رتبه‌دار انجام داده است.

در بخش ۲ این مقاله ضمن معرفی برآوردگر جدید میانگین در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل (UBRSS) نشان داده می‌شود این برآوردگر همگرا است. سپس در بخش ۳ در مطالعه‌ای شبیه‌سازی برآوردگر پیشنهادی با برآوردگر استاندارد

میانگین در UBRSS مقایسه خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگر جدید عملکرد بهتری نسبت به برآوردگر استاندارد میانگین دارد. بحث و نتیجه‌گیری نهایی در بخش ۴ ارائه شده است.

۲ برآوردگر میانگین در طرح نمونه‌گیری رتبه‌دار نامتعادل

فرض کنید $\{X_{[i]j}, i = ۱, \ldots, k, j = ۱, \ldots, n_i\}$، نمونهٔ حاصل از UBRSS باشد. در این صورت برآوردگر استاندارد میانگین، در این طرح نمونه‌گیری به‌صورت

$$\hat{\mu}_{RSS} = \frac{۱}{\sum_{i=۱}^{k} I(n_i > ۰)} \sum_{i=۱}^{k} \bar{X}_{[i].} I(n_i > ۰),$$

است، که در آن $\bar{X}_{[i].}$ میانگین مشاهدات با رتبه قضاوتی i و $I(\cdot)$ تابع نشانگر است.

حال فرض کنید آماره‌های $X_{[۱]}, \ldots, X_{[k]}$ به‌طور تصادفی مرتب شده[۶] باشند، یعنی برای هر مقدار t، همواره داشته باشیم

$$F_{[۱]}(t) \geq \cdots \geq F_{[k]}(t) \qquad (۱)$$

که در ان $F_{[i]}(t)$ تابع توزیع آماره قضاوتی iام است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که پذیره فوق، در حالت رتبه‌بندی کامل میان مشاهدات همواره درست است و همچنین بسیاری از حالاتی که رتبه‌بندی میان مشاهدات دقیق و کامل نباشد، مانند مدل‌های رتبه‌بندی خطی و رتبه‌بندی نسبت درستنمایی یکنوا، نیز درست می‌باشد (فلیگنر و مک ایچرن، ۲۰۰۶). حتی اگر رتبه‌بندی میان مشاهدات به‌صورت کاملاً تصادفی انجام شود، در این صورت نامساوی‌های (۱) به تساوی تبدیل می‌شوند، لذا پذیره فوق، پذیره معقولی در عمل می‌باشد. از سویی دیگر می‌توان نشان داد که اگر پذیره (۱) درست باشد، آنگاه برای هر تابع غیر نزولی مانند $\phi(\cdot)$، همواره خواهیم داشت:

$$E_{F_{[۱]}}(\phi(X)) \leq \cdots \leq E_{F_{[k]}}(\phi(X))$$

[۶] Stochastically ordered

در نتیجه

$$\mu_{[1]} \leq \cdots \leq \mu_{[k]} \qquad (2)$$

اگر به‌جای این‌که $\mu_{[i]}$ ها با $\bar{X}_{[i].}$ برآورد شوند، به قسمی برآورد شوند که در نامساوی (۲) صدق کنند، برآوردگر بهتری برای میانگین جامعه به‌دست خواهد آمد. بنابراین، برآوردگر جدید به‌صورت

$$\hat{\mu}_{Iso} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} I(n_i > 0)} \sum_{i=1}^{k} \mu_{[i]}^{Iso} I(n_i > 0),$$

پیشنهاد می‌شود که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر و $\mu_{[i]}^{Iso}$ها، نقاط کمینه کننده مجموع توان‌های دوم موزون $\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{[i].} - \mu_{[i]})^2$، تحت قید $\mu_{[1]} \leq \cdots \leq \mu_{[k]}$ هستند که به برآوردگرهای رگرسیون هم‌توان[7] $\bar{X}_{[1].}, \ldots, \bar{X}_{[k].}$ نیز معروفند. اگر $n_1 = \ldots = n_k$، با استفاده از ویژگی‌های رگرسیون هم‌توان (رابرتسون و همکاران، ۱۹۸۸) ثابت می‌شود که $\hat{\mu}_{RSS} = \hat{\mu}_{Iso}$. بنابراین در این مقاله، تنها به مقایسه برآوردگر پیشنهادی، با برآوردگر استاندارد میانگین، در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل (UBRSS) پرداخته خواهد شد و ثابت می‌شود $\mu_{[i]}^{Iso}$ها از رابطه

$$\mu_{[i]}^{Iso} = \max_{r \leq i} \min_{s \geq i} \sum_{g=r}^{s} \frac{n_g \bar{X}_{[g].}}{\sum_{u=r}^{s} n_u}; \quad i = 1, \ldots, k.$$

به‌دست می‌آیند (رابرتسون و همکاران، ۱۹۸۸).

