

برآورد پارامتر قابلیت اطمینان با تابع مفصل برای مولفه‌های دارای توزیع نمایی تعمیم‌یافته

محمد نصیری فر، محمدرضا آخوند، محمدرضا زادکرمی

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۸/۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۸/۲۵

چکیده: پارامتر قابلیت اطمینان برای اکثر خانواده توزیع‌های حاشیه‌ای با فرض استقلال بین دو مؤلفه قدرت و تحمل برآورد شده است، اما متأسفانه کم‌تر در مورد دو مؤلفه بهم وابسته بحث شده است. به تازگی روشی مبتنی بر تابع مفصل برای برآورد پارامتر قابلیت اطمینان تحت فرض وجود همبستگی بین مولفه‌های قدرت و تحمل ارائه شده است. در این مقاله از این روش برای برآورد پارامتر قابلیت اطمینان وقتی توزیع مؤلفه‌ها نمایی تعمیم‌یافته باشد استفاده شده است. برای این منظور توابع مفصل فارلی - گامبل - مورگنسترن، فارلی - گامبل - مورگنسترن تعمیم‌یافته و فرانک به کار گرفته شده است. سپس مطالعه‌ای شبیه‌سازی به منظور نشان دادن تناسب برآوردهای بدست آمده انجام شده است. در پایان پارامتر قابلیت اطمینان برای داده‌های توزیع نسبی جمعیت برحسب گروه‌های عمده سنی به تفکیک مناطق شهری و روستایی ایران در سال ۱۳۹۰ برآورد شده است.

واژه‌های کلیدی: پارامتر قابلیت اطمینان، مفصل فرانک، مفصل فارلی - گامبل - مورگنسترن، مفصل فارلی - گامبل - مورگنسترن تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

مطالعات فراوانی در مورد مدل‌های قدرت-تحمل^۱ انجام شده است، این مدل شامل دو متغیر تصادفی X و Y است و پارامتر موردها $R = P(Y < X)$ می‌باشد. به طور طبیعی X را می‌توان به عنوان قدرت

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمدرضا آخوند، Mr. Akhoond@Scu.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N02, 62N05, 62F10

¹Stress-strength reliability model

یک ساختار و Y را به عنوان تحمل آن در نظر گرفت. به احتمال R پارامتر قابلیت اطمینان گفته می‌شود. تمرکز در مدل‌های قدرت-تحمل بر روی ارزیابی R است.

مدل‌های مدل‌های قدرت-تحمل ابتدا فقط در علوم مهندسی و فیزیک کاربرد داشتند اما با گذشت زمان در بسیاری از علوم دیگر جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده و مورد استفاده قرار گرفتند. تا اواخر دهه ۸۰ برآورد R برای اکثر خانواده توزیع‌های معمول آماری برای حالتی که X و Y مستقل از هم باشند، به دست آمد. به عنوان مثال می‌توان به کارهای اواد و گراف (۱۹۸۶)، کنستانتین و همکاران (۱۹۸۶)، اسماعیل و همکاران (۱۹۸۶)، ایواز (۱۹۸۷)، ریزر و گاتمن (۱۹۸۶) و وینو و همکاران (۱۹۸۴) اشاره کرد. همه موارد ذکر شده با تکیه بر فرض استقلال قدرت و تحمل به دست آورده شده‌اند. با این حال توجه کمتری به ارزیابی R در زمینه‌های واقعی‌تر که X و Y وابسته هستند، شده است.

در بسیاری از شرایط واقعی بین X و Y یک وابستگی وجود دارد. تلاش‌هایی برای ارزیابی R با در نظر گرفتن رابطه بین X و Y با فرض یک توزیع دو متغیره از قدرت و تحمل انجام شده است. به عنوان مثال: نرمال دو متغیره (گوپتا و سویرامانین، ۱۹۹۸)، پارتو دو متغیره (هنگال، ۱۹۹۷؛ جیواناند ۱۹۹۷)، نمایی دو متغیره (ناداراجه و کوتز، ۲۰۰۶)، بتای دو متغیره (ناداراجه، ۲۰۰۵)، گامای دو متغیره (ناداراجه، ۲۰۰۴) و لگ نرمال دو متغیره (گوپتا و همکاران، ۲۰۱۲).

با این حال، نقطه ضعف این روش‌ها این است که توزیع چند متغیره اغلب یک‌شکل خاص از وابستگی بین حاشیه‌ها را در نظر می‌گیرد و اینکه توزیع‌های حاشیه‌ای آن‌ها از یک نوع هستند. برای رفع این نقطه ضعف‌ها دوما و جوردانو (۲۰۱۳) روشی جدید برای ارزیابی R ارائه دادند، که در آن از تابع مفصل به منظور به دست آوردن توزیع توأم مؤلفه‌های X و Y تحت فرض عدم استقلال این مؤلفه‌ها استفاده می‌شود. آنها R را با مفصل‌های فارلی-گامبل - مورگنسترن^۲ (FGM)، تعمیم یافته فارلی-گامبل - مورگنسترن^۳ (GFGM) و فرانک به دست آوردند که با مفصل‌های FGM و GFGM پارامتر قابلیت اطمینان شکل بسته ریاضی خواهد داشت، اما با مفصل فرانک شکل بسته ریاضی ندارد و باید بر اساس روش‌های عددی محاسبه شود.

در این مطالعه پارامتر قابلیت اطمینان را با در نظر گرفتن توزیع متغیرهای حاشیه‌ای به صورت نمایی تعمیم یافته بر اساس روش پیشنهادی دوما و جوردانو (۲۰۱۳) برآورد می‌شود. توزیع نمایی تعمیم یافته دارای تابع چگالی تک مدی چوله به راست است و تابع خطر یکنواختی مشابه با توزیع وایبل و گاما دارد. این توزیع برای تحلیل داده‌های طول عمر همانند توزیع‌های وایبل، گاما و لگ نرمال مفید است.

²Farlie-Gumbel-Morgenstern

³Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern

در بخش ۲ نمادها و یک مرور کوتاه بر تابع مفصل ارائه خواهد شد. در بخش ۳ روش تابع مفصل را برای برآورد R تحت فرض وجود وابستگی بین مؤلفه‌ها بر اساس سه مفصل FGM، GFGM و فرانک معرفی خواهیم کرد. در بخش ۴ نتایج مربوط به شبیه‌سازی با مفصل FGM، GFGM و فرانک ارائه خواهد شد. در بخش ۵ نیز یک مثال عددی بر اساس داده‌های واقعی ارائه می‌شود و در آخر به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته خواهد شد.

۲ تابع مفصل

بنابر قضیه اسکالر (۱۹۵۹) یک مفصل دو بُعدی تابعی همانند C است که از مجموعه $[0, 1]^2$ به بازه یکتای $[0, 1]$ رفته و در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف. برای هر $u, v \leq 1, 0 \leq$

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0, C(u, 1) = u, C(1, v) = v$$

ب. برای هر u_1, u_2, v_1, v_2 که $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$ و $0 \leq v_1 < v_2 \leq 1$ باشد:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

بنابراین مفصل دو بُعدی $C(., .)$ یک توزیع دو متغیره از $[0, 1]^2$ با حاشیه‌ای‌های یکنواخت $U(0, 1)$ بر بازه $[0, 1]$ است. در حقیقت بر اساس قضیه اسکالر (۱۹۵۹) هر توزیع دو متغیره $H(x, y)$ از متغیرهای X و Y با تابع حاشیه‌ای‌های $F(x)$ و $G(y)$ را می‌توان به صورت $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ نوشت که در آن C تابع مفصل است؛ بنابراین هر مفصل، همراه با توابع حاشیه‌ای، به ما اجازه می‌دهد تا ساختار توزیع توأم را به دست آوریم. تابع چگالی توأم نیز بر اساس تابع مفصل به صورت

$$h(x, y) = c(F(x), G(y)) f(x) g(y)$$

قابل محاسبه است که در آن $c(F(x), G(y)) = \frac{\partial^2 C(F(x), G(y))}{\partial F(x) \partial G(y)}$ چگالی مفصل، $f(x)$ و $g(y)$ نیز چگالی‌های حاشیه‌ای هستند.

