

توزیع بیرنباوم-ساندرز بر پایه توزیع چوله-لاپلاس

مهرداد نادری^{۱،۲}، علیرضا عربپور^۱، احد جمالیزاده^۱

اگره آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان

^۲انجمن پژوهشگران جوان، دانشگاه شهید باهنر کرمان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۷/۱۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۶/۱۲

چکیده: در این مقاله تعمیم دیگری از توزیع بیرنباوم-ساندرز بر پایه توزیع چوله-لاپلاس ارائه می‌شود. همچنین برخی از ویژگی‌های توزیع معرفی شده به همراه برآورد پارامترهای توزیع با استفاده از الگوریتم EM و برآورد خطاهای استاندارد ارائه شده است. در نهایت نیز یک مثال شبیه‌سازی شده و همچنین کاربرد برازش توزیع روی دو مجموعه داده واقعی مورد بررسی قرار گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع بیرنباوم-ساندرز، توزیع چوله-لاپلاس، الگوریتم EM، مطالعات مونت-کارلو.

۱ مقدمه

یکی از توزیع‌های نامتقارن که در چند سال اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته، توزیع بیرنباوم-ساندرز^۱ (BS) است. این توزیع که دارای چولگی مثبت است، برای نخستین بار توسط بیرنباوم و ساندرز (۱۹۶۹) معرفی شده و بطور گسترده‌ای در علوم مهندسی، پزشکی، زیست‌شناسی و ... مورد استفاده قرار گرفته شده است. یکی از ویژگی‌های مناسب این توزیع آن است که می‌توان آن را از طریق توزیع نرمال استاندارد بدست آورد. اگر متغیر تصادفی W دارای توزیع بیرنباوم-ساندرز با پارامتر شکل α و پارامتر

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: علیرضا عربپور، arabpour@uk.ac.ir

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62E15, 65C05, 62E10

¹Birnbaum-Saunders

مقیاس β باشد که به صورت $W \sim BS(\alpha, \beta)$ نشان داده می‌شود، آنگاه

$$W \stackrel{d}{=} \frac{\beta}{\alpha} [\alpha Z + \sqrt{(\alpha Z)^2 + \alpha}]^2, \quad (1)$$

که در آن $\stackrel{d}{=}$ نشانگر هم‌توزیع بودن و Z یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تابع توزیع متغیر تصادفی W به صورت

$$F(w; \alpha, \beta) = \Phi(a(w; \alpha, \beta)), \quad w > 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2)$$

است، که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد و

$$a(w; \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{w}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{w}} \right],$$

است. همچنین از ویژگی‌های مورد توجه دیگر توزیع بیرنباوم ساندرز که توسط پارک و پادگت (۲۰۰۵) مورد بررسی قرار گرفته است، آن است که این توزیع یک توزیع حدی برای فاصله زمانی میان دو عبور فرایند گاما از دو حد مشخص است. در چند سال اخیر تعمیم‌های زیادی برای توزیع BS معرفی شده‌اند که تمامی آنها براساس نمایش تصادفی (۱) صورت گرفته است. دلیل اصلی ارایه این تعمیم‌ها آن است که تجربه نشان می‌دهد توزیع BS در برازش داده‌هایی که دارای چولگی و کشیدگی (یعنی داده‌هایی که از توزیع های دم سنگین تر پیروی می‌کنند) زیادی هستند، مناسب نیست (بالاکریشن، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱). از اینرو توزیع‌هایی برای افزایش چولگی و کشیدگی توزیع BS و با استفاده از جایگذاری چگالی‌های نامتقارن به جای توزیع نرمال به دست آمده‌اند. گرچه رهیافت بدست آوردن و کاربرد این توزیع‌ها ممکن است بر اساس نظریه پارک و پادگت (۲۰۰۵) نباشد، اما مطالعات نشان دهنده برازش مناسب این توزیع‌ها بر داده‌ها است. از اینرو، نخستین بار دیاز و لیوا-سانچز (۲۰۰۵) با معرفی توزیع بیرنباوم-ساندرز تعمیم یافته^۲ و با در نظر گرفتن خانواده توزیع‌های بیضوی^۳ تنها کشیدگی این توزیع را افزایش دادند. پس از آنها ویلکا و همکاران (۲۰۱۱) با استفاده از توزیع چوله-نرمال^۴، توزیع بیرنباوم-ساندرز-چوله-نرمال (SN-BS) را معرفی کردند و نشان دادند که توزیع معرفی شده برای مدل‌سازی داده‌ها بهتر و کاربردی‌تر از توزیع BS است.

²Generalized Birnbaum-Saunders

³Elliptical family of distributions

⁴Skew-Normal

آنها همچنین برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع خود را با استفاده از الگوریتم میانگین-ماکسیمم^۵ (EM) بدست آوردند. با تعمیم توزیع چوله-نرمال به توزیع‌هایی با کشیدگی و چولگی بیشتر، تعمیم‌های متناظر آن نیز برای توزیع BS نیز معرفی شدند. به عنوان مثال، پس از معرفی توزیع چوله-نرمال- t -استیودنت^۶، توسط ناداراجا و کاتز (۲۰۰۳)، هاشمی و همکاران (۲۰۱۵) مدل بیرنهام-ساندرز چوله-نرمال- t -استیودنت (SNT-BS) را ارایه دادند.