قضیه ۱ :$\hat{\mu}_{Iso}$ به‌طور قریب به یقین، به سمت μ میل می‌کند.

برهان بنابر قضیه ۲-۲ در بارلو و همکاران (۱۹۷۲)، داریم: $\mu_{[i]}^{Iso} \xrightarrow{a.s} \mu_{[i]} (i = 1, \ldots, k)$. در نتیجه

$$|\hat{\mu}_{Iso} - \mu| = |\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_{[i]}^{Iso} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_{[i]}| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |\mu_{[i]}^{Iso} - \mu_{[i]}| \to 0$$

و برهان کامل است.

---

[7] Isotonic regression

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، با شبیه‌سازی مونت‌کارلو، برآوردگر پیشنهادی با برآوردگر استاندارد میانگین در UBRSS مقایسه می‌شود. برای این منظور به‌ازای $N = ۱۰, k = ۳$ و مقادیر مختلف $(n_۱, n_۲, n_۳)$ و همچنین به‌ازای $N = ۲۰, k = ۵$ و مقادیر مختلف $(n_۱, n_۲, n_۳, n_۴, n_۵)$ تعداد ۱۰۰۰۰۰ نمونه از طرح نمونه‌گیری رتبه‌دار نامتعادل و از توزیع‌های نرمال استاندارد، لگ نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت روی بازه (۱و۰) تولید شده‌اند. علاوه بر این فرض شده است که توزیع آماره قضاوتی iام $(F_{[i]})$، از توریع

$$F_{[i]} = \lambda F_{(i)} + (۱ - \lambda)F, \quad i = ۱, \ldots, k$$

پیروی می‌کند، که د ر آن $F_{(i)}$ تابع توزیع آماره مرتب i ام و F تابع توزیع، توزیع تحت بررسی است. کارایی نسبی $\hat{\mu}_{Iso}$ به $\hat{\mu}_{RSS}$ با کمک شبیه‌سازی و به‌ازای مقادیر $\lambda = ۱$ (رتبه‌بندی کامل)، $\lambda = ۰$ (رتبه‌بندی کاملا تصادفی) و $\lambda = ۰/۵$ تخمین زده شده است. کارایی نسبی $\hat{\mu}_{Iso}$ به $\hat{\mu}_{RSS}$ به‌صورت

$$RE = \frac{MSE(\hat{\mu}_{RSS})}{MSE(\hat{\mu}_{Iso})}$$

تعریف می‌شود.

همان‌طور که از جدول ۱ ملاحظه می‌شود، به‌طور کلی عملکرد $\hat{\mu}_{Iso}$ نسبت به $\hat{\mu}_{RSS}$ بهتر است و با افزایش خطای رتبه‌بندی بهبود پیدا می‌کند. این مطلب به این صورت قابل توجیه است که رابطه (۲) با افزایش خطای رتبه‌بندی بین مشاهدات نیز صحیح است و در نتیجه برآوردگر $\hat{\mu}_{Iso}$ که با استفاده از قید (۱) به‌دست آمده است، نسبت به برآوردگر $\hat{\mu}_{RSS}$ تاثیر کمتری از خطای رتبه‌بندی می‌پذیرد. قسمت اول جدول ۱، برآورد کارایی نسبی $\hat{\mu}_{Iso}$ را به $\hat{\mu}_{RSS}$ به‌ازای $N = ۱۰, k = ۳$ و مقادیر مختلف $(n_۱, n_۲, n_۳)$ و $\lambda = (۰, ۰/۵, ۱)$ نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود $\hat{\mu}_{Iso}$ بهترین عملکرد را در مقایسه با $\hat{\mu}_{RSS}$ در توزیع نرمال و نمایی و به‌ازای $\lambda = ۰$ دارد. علاوه بر این واضح است که با کاهش مقدار λ و افزایش خطا میان رتبه‌بندی مشاهدات، برآوردگر پیشنهادی به‌طور متوسط عملکرد بهتری نسبت