۳ برآورد R تحت مؤلفه‌های وابسته با تابع مفصل

دوما و جوردانو (۲۰۱۳) باهدف بررسی نقش وابستگی میان مؤلفه‌ها بر مدل‌های قدرت-تحمل، قابلیت اطمینان را تحت یک توزیع دومتغیره که با تابع مفصل به دست می‌آید، بررسی کردند. لازم به ذکر است که بر اساس این روش هیچ لزومی بر یکسان بودن توزیع‌های حاشیه‌ای وجود ندارد. اندازه R برای X و Y وابسته به صورت

$$R = P(Y < X) = \int_0^{\infty} \int_0^x h(x, y) dy dx = \int_0^{\infty} \int_0^x f(x)g(y)c(F(x), G(y)) dy dx \quad (۱)$$

است.

۱.۳ برآورد R با تابع مفصل FGM

تابع مفصل FGM نخستین بار توسط مورگنسترن (۱۹۵۶) به صورت

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 (1 + \theta (1 - u_1) (1 - u_2)), -1 \leq \theta \leq 1$$

با چگالی مفصل

$$c(u_1, u_2) = 1 + \theta (1 - 2u_1)(1 - 2u_2)$$

معرفی شد. در حالتی که متغیرها از هم مستقل باشند، $\theta = 0$ خواهد بود. در میان معیارهای همبستگی برای این تابع مفصل، τ کندال برابر $\frac{2\theta}{9}$ و ρ اسپرمن برابر $\frac{\theta}{3}$ است. این تابع مفصل به دلیل دارا بودن فرم ساده و مناسب، در عمل کاربرد فراوانی دارد، اما این مفصل فقط برای وابستگی‌های ضعیف مناسب است به‌گونه‌ای که ضریب ρ اسپرمن و τ کندال برای این مفصل به ترتیب از ۰.۳۳ و ۰.۲۲ تجاوز نمی‌کنند. با جایگذاری مفصل FGM در رابطه (۱) داریم:

$$R = P(Y < X) = \int_0^{\infty} \int_0^x f(x)g(y)c(F(x), G(y)) dy dx$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^x f(x)g(y) dy dx + \theta \int_0^{\infty} \int_0^x (1 - F(x))(1 - G(y))f(x)g(y)dydx.$$

همچنین R را می‌توان به صورت ترکیب خطی

$$R = R_I + \theta D \tag{۲}$$

نوشت، که در آن

$$R_I = \int_0^{\infty} \int_0^x f(x)g(y)dydx \tag{۳}$$

نشان‌دهنده قابلیت اطمینان برای مؤلفه‌های قدرت و تحمل مستقل ($\theta = 0$) و

$$D = \int_0^{\infty} \int_0^x (1 - F(x))(1 - G(y)) f(x) g(y) dydx \tag{۴}$$

نشان‌دهنده سهم وابستگی مؤلفه‌ها، در صورت وجود، بر R است. رابطه (۲) که از این پس $-R$ خطی نامیده می‌شود، ویژگی منحصر به فرد این خانواده است، به این معنی که فقط برای FGM و تعمیم‌های آن برقرار است (دوما و جوردانو، ۲۰۱۳).

توزیع سه پارامتری نمایی تعمیم‌یافته (GE) دارای تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = (1 - \exp(-\lambda(x - \mu)))^\alpha ; x > \mu, \lambda, \alpha > 0$$

و تابع چگالی

$$f(x) = \alpha \lambda (1 - \exp(-\lambda(x - \mu)))^{\alpha-1} \exp(-\lambda(x - \mu)); x > \mu, \lambda, \alpha > 0$$

است، که در آن α, μ و λ به ترتیب پارامترهای شکل، مکان و مقیاس توزیع هستند. از این به بعد توزیع نمایی تعمیم‌یافته با $GE(\alpha, \lambda, \mu)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید $X \sim GE(\alpha, \lambda, 0)$ و

۵۲۰ برآورد پارامتر قابلیت اطمینان با تابع مفصل

$F(x) = (1 - \exp(-\lambda x))^\alpha$ به ترتیب به صورت Y و X توزیع تابع $Y \sim GE(\beta, \lambda, \circ)$ بنابراین $G(y) = (1 - \exp(-\lambda y))^\beta$ خواهند بود. بنابراین

$$R_I = \int_0^\infty \int_0^x f(x)g(y)dydx = \int_0^\infty f(x) G(x) dx = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (5)$$

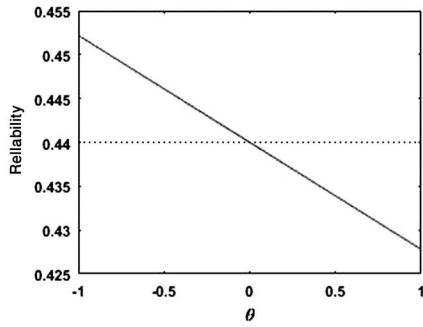
و

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\infty \int_0^x (1 - 2F(x))(1 - 2G(y)) f(x) g(y) dy dx \\ &= \int_0^\infty (1 - 2F(x))(G(x) - G^2(x)) f(x) dx \\ &= \alpha \frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\alpha + 2\beta} - \frac{2}{2\alpha + b}. \end{aligned}$$

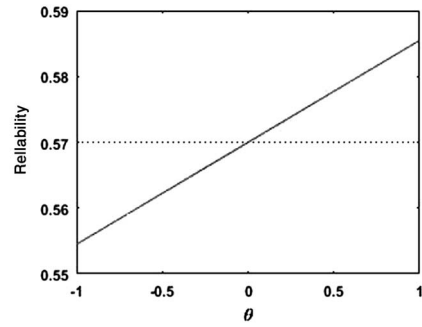
در نتیجه

$$R = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \theta \alpha \left[\frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\alpha + 2\beta} - \frac{2}{2\alpha + b} \right]$$

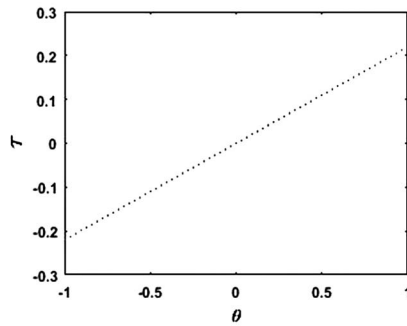
همان طور که ملاحظه می شود، R -خطی تابعی از پارامترهای حاشیه ای است و تعیین علامت وزن وابستگی بین دو مؤلفه بر R ، به پارامترهای حاشیه ای بستگی دارد. در شکل ۱ به ازای دو ترکیب دلخواه از پارامترهای حاشیه ای، R -خطی رسم شده است. در نمودار الف در صورتی که X و Y از هم مستقل باشند، پارامتر قابلیت اطمینان برابر ۰/۵۷ خواهد بود و در صورت وجود رابطه مثبت بین این دو مؤلفه، در بیشترین حالت R به ۰/۵۸۵ خواهد رسید و در صورت منفی بودن این رابطه نیز برآورد R در کمترین مقدار به ۰/۵۵۴ کاهش خواهد یافت. R -خطی مادامی که $\alpha \geq \beta$ باشد، صعودی و در صورتی که $\alpha < \beta$ باشد، نزولی خواهد بود. نمودار ج نیز نشان دهنده τ کندال است. تمامی نمودارها در بازه مجاز [۱، ۰] رسم شده اند. پارامتر مقیاس توزیعها (λ) تأثیری بر R -خطی ندارد.