تمامی این تعمیم‌ها بر اساس جایگذاری توزیع‌های چوله‌ای است که از طریق رهیافت آزالینی (۱۹۸۵) بدست آمده‌اند. یکی دیگر از روش‌های بدست آوردن توزیع‌های چوله استفاده از کلاس توزیع‌های آمیخته میانگین-واریانس نرمال^۷ است. در این کلاس از توزیع‌ها، یکی دیگر از توزیع‌های منعطف‌تر از توزیع چوله نرمال توزیع چوله-لاپلاس^۸، است که نخستین بار توسط ارسلان (۲۰۱۰) در حالت چند متغیره معرفی شد. وی ویژگی‌های این توزیع را مورد بررسی قرار داد و برآوردهای ماکسیمم درستنمایی آن را با استفاده از الگوریتم EM ارایه نمود. در این مقاله تلاش می‌شود برپایه توزیع چوله-لاپلاس یک تعمیم دیگر از توزیع BS را ارایه شود. همچنین پس از معرفی این توزیع، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی بدست آمده از طریق الگوریتم EM به همراه خطاهای استاندارد آنها ارایه خواهند شد. در انتها نیز یک مطالعه شبیه‌سازی به منظور بررسی صحت برآوردهای بدست آمده انجام خواهد گرفت و همچنین مناسبت توزیع معرفی شده بر روی داده‌های واقعی تشریح خواهد شد.

۲ توزیع بیرنهام-ساندرز چوله-لاپلاس

در این بخش پس از تعریف توزیع چوله-لاپلاس و بررسی چند ویژگی آن، توزیع BS برپایه آن معرفی شده و برخی از ویژگی‌های آن نیز مورد بررسی قرار گرفته می‌شود.

تعریف ۱: متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله-لاپلاس با میانگین μ ، واریانس σ^2 و پارامتر شکل λ است، هرگاه دارای تابع چگالی به صورت

$$f_{SLap}(x; \mu, \sigma^2, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\tau}\sigma} \exp\left\{-\tau \frac{|x - \mu|}{\sigma} + \frac{\lambda(x - \mu)}{\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

⁵Expectation-Maximization algorithm

⁶Skew-Normal-t

⁷Normal mean-variance mixture distribution

⁸Skew-Laplace

باشد، که در آن $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ و $\tau = \sqrt{1 + (\lambda/\sigma)^2}$ است و به صورت $X \sim SLap(\mu, \sigma^2, \lambda)$ نشان داده می‌شود.

یکی از نمایش‌های کاربردی این توزیع به صورت نمایش تصادفی مخلوط میانگین-واریانس از توزیع نرمال است. به طور دقیق‌تر، اگر $X \sim SLap(\mu, \sigma^2, \lambda)$ ، آنگاه

$$X \stackrel{d}{=} \mu + W\lambda + \sigma\sqrt{W}Z, \quad (۴)$$

که در آن Z دارای توزیع نرمال استاندارد و مستقل از متغیر تصادفی W با توزیع نمایی $Exp(\circ/\delta)$ است. حال همانند سایر تعمیم‌های توزیع BS، با ادغام دو نمایش تصادفی (۱) و (۴) می‌توان توزیع بیرنجام-ساندرز چوله-لاپلاس را تعریف کرد.

تعریف ۲: متغیر تصادفی T دارای توزیع بیرنجام-ساندرز چوله-لاپلاس با پارامتر (α, β, λ) است، هرگاه

$$T \stackrel{d}{=} \frac{\beta}{\alpha} \left[\alpha(W\lambda + \sqrt{W}Z) + \sqrt{(\alpha(W\lambda + \sqrt{W}Z))^2 + \beta} \right]^2, \quad (۵)$$

که در آن Z دارای توزیع نرمال استاندارد و مستقل از متغیر تصادفی W با توزیع $Exp(\circ/\delta)$ است و به صورت $T \sim SLap - BS(\alpha, \beta, \lambda)$ نشان داده می‌شود. در نتیجه

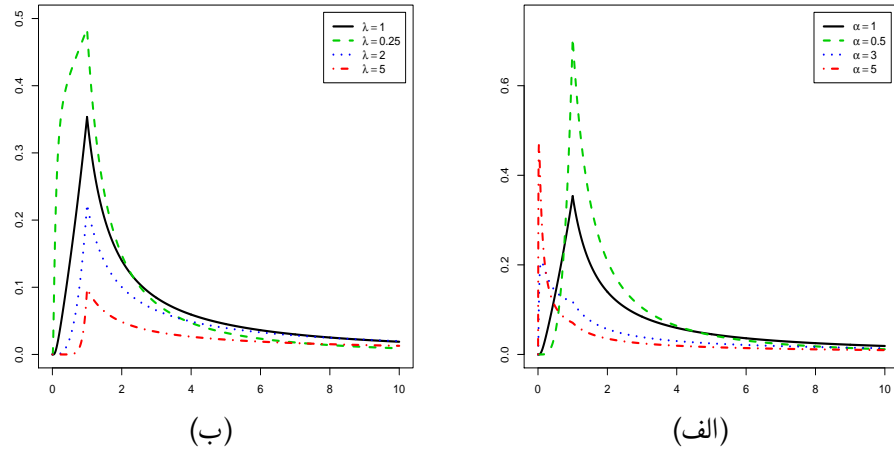
$$f_{SLap-BS}(t; \alpha, \beta, \lambda) = A(t; \alpha, \beta) f_{SLap}(a(t; \alpha, \beta); \circ, \lambda), \quad t, \alpha, \beta > \circ, \lambda \in \mathbb{R},$$