جدول ۱: کارایی نسبی برآوردگر پیشنهادی به برآورد استاندارد میانگین در $UBRSS$

(N,k)	$(n_۱,n_۲,n_۳)$	λ			λ			λ			λ		
		۰	۰/۵	۱	۰	۰/۵	۱	۰	۰/۵	۱	۰	۰/۵	۱
(۱۰,۳)	(۸و۲و۰)	۱/۱۶	۱/۰۵	۱/۰۱	۱/۵۲	۱/۲۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۴	۱/۰۰	۱/۲۲	۱/۱۹	۱/۰۲
	(۰و۲و۸)	۰/۹۰	۰/۹۶	۰/۹۹	۱/۰۲	۱/۱۳	۱/۰۲	۱/۱۸	۱/۰۷	۱/۰۱	۱/۲۲	۱/۱۹	۱/۰۲
	(۲و۸و۰)	۰/۹۰	۰/۹۶	۰/۹۹	۱/۰۲	۱/۰۲	۱/۰۰	۱/۱۸	۱/۰۸	۱/۰۲	۱/۲۲	۱/۰۵	۱/۰۰
	(۰و۸و۲)	۱/۱۶	۱/۰۸	۱/۰۱	۱/۵۲	۱/۱۴	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۸	۱/۰۰	۱/۲۲	۱/۰۵	۱/۰۰
	(۴و۲و۴)	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۰	۱/۰۲	۱/۰۱	۱/۰۲	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۱۰	۱/۰۲	۱/۰۲
	(۲و۴و۴)	۰/۹۴	۰/۹۸	۱/۰۰	۰/۹۵	۱/۰۲	۱/۰۱	۱/۰۸	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۰۵	۱/۰۷	۱/۰۱
	(۴و۴و۲)	۱/۰۷	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۱۶	۱/۱۲	۱/۰۱	۰/۹۶	۰/۹۹	۱/۰۰	۱/۰۵	۱/۰۷	۱/۰۱
	(۲و۶و۲)	۱/۰۱	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۲۰	۱/۱۹	۱/۰۳	۱/۰۶	۱/۰۳	۱/۰۱	۱/۲۱	۱/۲۰	۱/۰۳
	(۶و۲و۲)	۱/۱۳	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۳۱	۱/۱۵	۱/۰۲	۰/۹۴	۰/۹۹	۰/۹۹	۱/۱۱	۱/۰۵	۱/۰۱
	(۲و۲و۶)	۰/۹۱	۰/۹۷	۱/۰۰	۰/۹۷	۰/۹۹	۱/۰۰	۱/۱۶	۱/۰۵	۱/۰۰	۱/۱۱	۱/۰۵	۱/۰۱
	(۳و۱و۶)	۰/۹۶	۰/۹۹	۱/۰۰	۱/۴۴	۱/۲۲	۱/۰۸	۱/۲۴	۱/۰۹	۱/۰۰	۱/۵۲	۱/۲۵	۱/۱۲
	(۶و۳و۱)	۱/۲۴	۱/۱۱	۱/۰۲	۱/۶۱	۱/۴۹	۱/۰۵	۰/۹۵	۰/۹۹	۰/۹۹	۱/۱۶	۱/۲۱	۱/۰۶
	(۱و۶و۳)	۰/۹۲	۰/۹۵	۰/۹۹	۱/۰۹	۱/۱۴	۱/۰۶	۱/۱۶	۱/۱۰	۱/۰۳	۱/۳۲	۱/۳۳	۱/۰۹
	(۳و۶و۱)	۱/۱۵	۱/۰۹	۱/۰۲	۱/۶۸	۱/۵۳	۱/۰۶	۱/۰۵	۱/۰۳	۰/۹۹	۱/۳۳	۱/۳۳	۱/۰۹
	(۶و۱و۳)	۱/۱۰	۱/۰۳	۱/۰۱	۱/۶۸	۱/۳۲	۱/۱۴	۱/۰۷	۱/۰۷	۱/۰۰	۱/۵۲	۱/۲۶	۱/۱۲
	میانگین	۱/۰۴	۱/۰۲	۱/۰۰	۱/۲۸	۱/۱۸	۱/۰۳	۱/۰۷	۱/۰۴	۱/۰۰	۱/۲۲	۱/۱۵	۱/۰۴
	$(n_۱,n_۲,n_۳,n_۴,n_۵)$												