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۱: نمودار پارامتر قابلیت اطمینان به ازای الف- $\alpha = 4$ ، $\beta = 3$ ب- $\alpha = 4$ ، $\beta = 5$ (خط ممتد R و خط چین R_I) ج- نمودار τ کندال

۲.۳ برآورد R با مفصل GFGM

چون مفصل FGM برای وابستگی ضعیف مناسب است. تعدادی از نویسندگان با افزودن پارامتر به این مفصل سعی در حل این مشکل داشته‌اند. یکی فرم‌های گسترش یافته FGM که توسط بایرامو و همکاران (۲۰۰۱) ارائه شد و با GFGM نشان داده می‌شود به صورت

$$C(u, v) = uv [\lambda + \theta(1 - u^{m_1})^{p_1} (1 - v^{m_2})^{p_2}]$$

است، که در آن تمام پارامترها مثبت و محدوده مجاز θ بین $\theta_l \leq \theta \leq \theta_u$ است به طوری که

$$\theta_l = -\min\left\{1, \frac{1}{m_1 m_2} \left(\frac{1 + m_1 p_1}{m_1(p_1 - 1)}\right)^{(p_1-1)} \left(\frac{1 + m_2 p_2}{m_2(p_2 - 1)}\right)^{(p_2-1)}\right\},$$

$$\theta_u = \min\left\{\frac{1}{m_1} \left(\frac{1 + m_1 p_1}{m_1(p_1 - 1)}\right)^{(p_1-1)}, \frac{1}{m_2} \left(\frac{1 + m_2 p_2}{m_2(p_2 - 1)}\right)^{(p_2-1)}\right\}.$$

در صورتی که تمامی پارامترهای m_1, m_2, p_1 و p_2 برابر یک باشند، تبدیل به حالت اصلی FGM خواهد شد. تابع چگالی مفصل GFGM به صورت

$$c(u, v) = 1 + \theta [1 - u^{m_1}]^{(p_1-1)} [1 - (1 + m_1 p_1) u^{m_1}] \\ \times [1 - v^{m_2}]^{(p_2-1)} [1 - (1 + m_2 p_2) v^{m_2}]$$

است. از میان معیارهای همبستگی τ کندال آن به صورت

$$\tau = \frac{1 + \theta p_1 p_2}{(2 + m_1 p_1)(2 + m_2 p_2)} B\left(\frac{2}{m_1}, p_1\right) B\left(\frac{2}{m_2}, p_2\right)$$

است، که در آن $B(\cdot, \cdot)$ تابع بتا است. دوما و جوردانو (۲۰۱۳) نشان دادند اگر p_1 و p_2 عدد صحیح باشند، آنگاه

$$c(F(x), G(y)) = 1 + \theta \sum_{i=0}^{p_1-1} \sum_{j=0}^{p_2-1} \binom{p_1-1}{i} \binom{p_2-1}{j} \times (-1)^{i+j} F(x)^{m_1 i} G(y)^{m_2 j} \\ \times [1 - (1 + m_1 p_1) F(x)^{m_1}] [1 - (1 + m_2 p_2) G(y)^{m_2}]$$

چون R -خطی برای تمام خانواده FGM برقرار است، بنابراین $R = R_I + \theta D$ ، که در آن R_I در رابطه (۳) معرفی شد و

$$D = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{p_1-1} (-1)^i \binom{p_1-1}{i} F(x)^{m_1 i} [1 - (1 + m_1 p_1) F(x)^{m_1}] f(x) J(x) dx,$$

که در آن

$$J(x) = \sum_{j=0}^{p_2-1} \binom{p_2-1}{j} (-1)^j \int_0^x G(y)^{m_2 j} [\lambda - (\lambda + m_2 p_2) G(y)^{m_2}] g(y) dy.$$

بعد از انجام عملیات جبری داریم:

$$D = \sum_{i=0}^{p_1-1} \sum_{j=0}^{p_2-1} (-1)^{(i+j)} \binom{p_1-1}{i} \binom{p_2-1}{j} [I(i, j) - (\lambda + m_2 p_2) I(i, j+1) - (\lambda + m_1 p_1) I(i+1, j) + (\lambda + m_1 p_1)(\lambda + m_2 p_2) I(i+1, j+1)] \quad (6)$$

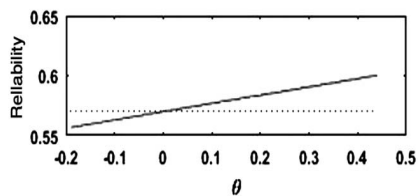
که در آن

$$I(r, s) = \frac{\lambda}{m_2 s + \lambda} \int_0^{\infty} F(x)^{m_1 r} G(x)^{m_2 s + \lambda} f(x) dx. \quad (7)$$

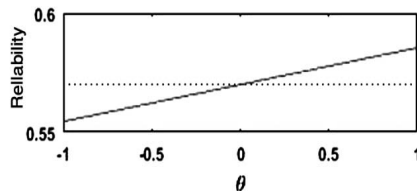
با جایگذاری توابع چگالی و توزیع بیان شده در رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I(r, s) &= \frac{\lambda}{m_2 s + \lambda} \int_0^{\infty} F(x)^{m_1 r} G(x)^{m_2 s + \lambda} f(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{m_2 s + \lambda} \int_0^{\infty} (1 - \exp(-\lambda x))^{(m_1 r + 1)\alpha + (m_2 s + 1)\beta - 1} \lambda \exp(-\lambda x) dx \\ &= \frac{\alpha}{(m_2 s + 1)[(m_1 r + 1)\alpha + (m_2 s + 1)\beta]} \end{aligned}$$

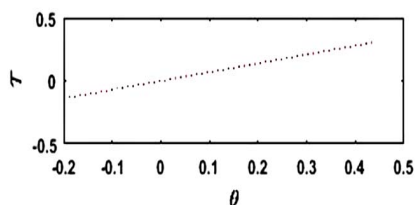
که با توجه به رابطه (۶)، R -خطی به صورت $R = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \theta D$ حاصل خواهد شد. شکل ۲ نشان دهنده R -خطی و τ کندال به ازای ترکیب‌های دلخواهی از پارامترهای حاشیه‌ای و مفصل در بازه مجاز θ است. در نمودارهای ۲-الف و ب پارامترهای حاشیه‌ای یکسان انتخاب شده و پارامترهای مفصل در نمودار ۲-ب به گونه‌ای انتخاب شده که مفصل GFGM به مفصل FGM، تبدیل و قابل مقایسه باشند. همانطور که



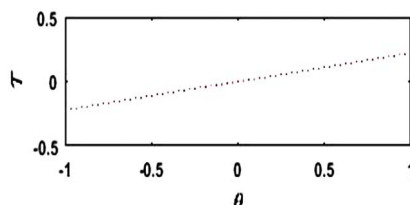
(ب)



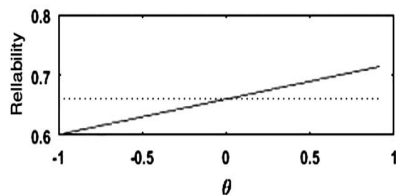
(الف)



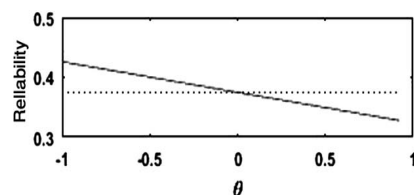
(د)



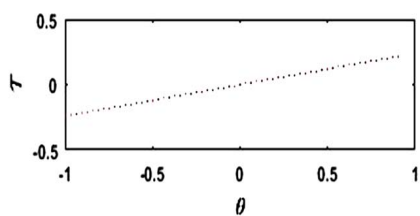
(ج)



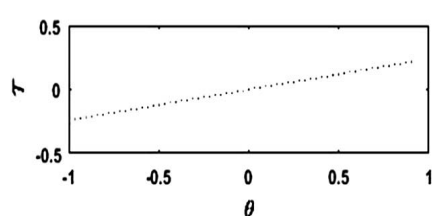
(و)



(ه)



(ح)



(ز)

شکل ۲: نمودارهای R (خط ممتد)، و R_I (خط چین) و τ کندال الف و ج- به ازای $\beta = 3, \alpha = 4$ ،
 ب و د- به ازای $\beta = 3, \alpha = 4$ ، $p_1 = p_2 = 2, m_1 = m_2 = 5$ ،
 ه و ز- به ازای $\beta = 3, \alpha = 6$ ، $m_1 = 3, m_2 = 2, p_1 = 3, p_2 = 2$ ،
 واو و ح- به ازای $p_2 = 2, p_1 = 3, m_2 = 2, m_1 = 3, \beta = 5, \alpha = 3$

در شکل ۲-ب ملاحظه می‌شود، در صورت مثبت بودن رابطه X و Y ، برآورد پارامتر قابلیت اطمینان در بزرگ‌ترین مقدار خود ($\theta = 1$) برابر ۰/۵۸۵ خواهد بود، اما اگر از مفصل GFGM برای برآورد R استفاده شود (شکل ۲-الف) این مقدار به ۰/۶۰۰ (به ازای $\theta = 0/44$) افزایش خواهد یافت و بلعکس در صورتی که رابطه بین این دو مؤلفه منفی باشد، در شکل ۲-ب پارامتر قابلیت اطمینان در کمترین مقدار خود (به ازای $\theta = -1$) برابر ۰/۵۵۴ خواهد بود، در حالی که در شکل ۲-الف پارامتر قابلیت اطمینان در کمترین مقدار خود (به ازای $\theta = -0/19$) برابر ۰/۵۵۶ خواهد بود.