که در آن تابع $a(w; \alpha, \beta)$ در (۲) تعریف شده و $A(w; \alpha, \beta)$ مشتق $a(w; \alpha, \beta)$ نسبت به w است. در شکل ۱ نمودار تابع چگالی این توزیع برای مقادیر متفاوت پارامتر رسم شده است.

۲،۱ ویژگی‌های توزیع $SLap - BS(\alpha, \beta, \lambda)$:

۱- اگر $\lambda = \circ$ ، آنگاه توزیع $SLap - BS$ به کلاس توزیع‌های بیرنجام-ساندرز بر پایه مخلوط-مقیاسی نرمال متعلق خواهد بود که یک حالت خاص آن توزیع بیرنجام-ساندرز t -استودنت است.

۲- اگر $T \sim SLap - BS(\alpha, \beta, \lambda)$ ، آنگاه $T^{-1} \sim SLap - BS(\alpha, \beta^{-1}, -\lambda)$ و $CT \sim SLap - BS(\alpha, C\beta, \lambda)$.



شکل ۱. نمودار تابع چگالی توزیع بیرنهام-ساندرز چوله-لاپلاس برای مقادیر مختلف الف- α و ب- λ .

۳- اگر $T \sim SLap - BS(\alpha, \beta, \lambda)$ ، آنگاه

$$X \stackrel{d}{=} \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \sim SLap(0, 1, \lambda).$$

گزاره ۴: اگر $T \sim SLap - BS(\alpha, \beta, \lambda)$ و $W \sim E(0, 1)$ ، آنگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ توزیع W به شرط $T = t$ یک توزیع وارون گاوسی تعمیم یافته^۹ (GIG) با پارامتر $(0, 1, a(t, \alpha, \beta), 1 + \lambda^2)$ است و در نتیجه

$$E[W^n | T = t] = \left(\frac{a(t, \alpha, \beta)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right)^n \times R(\sqrt{1 + \lambda^2} a(t, \alpha, \beta), 0, 1, n), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

که در آن $R(c, a, b) = K_{a+b}(c)/K_a(c)$ و $K_a(\cdot)$ تابع بسل پیراسته‌ی نوع سوم است (یورگنسن، ۱۹۸۲).

^۹Generalized Inverse Gaussian

۳ برآوردیابی ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $SLap-BS(\alpha, \beta, \lambda)$ باشد. در این صورت لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\ell(\theta|\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n f_{SLap-BS}(t_i; \alpha, \beta, \lambda), \quad (7)$$

است، که در آن $\theta = (\alpha, \beta, \lambda)$. ماکسیمم‌سازی این تابع سخت و دشوار است و برآوردگرهای حاصله دارای فرم بسته‌ای نیستند. در چنین شرایطی که فرم تابع چگالی پیچیده است، برای به دست آوردن برآوردگرهای درستنمایی، یک روش جایگزین مناسب برای بهینه‌سازی که نخستین بار توسط دمپستر (۱۹۷۷) ارائه گردید، استفاده از الگوریتم EM است. در این الگوریتم با استفاده از یک الگوی خاص، دنباله‌ای از برآوردگرها بدست می‌آید که همگرا به برآورد بهینه خواهند بود. این روش متشکل از دو گام بوده که در گام اول (E) تابع چگالی هدف که تابعی از مشاهدات و داده‌های پنهان است، نسبت به متغیر پنهان امید گرفته می‌شود و سپس در گام دوم (M) تابع حاصل شده در گام اول ماکسیمم می‌شود. برای اجرای این روش روی توزیع SLap-BS، کافی است از نمایش تصادفی

$$T_i|W_i = w_i \sim EBS(\alpha\sqrt{w_i}, \beta, 2, -\sqrt{w_i}\lambda), \quad W_i \sim E(0, 5), \quad (8)$$

استفاده شود، که در آن EBS نشانگر توزیع بیرینام ساندرز تعمیم‌یافته معرفی شده توسط لیوا و همکاران (۲۰۱۰) است. در این صورت تابع درستنمایی کامل به صورت زیر

$$\ell(\theta|\mathbf{t}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \log(f_{T|W}(t_i|w_i\alpha, \beta, \lambda)) + \sum_{i=1}^n \log(f_W(w_i)), \quad (9)$$

تشکیل داده می‌شود. چون عبارت دوم در (۹) به پارامتر مجهول بستگی ندارد، آن را نادیده گرفته و برای به دست آوردن برآوردگرهای درستنمایی کافی است عبارت اول ماکسیمم شود. همچنین تابع چگالی EBS به کار رفته در (۹) را می‌توان به صورت

$$f_{T|W}(t|w\alpha, \beta, \lambda) = \phi(a(t, \alpha, \alpha); \lambda w, w)$$