(۲۰,۵)	(۴و۸و۸و۰و۰)	۰/۹۶	۰/۹۹	۱/۰۰	۰/۹۸	۰/۹۸	۱/۰۰	۱/۰۹	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۰۵	۰/۹۷	۱/۰۰
	(۰و۰و۴و۸و۸)	۰/۹۶	۰/۹۸	۱/۰۰	۰/۹۸	۱/۰۶	۱/۰۰	۱/۰۹	۱/۰۳	۱/۰۰	۱/۰۵	۱/۰۷	۱/۰۰
	(۰و۸و۸و۴و۰)	۱/۰۵	۱/۰۲	۱/۰۰	۱/۱۴	۱/۰۴	۰/۹۹	۰/۹۴	۰/۹۷	۱/۰۰	۱/۰۵	۱/۰۶	۱/۰۱
	(۰و۸و۸و۴و۰)	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۰	۱/۰۵	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۱۰	۱/۰۵	۱/۰۲
	(۴و۲و۸و۴و۲)	۱/۰۴	۱/۰۲	۱/۰۰	۱/۳۰	۱/۲۲	۱/۰۳	۱/۰۰	۰/۹۹	۱/۰۰	۱/۲۳	۱/۱۹	۱/۰۴
	(۲و۴و۸و۲و۴)	۰/۹۷	۰/۹۹	۱/۰۰	۱/۱۶	۱/۱۶	۱/۰۳	۱/۰۹	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۲۳	۱/۱۹	۱/۰۴
	(۲و۲و۴و۴و۸)	۰/۹۰	۰/۹۷	۱/۰۰	۰/۹۱	۰/۹۸	۱/۰۱	۱/۲۲	۱/۰۷	۱/۰۱	۱/۰۴	۱/۰۶	۱/۰۱
	(۸و۴و۴و۲و۲)	۱/۱۳	۱/۰۴	۱/۰۰	۱/۲۲	۱/۱۶	۱/۰۱	۰/۸۶	۰/۹۵	۰/۹۹	۱/۰۴	۱/۰۶	۱/۰۱
	(۲و۲و۲و۷و۷)	۰/۹۰	۰/۹۷	۱/۰۰	۰/۹۶	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۲۵	۱/۰۸	۱/۰۱	۱/۱۱	۱/۰۷	۱/۰۲
	(۷و۷و۲و۲و۲)	۱/۱۴	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۳۱	۱/۲۱	۱/۰۳	۰/۸۷	۰/۹۶	۰/۹۹	۱/۱۰	۱/۰۸	۱/۰۲
	(۲و۲و۷و۷و۲)	۰/۹۷	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۹	۱/۱۷	۱/۰۲	۱/۱۲	۱/۰۳	۱/۰۱	۱/۲۷	۱/۲۴	۱/۰۴
	(۲و۷و۷و۲و۲)	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۳۴	۱/۲۹	۱/۰۴	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۱	۱/۲۸	۱/۲۴	۱/۰۴
	(۲و۷و۲و۷و۲)	۱/۰۱	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۳۴	۱/۲۸	۱/۰۵	۱/۰۶	۱/۰۳	۱/۰۱	۱/۳۴	۱/۳۱	۱/۰۷
	(۷و۲و۲و۲و۷)	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۳۷	۱/۰۸	۱/۰۳	۱/۰۵	۱/۰۴	۱/۰۰	۱/۳۷	۱/۰۸	۱/۰۲
	(۲و۲و۷و۲و۷)	۰/۹۲	۰/۹۷	۱/۰۰	۱/۰۹	۱/۱۰	۱/۰۲	۱/۲۰	۱/۰۷	۱/۰۱	۱/۲۲	۱/۱۹	۱/۰۵
	میانگین	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۶	۱/۱۲	۱/۰۲	۱/۰۶	۱/۰۲	۱/۰۰	۱/۱۷	۱/۱۲	۱/۰۳

به برآوردگر تجربی میانگین پیدا می‌کند. اما در توزیع یکنواخت، دو برآوردگر تقریبا عملکردی یکسان دارند.