برای مشاهده نقش هریک از پارامترهای حاشیه‌ای بر میزان انحراف از فرضیه استقلال مؤلفه‌های X و Y از شکل ۳ استفاده می‌شود. روند تغییرات نمودار $\Delta_u = R_u - R_l$ مقدار R به ازای θ ماکسیمم) با تغییرات نمودار τ_u (مقدار τ کندال به ازای θ ماکسیمم) یکسان است، به این معنی که در صورت افزایش نمودار τ_u نمودار Δ_u نیز افزایش خواهد یافت.

۳.۳ برآورد R با مفصل فرانک

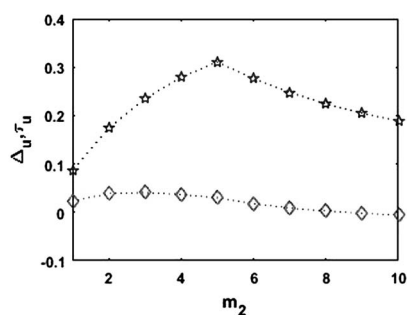
خانواده مفصل FGM علی‌رغم اینکه دارای فرم ساده‌ای هستند، اما تنها برای وابستگی کم مناسب هستند. به این منظور یکی از معروف‌ترین توابع مفصل به نام فرانک معرفی می‌شود که برخلاف مفصل FGM اجازه می‌دهد تا τ کندال در بازه $[-1, 1]$ قرار گیرد. مفصل فرانک به چند دلیل محبوبیت و کاربرد بیشتری پیدا کرده است. اول اینکه برخلاف بعضی از توابع مفصل دیگر اجازه می‌دهد تا بتوان یک رابطه منفی را بین حاشیه‌ای‌ها در نظر گرفت. دومین دلیل وابستگی متقارن در هر دو دم^۴ آن، همانند مفاصل گوسی و t - استیودنت^۵ است. سوم اینکه یک حالت جامع دارد، به این معنا که طیف وسیعی از وابستگی‌ها را شامل می‌شود. در نتیجه مفصل فرانک برای مدل‌هایی با وابستگی قوی مثبت یا منفی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. با این حال، مطالعات شبیه‌سازی حاکی از آن است که وابستگی در دم‌های مفصل فرانک در مقایسه با مفصل گوسی، تمایل به ارتباط ضعیف‌تری دارد و بیشترین وابستگی متمرکز در میانه توزیع است. در نتیجه مفصل فرانک برای داده‌هایی که وابستگی ضعیف در دم‌ها دارند، مناسب‌تر است.

تابع مفصل فرانک به صورت

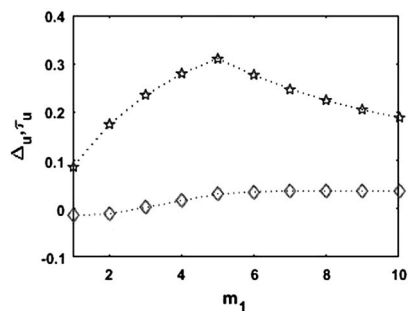
$$C(u, v) = -\theta^{-1} \log \left\{ 1 - \frac{(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}} \right\}$$

⁴tail

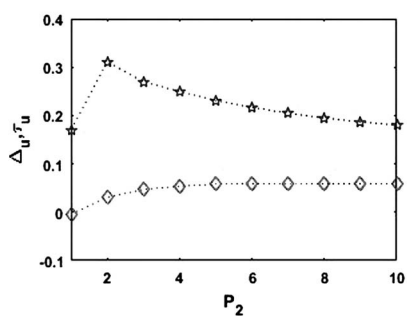
⁵Student's t-copula



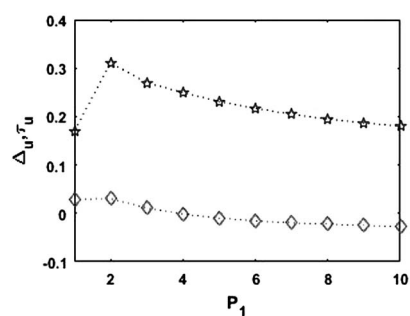
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۳: نمودار الف- m_1 متغیر و $\alpha = 4, \beta = 3, m_2 = 5, p_1 = p_2 = 2$ ، ب- m_2 متغیر و $\alpha = 4, \beta = 3, m_1 = 5, p_1 = p_2 = 2$ ، ج- p_1 متغیر و $\alpha = 4, \beta = 3, m_1 = m_2 = 5, p_1 = p_2 = 2$ ، د- p_2 متغیر و $\alpha = 4, \beta = 3, m_1 = m_2 = 5, p_1 = 2$ (مربع نشان دهنده Δ و ستاره نشان دهنده τ -کندال)

است، که در آن $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. تابع چگالی مفصل فرانک به صورت

$$c(u, v) = \frac{\theta(1 - e^{-\theta}) e^{-\theta(u+v)}}{[1 - e^{-\theta} - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})]^2}$$

با τ کندال $\tau = 1 - \frac{\gamma}{\theta}(1 - Deb_1(\theta))$ است، که در آن

$$Deb_n(\theta) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} \frac{t^n}{e^t - 1} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

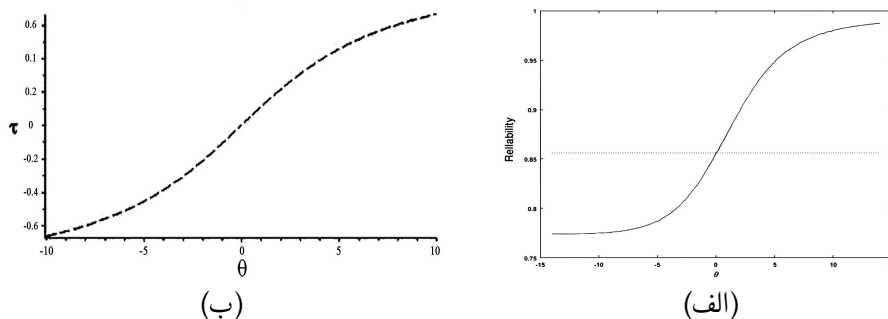
همچنین ρ اسپرمن آن به صورت $\rho_{\theta} = 1 - \frac{\gamma}{\theta}(Deb_1(\theta) - Deb_2(\theta))$ تعریف می‌شود. فرض کنید تابع توزیع X و Y به ترتیب برابر $F(x) = (1 - \exp(-\lambda x))^{\alpha}$ و $G(y) = (1 - \exp(-vy))^{\beta}$ باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} \int_0^x \frac{\theta(1 - e^{-\theta})e^{-\theta(F(x)+G(y))} f(x)g(y)}{(1 - e^{-\theta} - (1 - e^{-\theta F(x)})(1 - e^{-\theta G(y)}))^2} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^x \frac{z \exp(-\theta((1 - \exp(-\lambda x))^{\alpha} + (1 - \exp(-vy))^{\beta}))}{(1 - \exp(-\theta) - (1 - \exp(-\theta(1 - \exp(-\lambda x))^{\alpha})))} \\ &\quad \times \frac{\exp(-\lambda x - vy)(1 - \exp(-\lambda x))^{\alpha-1}(1 - \exp(-vy))^{\beta-1}}{(1 - \exp(-\theta(1 - \exp(-vy))^{\beta})))^2} dy dx \quad (8) \end{aligned}$$

که در آن $z = \theta(1 - e^{-\theta})\alpha\lambda\beta v$. برای حل این انتگرال نیاز به روش‌های عددی است که می‌توان از نرم‌افزار *Maple* استفاده کرد. شکل ۴ پارامتر قابلیت اطمینان و τ کندال به ازای یک ترکیب دلخواه از پارامترهای حاشیه‌ای است که در بازه مجاز θ رسم شده است. همان‌طور که از شکل ۴ الف مشخص است، در صورت مستقل بودن دو مؤلفه X و Y پارامتر قابلیت اطمینان برابر ۰٫۸۵ خواهد بود، در صورتی که اگر بین این دو مؤلفه ارتباط وجود داشته باشد، این پارامتر در بازه θ رسم شده تا ۰٫۹۸ (در صورت مثبت بودن ارتباط) افزایش خواهد یافت.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