با چگالی توزیع نرمال در ارتباط قرار داد. بنابراین تابع درستنمایی به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\ell(\theta|\mathbf{t}, \mathbf{w}) = -n \log(\alpha) - \frac{n}{\nu} \log(\beta) - \frac{1}{\nu \alpha^\nu} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) - \frac{\lambda^\nu}{\nu} \sum_{i=1}^n w_i + \lambda \sum_{i=1}^n a(t_i, \alpha, \beta). \quad (10)$$

۳،۱ برآوردیابی با استفاده از الگوریتم ECM

الگوریتم EM دارای تعمیم‌های گوناگونی است که در ادامه الگوریتم امید شرطی-ماکسیم^{۱۰} (ECM) برای برآوردیابی پارامترهای توزیع SLap-BS مورد استفاده قرار می‌گیرد (منگ و روبین، ۱۹۹۳).

• گام E: در تکرار k ام الگوریتم ECM، در گام E از تابع درستنمایی کامل (۱۰) نسبت به توزیع شرطی $W|T$ امید ریاضی گرفته می‌شود. بدین ترتیب مقادیر مجهول و پنهان بر حسب W ، مورد برآوردیابی قرار خواهند گرفت و تابع درستنمایی به فرم تابع هدف

$$Q(\theta|\hat{\theta}^{(k)}) = -n \log(\alpha) - \frac{n}{\nu} \log(\beta) - \frac{1}{\nu \alpha^\nu} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(k)} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) - \frac{\lambda^\nu}{\nu} \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(k)} + \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{i=1}^n \xi(t_i, \beta) \quad (11)$$

تبدیل خواهد شد، که تنها تابعی از پارامتر مجهول است. در این تابع $\sqrt{t/\beta}$ و مقادیر $\hat{u}_i^{(k)}$ و $\hat{w}_i^{(k)}$ با استفاده از گزاره ۴، به صورت

$$\hat{w}_i^{(k)} = E[W|t_i, \hat{\theta}^{(k)}] = \frac{a(t_i, \hat{\alpha}^{(k)}, \hat{\beta}^{(k)})}{\sqrt{1 + \hat{\lambda}^{\nu(k)}}} R(a(t_i, \hat{\alpha}^{(k)}, \hat{\beta}^{(k)}) \sqrt{1 + \hat{\lambda}^{\nu(k)}}, \nu/2, 1),$$

$$\hat{u}_i^{(k)} = E[W^{-1}|t_i, \hat{\theta}^{(k)}] = \frac{\sqrt{1 + \hat{\lambda}^{\nu(k)}}}{a(t_i, \hat{\alpha}^{(k)}, \hat{\beta}^{(k)})} R(a(t_i, \hat{\alpha}^{(k)}, \hat{\beta}^{(k)}) \sqrt{1 + \hat{\lambda}^{\nu(k)}}, -\nu/2, 1)$$

به دست می‌آیند.

• گام M: در این گام از هر تکرار الگوریتم ECM، پارامترهای مدل به وسیله ماکسیم‌سازی تابع هدف بدست آمده در گام قبل به روز می‌شوند. بدین ترتیب مقادیر به روز شده پارامترها، به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

¹⁰Expectation Conditional Maximization algorithm

- گام اول CM : ابتدا با مشتق‌گیری از تابع هدف نسبت به λ ، این پارامتر به صورت

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n a(t_i, \hat{\alpha}^{(k)}, \hat{\beta}^{(k)})}{A},$$

برآورد می‌شود، که در آن $A = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(k)}$.

- گام دوم CM : با ماکسیمسازی (۱۱) نسبت به α داریم:

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{S_u}{\hat{\beta}^{(k)}} + R_u \hat{\beta}^{(k)} - 2\bar{U} - \frac{(\sum_{i=1}^n \xi(t_i, \hat{\beta}^{(k)}))^2}{nA}},$$

که در آن

$$R_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{u}_i^{(k)}}{t_i}, \quad S_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(k)} t_i, \quad \bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(k)}.$$

- گام سوم CM : با قرار دادن مقادیر به روز شده در تابع هدف $Q(\theta|\hat{\theta}^{(k)})$ به تابع

$$Q(\beta) = -\frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(k)} \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) \\ - \frac{\hat{\lambda}^{(k+1)}}{2} \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^{(k)} + \frac{\hat{\lambda}^{(k+1)}}{\hat{\alpha}^{(k+1)}} \sum_{i=1}^n \xi(t_i, \beta),$$

حاصل می‌شود. حال با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی، $\hat{\beta}^{(k+1)}$ از ماکسیمسازی این تابع بدست خواهد آمد. در این مقاله از دستور optimize در نرم‌افزار R برای این برآوردیابی استفاده شده است.

این مراحل تا زمانی که یک شرط همگرایی مناسب برقرار شود، ادامه پیدا می‌کند. یکی از این شروط همگرایی آن است که $|\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}|$ به اندازه کافی کوچک باشد. الگوریتم دیگر که با تابع درست‌نمایی در ارتباط است آن است که $|\ell(\hat{\theta}^{(k+1)}) - \ell(\hat{\theta}^{(k)})| < \epsilon$ شود طوری که ϵ میزان خطای قابل تحمل است. در این مقاله از شرط دوم و به ازای $\epsilon = 10^{-5}$ استفاده شده است.