قسمت دوم جدول یک، برآورد کارایی نسبی $\hat{\mu}_{Iso}$ را به $\hat{\mu}_{RSS}$ به‌ازای $(N = ۲۰, k = ۵)$ و مقادیر مختلف $(n_۱, n_۲, n_۳, n_۴, n_۵)$ و $\lambda = (۰, ۰/۵, ۱)$ نشان می‌دهد. نتایج این قسمت تقریبا مشابه قسمت اول جدول یک است، تنها با این تفاوت که با افزایش حجم نمونه عملکرد دو برآوردگر به یکدیگر نزدیک‌تر شده است. بهترین عملکرد را برآوردگر پیشنهادی در مقایسه با برآورد تجربی در UBRSS در توزیع نرمال و نمایی و به‌ازای $\lambda = ۰$ دارد. همچنین از این قسمت جدول مشخص است که با کاهش مقدار λ، کارایی نسبی $\hat{\mu}_{Iso}$ نسبت به $\hat{\mu}_{RSS}$ به‌طور متوسط افزایش پیدا می‌کند. علاوه بر این در توزیع یکنواخت، دو برآوردگر تقریباً عملکردی یکسانی دارند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردگری جدید برای میانگین جامعه در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نامتعادل (UBRSS) معرفی شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که این برآوردگر، در بسیاری از موارد، عملکرد بهتری نسبت به برآوردگر تجربی در UBRSS دارد. علاوه بر این برآوردگر پیشنهادی نسبت به برآوردگر تجربی، تاثیرپذیری کمتری نسبت به خطای رتبه‌بندی در مشاهدات دارد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده در این مقاله شده است، کمال تشکر و سپاسگذاری را دارند.

مراجع

احمدی، ج.، زمان‌زاده، الف. (۱۳۹۰)، بازه اطمینان ناپارامتری با ضریب اطمینان دقیق برای چندک‌های جامعه بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مجله علوم آماری، **۵**، ۲۳-۳۹.

علیزاده نوقابی، ر.، احمدی، ج. (۱۳۹۱) برآورد بیزی پارامتر توزیع پارتو تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مجله علوم آماری، **۶**، ۲۰۱-۲۱۸.

Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972), *Statistical Inference Under Order Restrictions*, John Wiley, New York.

Bohn, L. L. and Wolfe, D. A. (1994), The Effect of Imperfect Judgment Rankings on Properties of Procedures Basedon the Ranked-Set Samples Analog of the Mann-Whitney-Wilcoxon Statistic, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 168-176.

Fligner, M. A. and MacEachern, S. N. (2006), Nonparametric Two-Sample Methods for Ranked-Set Sample Data, *Journal of the American Statistical Association*, **101**, 1107-1118.

Frey, J. (2011), A Note on Ranked-Set Sampling Using a Covariate, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 809-816.

Mahdizadeh, M. and Arghami, N. R. (2010), Efficiency of Ranked Set Sampling in Entropy Estimation and Goodness of Fit Testing for the Inverse Gaussian Law, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 761-774.

McIntyre, G. A. (1952), A Method for Unbiased Selective Sampling Using Ranked Set Sampling, *Australian Journal of Agricultural Research*, **3**, 385-390.

Perron, F. and Sinha, B. K. (2004), Estimation of Variance Based on a Ranked Set Sample, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **102**, 21-28.

Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L. (1988), *Order-Restricted Inferences*, John Wiley, New York.

Stokes, S. L. (1980), Estimation of Variance Using Judgment Ordered Ranked Set Samples, *Biometrics*, **36**, 35-42

Stokes, S. L. and Sager, T. W. (1988), Characterization of a Ranked Set Sample with Application to Estimating Distribution Function, *Journal of the American Statistical Association* , **83**, 374-381.

Sengupta, S. and Mukhuti, S. (2006), Unbiased Variance Estimation in a Simple Exponential Population Using Ranked Set Samples, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 1526-1553.

Takahasi, K. and Wakimoto, K. (1968), On Unbiased Estimation of the Population Mean Based on the Sample Stratified by Means of Ordering, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **21**, 249-255.

Wolfe, D. A. (2004), Ranked Set Sampling; An Approach to More Efficient Data Collection, *Statistical Science*, **19**, 636-643.