برای ارزیابی برآورد پیشنهادی دوما و جوردانو (۲۰۱۳) برای برآورد R ، از شبیه‌سازی استفاده می‌شود. در این بخش ابتدا نتایج شبیه‌سازی با مفصل FGM ارائه خواهد شد. فرض کنید $X \sim GE(\alpha, \lambda, 0)$ و $Y \sim GE(\beta, \lambda, 0)$ و مقادیر پارامترها به صورت $\alpha = 4, \beta = 3, \lambda = 2$ و $\theta = 0.5$ باشند. مقدار پارامتر قابلیت اطمینان مطابق این پارامترها برابر ۰٫۵۷۹ است. تعداد تکرار شبیه‌سازی در تمامی



شکل ۴: نمودار الف- پارامتر قابلیت اطمینان به ازای $\alpha = 3, \lambda = 2, \beta = 4, v = 6$ (خط ممتد R و خط چین R_I) ب- نمودار τ کندال به ازای این پارامترها

حالات برابر ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. برآورد پارامترها از دو روش IFM و توأم به دست آورده شده است. در روش IFM ابتدا پارامترهای حاشیه‌ای برآورد شده، سپس پارامتر تابع مفصل را برآورد می‌شود. اما در روش توأم تمامی پارامترها هم‌زمان باهم برآورد می‌شوند. همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، در تمام حالات برآورد R از روش IFM نسبت به روش توأم دارای MSE کمتری است که دلیلی بر بهتر بودن این برآورد است.

برای شبیه‌سازی از تابع مفصل GFGM از روش شی و امورا (۲۰۱۶) استفاده گردید. شبیه‌سازی‌ها با در نظر گرفتن $\alpha = 4, p_1 = 4, p_2 = 3, m_1 = 3, m_2 = 2$ و $\theta = 0.5$ و پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای به صورت $\alpha = 4, \beta = 3, \lambda = 2$ بدست آمدند. مقدار پارامتر قابلیت اطمینان مطابق این پارامترها برابر ۰.۵۸۴ است. با توجه به نتایج بدست آمده در جدول ۲ برآورد پارامتر قابلیت اطمینان با هر دو روش دارای MSE کوچکی است که نشان دهنده مناسب بودن روش پیشنهادی است. همچنین برآورد حاصل از روش IFM به دلیل کوچک‌تر بودن MSE بر روش توأم ترجیح داده می‌شود.

با فرض آنکه $X \sim GE(\alpha, \lambda, 0)$ و $Y \sim GE(\beta, v, 0)$ ، مقادیر پارامترها به صورت $\alpha = 3$ ، $\lambda = 2$ ، $\beta = 4$ ، $v = 6$ و $\theta = 2$ در نظر گرفته شده‌اند که پارامتر قابلیت اطمینان به ازای این مقادیر برابر ۰.۸۹۸ است. همان‌طور که در جدول ۳ ملاحظه می‌شود برآوردهای حاصل از هر دو روش دارای MSE کوچک با اختلاف ناچیز هستند که نشان دهنده مناسب بودن برآوردهای انجام شده است.

جدول ۱: نتایج برآورد R و پارامترها با استفاده از مفصل FGM

α	λ	β	θ	R	پارامتر	روش	n
۴۳۲۴	۲۰۶۲	۳۱۸۲	۰/۴۸۲	۰/۵۸۱	برآورد	IFM	۵۰
۰/۳۲۴	۰/۰۶۲	۰/۱۸۲	-۰/۰۱۸	۰/۰۰۲	اریبی		
۱۳۸۸	۰/۰۸۶	۰/۵۷۲	۰/۱۴۷	۰/۰۰۳	MSE		
۴۲۸۴	۲۰۵۵	۳۱۹۴	۰/۴۵۱	۰/۵۷۹	برآورد	توام	
۰/۲۸۴	۰/۰۵۵	۰/۱۹۴	-۰/۰۴۹	-۰/۰۰۱	اریبی		
۰/۸۳۴	۰/۰۴۳	۰/۴۲۰	۰/۱۶۴	۰/۰۰۳	MSE		
۴۱۳۸	۲۰۲۲	۳۰۷۲	۰/۴۹۸	۰/۵۸۱	برآورد	IFM	۱۵۰
۰/۱۳۸	۰/۰۲۲	۰/۰۷۲	-۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	اریبی		
۰/۳۸۹	۰/۰۲۹	۰/۱۷۷	۰/۰۵۵	۰/۰۰۱	MSE		
۴۰۹۲	۲۰۱۷	۳۰۷۸	۰/۴۵۰	۰/۵۷۷	برآورد	توام	
۰/۰۹۲	۰/۰۱۷	۰/۰۷۸	-۰/۰۰۳	-۰/۰۰۲	اریبی		
۰/۳۰۲	۰/۰۱۴	۰/۱۱۴	۰/۰۵۷	۰/۰۰۲	MSE		
۴۰۷۵	۲۰۱۵	۳۰۲۳	۰/۴۹۰	۰/۵۸۲	برآورد	IFM	۲۵۰
۰/۰۷۵	۰/۰۱۵	۰/۰۲۳	-۰/۰۱۰	۰/۰۰۲	اریبی		
۰/۲۰۲	۰/۰۱۶	۰/۱۰۹	۰/۰۳۴	۰/۰۰۱	MSE		
۳۹۷۹	۲۰۱۰	۳۰۵۱	۰/۵۰۱	۰/۵۷۱	برآورد	توام	
۰/۰۲۱	۰/۰۱۰	۰/۰۵۱	۰/۰۰۹	-۰/۰۰۸	اریبی		
۰/۲۹۸	۰/۰۰۸	۰/۰۸۰	۰/۰۳۱	۰/۰۰۳	MSE		

۵ مثال کاربردی

توزیع نسبی جمعیت یک کشور برحسب گروه‌های سنی از موضوعاتی است که سیاستمداران و مسئولین یک کشور به‌منظور برنامه‌ریزی، هدف‌گذاری، ایجاد رفاه و امکانات باید موردتوجه داشته باشند. در صورت جوان بودن یک جامعه، دولت‌مردان باید به فکر امکانات تحصیلی، شغل آینده این جوانان، امکانات تفریحی و بسیاری از مسائل دیگر باشند و همچنین برای جوامعی که نسبت رده سنی کهن سال در آن بالا باشد، دولت باید خدمات رفاهی، امور پزشکی و درمانی، حقوق بازنشستگی و خدمات دیگر موردنیاز این رده سنی را در نظر داشته باشد.

در سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۰، توزیع نسبی جمعیت برحسب گروه‌های عمده سنی ۰ تا ۱۴ ساله، ۱۵ تا ۶۴ ساله، ۶۵ ساله و بیشتر به تفکیک استان ارائه شد که در جدول ۴ دو گروه سنی ۰

جدول ۲: نتایج برآورد R و پارامترها با استفاده از مفصل GFGM

α	λ	β	θ	R	پارامتر	روش	n
۴,۴۰۸	۲,۰۶۸	۳,۲۳۳	۰,۳۸۷	۰,۵۸۶	برآورد	IFM	۵۰
۰,۴۰۸	۰,۰۶۸	۰,۲۳۳	۰,۰۱۳	۰,۰۰۱	اریبی		
۱,۵۸۲	۰,۰۸۷	۰,۶۱۰	۰,۱۱۱	۰,۰۰۳	MSE		
۴,۱۹۴	۲,۰۴۸	۳,۱۷۲	۰,۴۱۷	۰,۵۸۱	برآورد	توام	
۰,۱۹۴	۰,۰۴۸	۰,۱۷۲	۰,۰۱۷	-۰,۰۰۴	اریبی		
۰,۸۳۴	۰,۰۵۱	۰,۴۱۵	۰,۱۴۷	۰,۰۰۳	MSE		
۴,۱۳۳	۲,۰۲۵	۳,۰۶۶	۰,۳۹۴	۰,۵۸۶	برآورد	IFM	۱۵۰
۰,۱۳۳	۰,۰۲۵	۰,۰۶۶	-۰,۰۰۶	۰,۰۰۱	اریبی		
۰,۰۳۸	۰,۰۲۸	۰,۱۷۷	۰,۰۴۲	۰,۰۰۱	MSE		
۴,۰۶۴	۲,۰۱۷	۳,۰۳۹	۰,۴۱۱	۰,۵۸۵	برآورد	توام	
۰,۰۶۴	۰,۰۱۷	۰,۰۳۹	۰,۰۱۱	۰,۰۰۰	اریبی		
۰,۲۴۷	۰,۰۱۶	۰,۱۱۴	۰,۰۴۳	۰,۰۰۱	MSE		
۴,۰۸۳	۲,۰۲۰	۳,۰۳۶	۰,۳۹۸	۰,۵۸۶	برآورد	IFM	۱۵۰
۰,۰۸۳	۰,۰۲۰	۰,۰۳۶	-۰,۰۰۲	۰,۰۰۲	اریبی		
۰,۲۱۵	۰,۰۱۶	۰,۱۱۷	۰,۰۲۴	۰,۰۰۱	MSE		
۴,۰۲۳	۲,۰۲۷	۳,۰۴۵	۰,۴۰۲	۰,۵۸۱	برآورد	توام	
۰,۰۲۳	۰,۰۲۷	۰,۰۴۵	۰,۰۰۲	-۰,۰۰۴	اریبی		
۰,۲۰۵	۰,۰۲۶	۰,۰۸۰	۰,۰۲۶	۰,۰۰۲	MSE		