۳,۲ محاسبه ماتریس اطلاع

برای محاسبه ماتریس کواریانس مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، در این بخش از الگوریتم معرفی شده توسط بیسفورد و همکاران (۱۹۷۷) استفاده می‌شود. در این الگوریتم ماتریس اطلاع تجربی به صورت

$$\mathbf{I}_e(\theta|\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}(t_i|\theta)\mathbf{s}^T(t_i|\theta) - \frac{1}{n}\mathbf{S}(\mathbf{t}|\theta)\mathbf{S}^T(\mathbf{t}|\theta), \quad (12)$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\mathbf{S}(\mathbf{t}|\theta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}(t_i|\theta)$ و متغیرهای $\mathbf{s}(t_i|\theta)$ با استفاده از نتایج لویس (۱۹۸۲) بصورت

$$\mathbf{s}(t_i|\theta) = \frac{\partial f(t_i|\theta)}{\partial \theta} = E\left(\frac{\partial \ell(t_i, w_i|\theta)}{\partial \theta} \middle| t_i, \theta\right)$$

به دست می‌آید. حال با جایگذاری مقادیر برآورد شده از روش ماکسیمم درستنمایی در عبارت (۱۲)، ماتریس اطلاع به صورت $\mathbf{I}_e(\theta|\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_i^T$ تبدیل می‌شود، که در آن $\hat{\mathbf{s}}_i = (\hat{s}_{i,\alpha}, \hat{s}_{i,\beta}, \hat{s}_{i,\lambda})^T$ برداری با درایه‌های

$$\begin{aligned} \hat{s}_{i,\lambda} &= \frac{1}{\hat{\alpha}} \xi(t_i, \hat{\beta}) - \hat{\lambda} \hat{w}_i^{(k)}, \\ \hat{s}_{i,\alpha} &= \frac{\hat{u}_i^{(k)}}{\hat{\alpha}^2} \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right) - \frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}^2} \xi(t_i, \hat{\beta}), \\ \hat{s}_{i,\beta} &= \frac{1}{t_i + \hat{\beta}} - \frac{1}{2\hat{\beta}} - \frac{\hat{u}_i^{(k)}}{2\hat{\alpha}^2} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\hat{\beta}} \right) - \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\alpha}} \left(\sqrt{\frac{t_i}{\hat{\beta}^3}} + \frac{1}{\sqrt{t_i \hat{\beta}}} \right), \end{aligned}$$

است. در نتیجه خطای استاندارد برآوردگر $\hat{\theta}$ برابر $\sqrt{\mathbf{I}_e^{-1}(\theta|\mathbf{t})}$ خواهد بود.

۴ مطالعات عددی

مثال ۲: به منظور بررسی عملکرد برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به دست آمده در بخش قبل، روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای این منظور با در نظر گرفتن $\beta = 1$ ، برای اندازه نمونه‌های $n = 30, 50, 100$ ، نمونه‌هایی از توزیع $SLap - BS(\alpha, \beta, \lambda)$ با پارامترهای $\alpha =$

با استفاده از نمونه تولید شده صورت گرفته است. با انجام این کار به تعداد ۱۰۰۰ بار میانگین توان‌های دوم خطا^{۱۱} (MSE) و اریبی نسبی^{۱۲} (R.Bias) مطلق هر برآوردگر به صورت

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta} - \theta)^2,$$

$$R.Bias(\hat{\theta}) = \frac{1}{\theta} \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^n |\hat{\theta} - \theta|,$$

محاسبه شده است. همانطور که از جدول ۱ ملاحظه می‌شود، میزان میانگین توان‌های دوم خطای برآوردگرها با افزایش حجم نمونه کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش حجم نمونه میانگین برآوردهای حاصله به مقدار واقعی پارامتر نزدیک می‌شود.

مثال ۳: در این مثال توزیع معرفی شده را برای مدل‌سازی داده‌های واقعی مورد بررسی استفاده قرار می‌گیرد. داده‌های شکست تنش از الیاف کربن^{۱۳} برای نخستین بار توسط نیکولاس و پدگت (۲۰۰۶) مورد مطالعه قرار گرفتند. این داده‌ها شامل ۶۶ شکست در تنش الیاف کربن با طول ۵۰ میلی متر هستند. آلزاتره و همکاران (۲۰۱۴) این داده‌ها را برای مقایسه توزیع گاما-نرمال چهار پارامتری با توزیع BS و بتا-بیرنجام-ساندرز (Beta-BS) مورد استفاده قرار دادند. توزیع گاما-نرمال چهار پارامتری دارای تابع چگالی به صورت

$$f(x; \alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \phi(x; \mu, \sigma) (-\log(1 - \Phi(x; \mu, \sigma)))^{\alpha-1} (1 - \Phi(x; \mu, \sigma))^{(1/\beta)-1}$$