تا ۱۴ ساله و ۶۵ ساله و بیشتر ذکر شده است. در این جدول برای هر استان توزیع نسبی جمعیت برحسب گروه‌های سنی و به تفکیک نقاط شهری و روستایی ارائه شده است. برای بررسی این دو گروه سنی در مناطق شهری و روستایی استان‌های کشور، بزرگ‌تر بودن نسبت جمعیت هر رده سنی در یک منطقه (شهری و روستایی) نسبت به منطقه دیگر نیازمند توجه بیشتر به آن منطقه است. به‌عنوان مثال در صورت بزرگ‌تر بودن توزیع نسبی جمعیت ۰ تا ۱۴ ساله در نقاط روستایی نسبت به نقاط شهری یک استان، توجه ویژه به نیازهای این رده سنی در مناطق روستایی این استان را می‌طلبد و مسئولین آن استان نیز می‌توانند برای آینده شغلی استان بر نیروی کار موجود در مناطق روستایی حساب ویژه‌ای باز کرده و با تأمین امکانات رفاهی، تحصیلی و شغلی از مهاجرت این افراد به شهر جلوگیری کنند. با بررسی این موضوع در تمامی استان‌ها می‌توان نتایج را به سطح کشور گسترش داد و تصمیمات لازمه را در سطح کلان در نظر گرفت.

جدول ۳: نتایج برآورد R و پارامترها با استفاده از مفصل فرانک

α	λ	β	ν	θ	R	پارامتر	روش	n	
۳٫۲۸۰	۲٫۰۸۳	۴٫۴۴۴	۶٫۲۶۲	۲٫۰۳۶	۰٫۸۰۰	برآورد	IFM	۵۰	
۰٫۲۸۰	۰٫۰۸۳	۰٫۴۴۴	۰٫۲۶۲	۰٫۰۳۶	۰٫۰۰۲	اریبی			
۰٫۳۷۲	۰٫۰۴۵	۰٫۸۵۲	۰٫۳۹۲	۰٫۳۸۲	۰٫۰۰۱	MSE			
۳٫۲۸۱	۲٫۰۸۲	۴٫۳۹۳	۶٫۲۲۳	۱٫۹۹۶	۰٫۸۰۰	برآورد			
۰٫۲۸۱	۰٫۰۸۲	۰٫۳۹۳	۰٫۲۲۳	-۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۲	اریبی			توام
۰٫۳۸۶	۰٫۰۵۳	۰٫۷۱۱	۰٫۳۵۰	۰٫۴۱۷	۰٫۰۰۱	MSE			
۳٫۰۸۶	۲٫۰۲۴	۴٫۱۲۹	۶٫۰۷۵	۱٫۹۷۷	۰٫۸۹۹	برآورد	IFM	۱۵۰	
۰٫۰۸۶	۰٫۰۲۴	۰٫۱۲۹	۰٫۰۷۵	-۰٫۰۲۳	۰٫۰۰۱	اریبی			
۰٫۰۹۲	۰٫۰۱۵	۰٫۲۰۷	۰٫۱۳۶	۰٫۱۳۳	۰٫۰۰۰	MSE			
۳٫۰۸۸	۲٫۰۲۹	۴٫۱۰۲	۶٫۰۴۴	۲٫۰۰۴	۰٫۸۹۹	برآورد			
۰٫۰۸۸	۰٫۰۲۹	۰٫۱۰۲	۰٫۰۴۴	۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۱	اریبی			توام
۰٫۰۷۸	۰٫۰۱۴	۰٫۱۸۷	۰٫۱۱۹	۰٫۱۳۷	۰٫۰۰۰	MSE			
۳٫۰۵۶	۲٫۰۱۴	۴٫۰۸۶	۶٫۰۴۰	۲٫۰۰۷	۰٫۸۰۰	برآورد	IFM	۵۰	
۰٫۰۵۶	۰٫۰۱۴	۰٫۰۸۶	۰٫۰۴۰	۰٫۰۰۷	۰٫۰۰۱	اریبی			
۰٫۰۴۸	۰٫۰۰۸	۰٫۱۰۰	۰٫۰۷۲	۰٫۰۷۷	۰٫۰۰۰	MSE			
۳٫۰۵۶	۲٫۰۱۷	۴٫۰۶۷	۶٫۰۴۵	۲٫۰۲۵	۰٫۸۰۰	برآورد			
۰٫۰۵۶	۰٫۰۱۷	۰٫۰۶۷	۰٫۰۴۵	۰٫۰۲۵	۰٫۰۰۲	اریبی			توام
۰٫۰۴۷	۰٫۰۰۹	۰٫۰۹۹	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۵	۰٫۰۰۰	MSE			

برای سادگی کار نسبت جمعیت ۰ تا ۱۴ سال مناطق شهری را با X و مناطق روستایی با Y و نسبت جمعیت ۶۵ ساله و بیشتر در مناطق شهری و روستایی به ترتیب با Z و W نشان داده می‌شود. فرض کنید $(X \sim GE(\alpha_1, \lambda_1, 0), Y \sim GE(\alpha_2, \lambda_2, 0), Z \sim GE(\alpha_3, \lambda_3, 0))$ و $W \sim GE(\alpha_4, \lambda_4, 0)$ باشند. توزیع نمایی تعمیم‌یافته به داده‌ها برازش داده و پارامترها با روش ماکسیم درست‌نمایی برآورد می‌شود. برای آزمون مناسب بودن توزیع برازش شده از آزمون نیکویی برازش کولموگروف اسمیرنوف ($K - S$) و آندرسون دارلینگ (AD) استفاده می‌شود. نتایج مندرج در جدول ۵ حاکی از مناسب بودن توزیع نمایی تعمیم‌یافته برای داده‌های ذکر شده است. از نمودارهای تابع توزیع تجمعی و چندک - چندک به‌منظور درک شهودی مناسب بودن توزیع‌های برازش داده شده به داده‌ها، استفاده می‌شود (شکل‌های ۵ تا ۸).

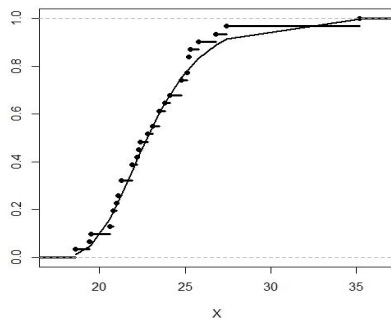
جدول ۴: توزیع نسبی جمعیت به تفکیک استان، مناطق شهری و روستایی در سال ۱۳۹۰

نام استان	۱۴ تا ۱۵ ساله		۶۵ ساله و بیشتر	
	مناطق شهری	مناطق روستایی	مناطق شهری	مناطق روستایی
شرقی آذربایجان	۲۱/۱	۲۴/۶	۶/۷	۷/۸
غربی آذربایجان	۲۴/۱	۲۷/۳	۵/۳	۵/۵
اردبیل	۲۳/۱	۲۶/۴	۵/۲	۷/۷
اصفهان	۲۰/۸	۲۲/۱	۶/۲	۸/۳
البرز	۲۱/۰	۲۳/۳	۴/۶	۶/۲
ایلام	۲۲/۴	۲۲/۶	۴/۲	۵/۵
بوشهر	۲۳/۸	۲۴/۷	۳/۵	۴/۸
تهران	۱۹/۵	۲۴/۹	۶/۳	۴/۲
بختیاری و چهارمحال	۲۳/۵	۲۷/۴	۵/۱	۵/۶
جنوبی خراسان	۲۷/۴	۲۷/۸	۵/۰	۱۰/۳
رضوی خراسان	۲۴/۸	۲۸/۱	۵/۱	۷/۳
شمالی خراسان	۲۵/۳	۲۷/۸	۴/۵	۴/۲
خوزستان	۲۴/۸	۳۰/۳	۴/۱	۴/۱
زنجان	۲۱/۹	۲۴/۳	۵/۷	۷/۶
سمنان	۲۱/۳	۲۲/۰	۵/۹	۹/۶
بلوچستان و سیستان	۳۵/۲	۳۹/۷	۲/۶	۳/۸
فارس	۲۱/۳	۲۴/۱	۵/۴	۵/۹
قزوین	۲۲/۲	۲۲/۸	۴/۷	۸/۵
قم	۲۵/۱	۲۲/۱	۴/۵	۹/۲
کردستان	۲۲/۸	۲۴/۰	۴/۹	۷/۰
کرمان	۲۵/۲	۲۸/۷	۴/۴	۵/۴
کرمانشاه	۲۰/۸	۲۲/۶	۵/۵	۶/۵
بویراحمند و گهگلویه	۲۵/۸	۲۷/۲	۴/۳	۵/۷
گلستان	۲۳/۵	۲۷/۲	۴/۴	۴/۶
گیلان	۱۸/۶	۱۸/۷	۶/۴	۱۰/۷
لرستان	۲۲/۳	۲۵/۳	۵/۴	۵/۶
مازندران	۱۹/۴	۱۹/۹	۵/۶	۸/۰
مرکزی	۲۱/۹	۲۰/۳	۵/۶	۱۲/۵
هرمزگان	۲۶/۸	۳۱/۲	۲/۹	۴/۸
همدان	۲۰/۶	۲۳/۲	۶/۳	۷/۶
یزد	۲۵/۲	۲۳/۱	۵/۴	۹/۷

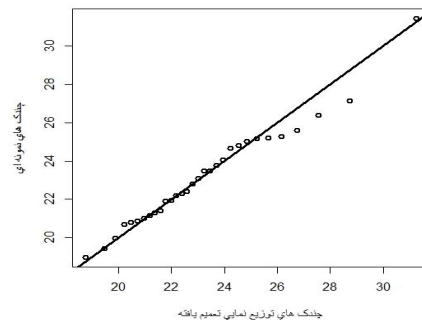
نمودارهای تابع توزیع برآورد شده به خوبی بر تابع توزیع تجربی داده‌ها منطبق شده است. به دلیل کوچک بودن حجم نمونه، در نمودارهای چندک - چندک انحرافاتی مشاهده می‌شود. τ کندال تجربی بین X و Y برابر 0.56 و بین Z و W برابر 0.431 است، بنابراین برای برآورد پارامتر قابلیت اطمینان باید از تابع مفصلی استفاده کرد که این همبستگی را پوشش دهد. در اینجا به منظور برآورد پارامتر قابلیت اطمینان از مفصل فرانک استفاده می‌شود. توابع چگالی توأم (X, Y) و (Z, W) بترتیب به

جدول ۵: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، مقدار ماکسیمم درست‌نمایی، آزمون $K - S$ و AD

متغیر	پارامتر	برآورد	ماکسیمم مقدار درست‌نمایی	آزمون $K - S$ (مقدار-p)	آزمون AD (مقدار-p)
X	α_1	۱۶۷۰٫۹۴	-۷۴٫۳۲	۰٫۰۷۵	۰٫۲۴۵
	λ_1	۰٫۴۴۳		(۰٫۹۹۴)	(۰٫۹۷۰)
Y	α_2	۲۲۱٫۵	-۸۳٫۲۸	۰٫۰۹۴	۰٫۳۰۰
	λ_2	۰٫۳۲۷		(۰٫۹۴۵)	(۰٫۹۳۷)
Z	α_3	۶۳٫۱	-۴۸٫۲۶	۰٫۱۵۲	۱٫۱۴۳
	λ_3	۰٫۹۳۰		(۰٫۴۶۹)	(۰٫۲۸۹)
W	α_4	۳۱٫۳	-۶۵٫۳۵	۰٫۰۹۹	۰٫۲۳۱
	λ_4	۰٫۵۷۹		(۰٫۹۲۴)	(۰٫۹۷۹)



(ب)



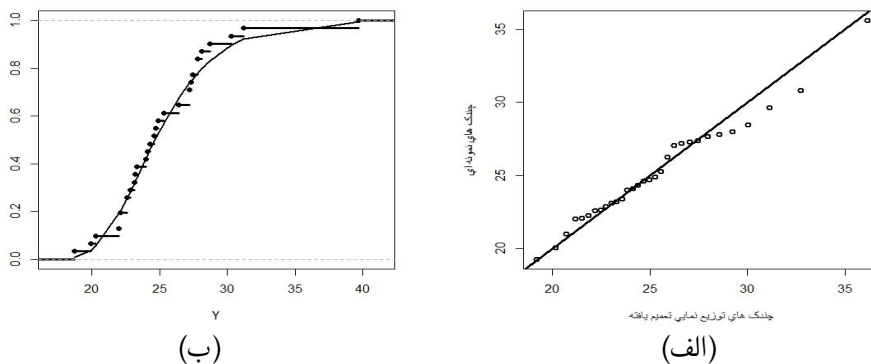
(الف)

شکل ۵: الف- نمودار چندک-چندک ب- تابع توزیع تجمعی (خط چین تابع توزیع تجربی و خط ممتد تابع توزیع نمایی تعمیم یافته) نسبت جمعیت ° تا ۱۴ سال مناطق شهری

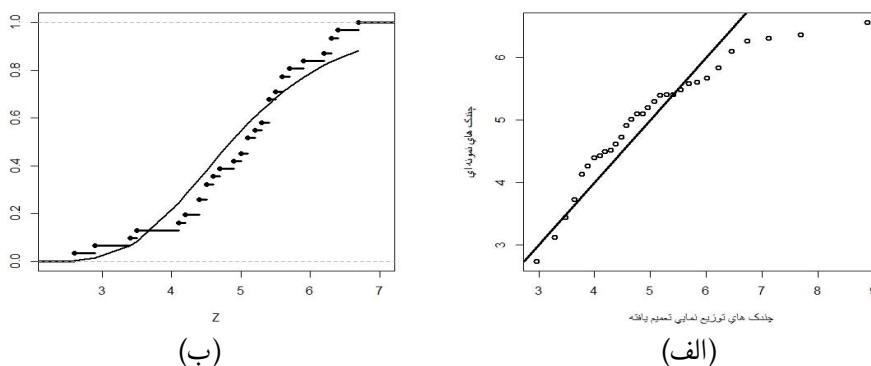
صورت

$$f(x, y) = \frac{\theta_1(1-\exp(-\theta_1)) \exp(-\theta_1((1-\exp(-\lambda_1 x))^{\alpha_1} + (1-\exp(-\lambda_2 y))^{\alpha_2}))}{[1-\exp(-\theta_1) - (1-\exp(-\theta_1(1-\exp(-\lambda_1 x))^{\alpha_1})) (1-\exp(-\theta_1(1-\exp(-\lambda_2 y))^{\alpha_2}))]^{\alpha_1}} \times \alpha_1 \lambda_1 (1-\exp(-\lambda_1 x))^{\alpha_1-1} \alpha_2 \lambda_2 (1-\exp(-\lambda_2 y))^{\alpha_2-1}$$

$$f(z, w) = \frac{\theta_2(1-\exp(-\theta_2)) \exp(-\theta_2((1-\exp(-\lambda_3 z))^{\alpha_3} + (1-\exp(-\lambda_4 w))^{\alpha_4}))}{[1-\exp(-\theta_2) - (1-\exp(-\theta_2(1-\exp(-\lambda_3 z))^{\alpha_3})) (1-\exp(-\theta_2(1-\exp(-\lambda_4 w))^{\alpha_4}))]^{\alpha_2}} \times \alpha_3 \lambda_3 (1-\exp(-\lambda_3 z))^{\alpha_3-1} \alpha_4 \lambda_4 (1-\exp(-\lambda_4 w))^{\alpha_4-1}$$