است، که در آن $\phi(\cdot; \mu, \sigma)$ و $\Phi(\cdot; \mu, \sigma)$ توابع چگالی و توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ هستند. نتایج برازش توزیع‌های مختلف شامل مقدار برآورد شده پارامترها به همراه خطای استاندارد آنها، مقادیر تابع درستنمایی و معیارهای مناسبت توزیع یعنی AIC و BIC در جدول ۲ آورده شده است. با توجه به مقادیر AIC و BIC ملاحظه می‌شود که توزیع SLap-BS نسبت به سایر توزیع‌ها بهتر به داده‌ها برازش یافته است. بافت‌نگار داده‌ها و نمودار توزیع‌های برازنده شده در شکل ۲، تایید کننده این برتری در

¹¹Mean square error

¹²Relative bias

¹³breaking stress of carbon fibers

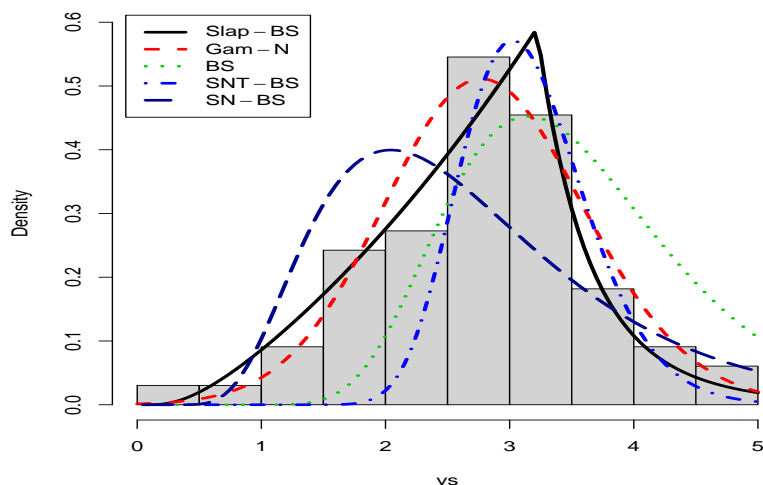
جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی برای $\beta = 1$.

برآورد α			برآورد β			برآورد λ			α	n	λ
Mean	R.Bias	MSE	Mean	R.Bias	MSE	Mean	R.Bias	MSE			
۰٫۱۸۶	۰٫۲۵۷	۰٫۰۰۵	۱٫۰۲۴	۰٫۰۲۴	۰٫۰۰۷	۰٫۰۸۶	۰٫۵۶۵	۰٫۰۷۳	۰٫۲۵	۳۰	۰٫۲
۰٫۳۸۳	۰٫۲۳۲	۰٫۰۱۷	۱٫۰۳۹	۰٫۰۳۹	۰٫۰۲۷	۰٫۱۰۸	۰٫۴۵۵	۰٫۰۷۲	۰٫۵		
۰٫۵۹۲	۰٫۲۱۰	۰٫۰۳۵	۱٫۰۵۵	۰٫۰۵۵	۰٫۰۶۸	۰٫۱۴۲	۰٫۲۸۷	۰٫۰۸۶	۰٫۷۵		
۰٫۸۴۵	۰٫۱۵۴	۰٫۰۴۸	۱٫۰۷۵	۰٫۰۷۵	۰٫۰۹۸	۰٫۱۵۷	۰٫۲۱۳	۰٫۰۶۳	۱		
۰٫۱۹۲	۰٫۲۳۲	۰٫۰۰۳	۱٫۰۲۹	۰٫۰۲۹	۰٫۰۰۶	۰٫۱۲۱	۰٫۶۷۲	۰٫۰۶۰	۰٫۲۵	۵۰	
۰٫۳۹۵	۰٫۲۰۹	۰٫۰۱۴	۱٫۰۵۴	۰٫۰۵۴	۰٫۰۲۶	۰٫۰۸۸	۰٫۵۵۸	۰٫۰۵۴	۰٫۵		
۰٫۶۱۵	۰٫۱۸۴	۰٫۰۲۵	۱٫۰۴۸	۰٫۰۴۸	۰٫۰۴۴	۰٫۱۳۴	۰٫۳۲۵	۰٫۰۴۷	۰٫۷۵		
۰٫۸۵۳	۰٫۱۴۸	۰٫۰۳۷	۱٫۰۳۳	۰٫۰۳۳	۰٫۰۶۸	۰٫۱۷۸	۰٫۱۰۷	۰٫۰۴۸	۱		
۰٫۱۹۷	۰٫۲۱۳	۰٫۰۰۳	۱٫۰۱۷	۰٫۰۱۷	۰٫۰۰۴	۰٫۰۶۰	۰٫۶۹۷	۰٫۰۴۲	۰٫۲۵	۱۰۰	
۰٫۴۰۰	۰٫۲۰۱	۰٫۰۱۱	۱٫۰۲۸	۰٫۰۲۸	۰٫۰۱۵	۰٫۰۸۵	۰٫۵۷۱	۰٫۰۳۵	۰٫۵		
۰٫۶۲	۰٫۱۷۲	۰٫۰۲۰	۱٫۰۴۲	۰٫۰۴۲	۰٫۰۳۱	۰٫۱۱۹	۰٫۴۰۲	۰٫۰۲۸	۰٫۷۵		
۰٫۸۷	۰٫۱۳۳	۰٫۰۲۵	۱٫۰۳۱	۰٫۰۳۱	۰٫۰۴۵	۰٫۱۶۵	۰٫۱۷۴	۰٫۰۲۴	۱		
۰٫۱۸۴	۰٫۲۶۲	۰٫۰۰۵	۱٫۰۶۴	۰٫۰۶۴	۰٫۰۱۳	۰٫۲۲۱۲	۰٫۵۵۷	۰٫۲۷۳	۰٫۲۵	۳۰	۰٫۵
۰٫۳۸۱	۰٫۲۳۷	۰٫۰۱۸	۱٫۱۱۷	۰٫۱۱۷	۰٫۰۵۶	۰٫۲۶۰۱	۰٫۴۵۷۹	۰٫۱۳۷۳	۰٫۵		
۰٫۶۰۱	۰٫۱۹۸	۰٫۰۳۵	۱٫۱۰۵	۰٫۱۰۵	۰٫۰۸۵	۰٫۱۳۵۸	۰٫۲۸۳	۰٫۰۹۴	۰٫۷۵		
۰٫۸۳۷	۰٫۱۶۳	۰٫۰۵۹	۱٫۰۷۴	۰٫۰۷۴	۰٫۱۰۹	۰٫۴۷۱۵	۰٫۰۵۷	۰٫۲۰۲	۱		
۰٫۱۹۲	۰٫۲۳۳	۰٫۰۰۳	۱٫۰۵۷	۰٫۰۵۷	۰٫۰۱۲	۰٫۱۶۰	۰٫۶۷۹	۰٫۱۶۶	۰٫۲۵	۵۰	
۰٫۳۹۲	۰٫۲۱۶	۰٫۰۱۴	۱٫۱۰۵	۰٫۱۰۵	۰٫۰۴۰	۰٫۲۵۱	۰٫۴۹۸	۰٫۱۰۹	۰٫۵		
۰٫۶۱۲	۰٫۱۸۳	۰٫۰۲۶	۱٫۱۰۴	۰٫۱۰۴	۰٫۰۶۷	۰٫۳۳۶	۰٫۳۲۸	۰٫۰۷۹	۰٫۷۵		
۰٫۸۵۴	۰٫۱۴۵	۰٫۰۳۷	۱٫۰۶۹	۰٫۰۶۹	۰٫۰۷۹	۰٫۴۱۷	۰٫۱۶۵	۰٫۰۵۸	۱		
۰٫۱۹۵	۰٫۲۱۸	۰٫۰۰۳	۱٫۰۴۲	۰٫۰۴۲	۰٫۰۱۲	۰٫۱۳۳	۰٫۷۳۳	۰٫۱۶۲	۰٫۲۵	۱۰۰	
۰٫۴۰۱	۰٫۱۹۶	۰٫۰۱۰	۱٫۰۹۶	۰٫۰۹۶	۰٫۰۳۶	۰٫۲۰۴	۰٫۵۹۱	۰٫۱۱۵	۰٫۵		
۰٫۶۲۱	۰٫۱۷۱	۰٫۰۲۰	۱٫۰۹۸	۰٫۰۹۸	۰٫۰۴۸	۰٫۳۱۶	۰٫۳۶۷	۰٫۰۶۱	۰٫۷۵		
۰٫۸۷۲	۰٫۱۲۷	۰٫۰۲۵	۱٫۰۵۸	۰٫۰۵۸	۰٫۰۴۷	۰٫۴۷۶	۰٫۱۸۵	۰٫۰۳۶	۱		
۰٫۱۸۶	۰٫۲۴۱	۰٫۰۰۵	۱٫۱۸۵	۰٫۱۸۵	۰٫۰۴۳	۰٫۳۱۲	۰٫۵۵۴	۰٫۶۵۰	۰٫۲۵	۳۰	۱
۰٫۳۸۱	۰٫۲۲۹	۰٫۰۱۸	۱٫۲۶۷	۰٫۲۶۷	۰٫۱۲۵	۰٫۳۷۶۱	۰٫۵۴۵	۰٫۴۱۲	۰٫۵		
۰٫۶۰۱	۰٫۱۹۸	۰٫۰۳۱	۱٫۲۳۰	۰٫۲۳۰	۰٫۱۵۳	۰٫۶۴۱	۰٫۳۵۸	۰٫۲۴۸	۰٫۷۵		
۰٫۸۳۷	۰٫۱۵۹	۰٫۰۵۶	۱٫۱۴۳	۰٫۱۴۳	۰٫۱۲۶	۰٫۸۵۲	۰٫۱۵۷	۰٫۲۲۱	۱		
۰٫۱۹۱	۰٫۲۵۳	۰٫۰۰۴	۱٫۱۶۲	۰٫۱۶۲	۰٫۰۳۹	۰٫۳۰۵	۰٫۶۹۴	۰٫۵۷۰	۰٫۲۵	۵۰	
۰٫۳۸۹	۰٫۲۲۱	۰٫۰۱۵	۱٫۲۵۴	۰٫۲۵۴	۰٫۱۱۹	۰٫۴۶۵	۰٫۵۳۵	۰٫۳۶۵	۰٫۵		
۰٫۶۰۳	۰٫۱۹۵	۰٫۰۳۱۳	۱٫۲۲۶	۰٫۲۲۶	۰٫۱۴۹	۰٫۶۵۹	۰٫۳۴۱	۰٫۲۳۲	۰٫۷۵		
۰٫۸۴۷	۰٫۱۵۳	۰٫۰۴۵	۱٫۱۳۰	۰٫۱۳۰	۰٫۱۱۵	۰٫۸۶۰	۰٫۱۴۰	۰٫۲۰۱	۱		
۰٫۱۹۴	۰٫۲۲۲	۰٫۰۰۳	۱٫۱۹۰	۰٫۱۹۰	۰٫۰۴۶	۰٫۲۲۱	۰٫۷۱۸	۰٫۶۵۷	۰٫۲۵	۱۰۰	
۰٫۴۰۷	۰٫۱۹۱	۰٫۰۱۰	۱٫۲۹۴	۰٫۲۹۴	۰٫۱۳۲	۰٫۳۸۴	۰٫۶۱۵	۰٫۴۲۷	۰٫۵		
۰٫۶۲۶	۰٫۱۶۵	۰٫۰۲۰	۱٫۲۲۴	۰٫۲۲۴	۰٫۱۰۸	۰٫۶۱۰	۰٫۳۸۹	۰٫۲۰۱	۰٫۷۵		
۰٫۸۸۳	۰٫۱۱۶	۰٫۰۲۴	۱٫۱۵۰	۰٫۱۵۰	۰٫۰۹۵	۰٫۸۹۰	۰٫۲۱۵	۰٫۱۰۹	۱		