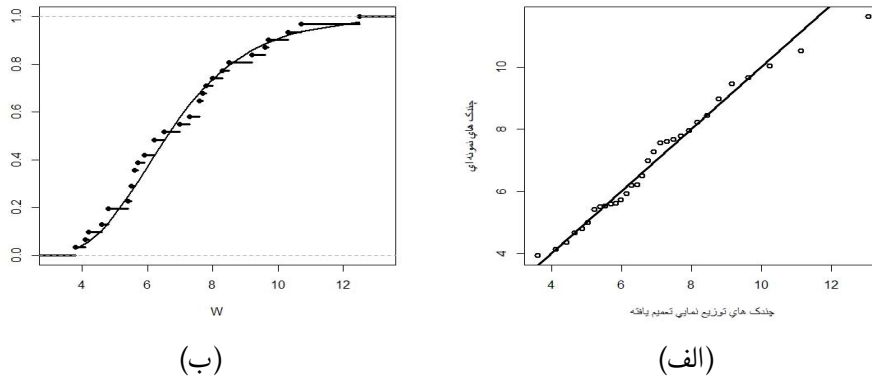


شکل ۶: الف- نمودار چندک-چندک ب- تابع توزیع تجمعی (خط چین تابع توزیع تجربی و خط ممتد تابع توزیع نمایی تعمیم یافته) نسبت جمعیت ۰ تا ۱۴ سال مناطق روستایی



شکل ۷: الف- نمودار چندک-چندک ب- تابع توزیع تجمعی (خط چین تابع توزیع تجربی و خط ممتد تابع توزیع نمایی تعمیم یافته) نسبت جمعیت ۶۵ ساله و بیشتر مناطق شهری

هستند. با جایگذاری پارامترهای حاشیه‌ای برآورد شده، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای همبستگی برابر $\hat{\theta}_1 = ۷۷۱۸$ و $\hat{\theta}_2 = ۴۷۲۸$ خواهد بود. با توجه به پارامترهای همبستگی برآورد شده، $\hat{\tau}_1 = ۰٫۵۹$ و $\hat{\tau}_2 = ۰٫۴۳۹$ هستند که به مقدار τ کندهال تجربی داده‌ها نزدیک است. با جایگذاری پارامترهای حاشیه‌ای و همبستگی برآورد شده در رابطه (۸)، برآورد پارامترهای قابلیت اطمینان برابر $\hat{R}_1 = P(Y \geq X) = ۰٫۸۲۳$ و $\hat{R}_2 = P(W \geq Z) = ۰٫۸۹۴$ می‌باشند که به مقدار تجربی این



شکل ۸: الف- نمودار چندک-چندک ب- تابع توزیع تجمعی (خط چین تابع توزیع تجربی و خط ممتد تابع توزیع نمایی تعمیم یافته) نسبت جمعیت ۶۵ ساله و بیشتر مناطق روستایی

پارامترها یعنی $R_1^E = 0.803$ و $R_4^E = 0.867$ نزدیکند. با توجه به نتایج به دست آمده، مناطق روستایی در هر دو گروه سنی نسبت به مناطق شهری سهم بیشتری از جمعیت منطقه را به خود اختصاص داده‌اند، در واقع نسبت گروه سنی ۰ تا ۱۴ ساله و ۶۵ ساله و بیشتر در مناطق روستایی از مناطق شهری کشور بیشتر است.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

هدف این مقاله برآورد پارامتر قابلیت اطمینان برای توزیع نمایی تعمیم یافته با فرض وجود همبستگی بین مؤلفه‌های X و Y با استفاده از روش دوما و جوردانو (۲۰۱۳) بود. به این منظور فرم بسته R برای توزیع نمایی تعمیم یافته تحت مفصل‌های FGM و GFGM به دست آورده شد. اما به دلیل عدم وجود شکل بسته R بر اساس تابع مفصل فرانک به صورت عددی محاسبه شد و ملاحظه گردید که در نظر گرفتن وابستگی میان دو مؤلفه بسته به پارامترهای حاشیه‌ای و مفصل انتخاب شده سبب افزایش یا کاهش پارامتر قابلیت اطمینان نسبت به حالت مستقل آن خواهد شد. ارزیابی برآوردها در مطالعه مناسب بودن این روش برآورد R را تأیید نمود. در بخش کاربردی نیز داده‌های مربوط به توزیع نسبی جمعیت برحسب گروه‌های عمده سنی به تفکیک استان در مناطق شهری و روستایی کشور در سال ۱۳۹۰ تحلیل شد. با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته درصد گروه‌های سنی و استفاده از تابع مفصل فرانک پارامتر قابلیت اطمینان برای

رده‌های سنی صفر تا ۱۴ سال و ۶۵ سال و بیشتر در مناطق شهری و روستایی مورد محاسبه قرار گرفت. نتایج به دست آمده حاکی از بیشتر بودن نسبت دو گروه سنی بررسی شده در مناطق روستایی نسبت به مناطق شهری بود.

تقدیر و تشکر

از داوران و ویراستار محترم مجله که با نظرات ارزشمند خود موجب ارائه بهتر مقاله گردید قدردانی می‌شود. از حمایت‌های معنوی معاونت پژوهشی دانشگاه شهید چمران اهواز نیز تشکر می‌شود.

مراجع

- Awad, A. M. and Gharraf, M. K. (1986), *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley, New York.
- Awad, A. M. and Gharraf, M. K. (1986), Estimation of $P(Y < X)$ in the Burr Case: A Comparative Study, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **15**, 389-403.
- Constantine, K., Karson, M. and Tse, S. K. (1986), Estimators of $P(Y < X)$ in the Gamma Case, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **15**, 365-388.
- Domma, F. and Giordano, S. (2013), A Copula-Based Approach to Account for Dependence in Stress-Strength Models, *Statistical Papers*, **54**, 807-826.
- Gupta, R. C., Ghitany, M. E. and AL-Mutari, D. K. (2012), Estimation of Reliability from a Bivariate Log-Normal Data, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 1068-1081.
- Gupta, RC. and Subramanian, S. (1998), Estimation of Reliability in a Bivariate Normal Distribution with Equal Coefficients of Variation, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **27**(3), 675-698.
- Hangal, D. (1997), Note on Estimation of Reliability under Bivariate Pareto Stress-Strength Model, *Statistical Papers*, **38**, 453-459.
- Ismail, R., Jeyaratnam, S. and Panchapakesan, S. (1986), Estimation of $P(X > Y)$ for Gamma Distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **26**, 253-267.

- Iwase, K. (1987), On UMVU Estimators of $\Pr(Y < X)$ in the Two-Parameter Exponential Case, *Memoirs of the Faculty of Engineering. Hiroshima University*, **9**, 21-24.
- Jeevanand, ES. (1997), Bayes Estimation of for a Bivariate Pareto Distribution, *Statistician*, **46**, 93-99.
- Morgenstern, D. (1956), Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen, *Mitteilungsblatt fur Mathematische Statistik*, **8**, 234-235.
- Nadarajah, S. (2004), Reliability for some Bivariate Gamma Distributions, *Mathematical Problems in Engineering*, **2005**, 151-163.
- Nadarajah, S. (2005) , Reliability for some Bivariate Beta Distributions, *Mathematical Problems in Engineering*, **2005**, 101-111.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006), Reliability for some Bivariate Exponential Distributions, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **21**, 338-351.
- Reiser, B. and Guttman, I. (1986), Statistical Inference for $\Pr(Y < X)$: the Normal Case, *Technometrics*, **28**, 253-257.
- Shih, J. H. and Emura, T. (2016), Bivariate Dependence Measures and Bivariate Competing Risks Models under the Generalized FGM Copula, *Statistical Papers*, doi:10.1007/s00362-016-0865-5.
- Sklar, M. (1959), Fonctions de r'epartition'a n Dimensions et Leurs Marges, *Mathematical Institut de Statistiques de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.
- Voinov, V. G. (1984), On Unbiased Estimation of $P(Y < X)$ in the Normal Case, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, **136**, 5-12.