برازش داده‌ها است.

جدول ۲. برآورد پارامترها و خطاهای استاندارد (داخل پرانتز) برای داده‌های شکست تنش.

پارامتر	BS	SN - BS	SNT - BS	Gam - N	SLap - BS
α	۰,۴۳۷۱ (۰,۰۳۸۱)	۰,۴۶۴۶ (۰,۰۵۳۷)	۰,۶۷۶۷ (۱,۵۴۰۹)	۰,۸۲۶۳ (۳,۲۵۷۸)	۰,۲۳۵۷ (۰,۴۱۵۲)
β	۲,۵۱۵۴ (۰,۱۳۲۱)	۲,۱۶۷۴ (۱,۳۶۸۹)	۴,۱۰۶۰ (۱,۴۱۰۰)	۰,۶۱۹۰ (۲,۸۳۱۵)	۳,۲۲۰۰ (۱,۱۸۵۲)
$\lambda(\mu)$	-	۰,۴۱۳۱ (۰,۳۶۴۵)	-۴,۸۰۶۶ (۱,۳۶۴۲)	۳,۳۴۶۴ (۱,۱۶۲۱)	-۰,۴۹۵۴ (۰,۸۶۵۲)
$\nu(\sigma)$	-	-	۹۹,۹۹۹ (۳,۰۸۲۹)	۰,۹۶۱۴ (۲,۱۵۹۳)	-
<i>Log.Like</i>	-۱۰۰,۱۹۰۰	-۱۴۴,۵۹۱۵	-۹۱,۰۶۴	-۸۴,۴۳۹۶	-۸۴,۴۱۶۹
<i>AIC</i>	۲۰۴,۳۸	۲۹۵,۱۸۳	۱۹۰,۱۲۸	۱۷۸,۸۷۹۲	۱۷۴,۸۳۴
<i>BIC</i>	۲۰۸,۷۵۹۳	۲۸۹,۱۸۳	۱۹۸,۸۸۶۶	۱۸۵,۶۳۷۸	۱۸۱,۴۰۳



شکل ۲. بافت‌نگار داده‌ها و نمودار توزیع‌های برازش داده شده.

مثال ۴: دسته دوم از داده‌های واقعی مربوط به موسسه تامین اجتماعی مکزیک (IMSS) است که نخستین بار توسط بالاکریشن و همکاران (۲۰۰۹) برای برازش بر روی توزیع BS مورد استفاده قرار گرفته است.

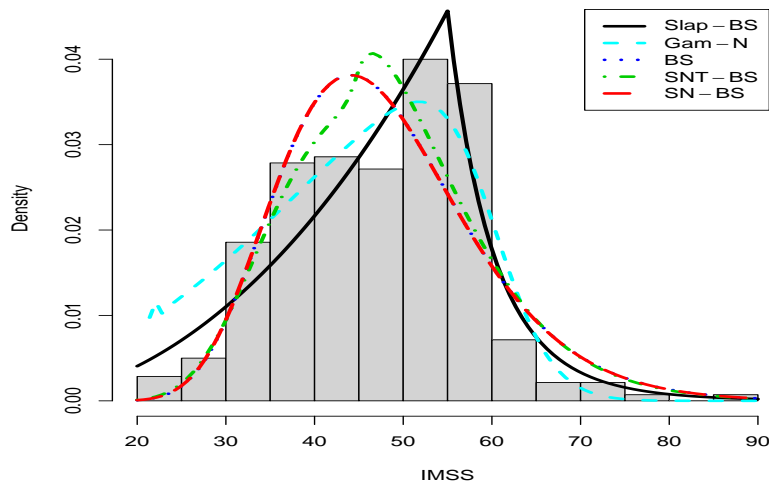
این داده‌ها به مطالعه رفتار توزیعی مرگ و میر افراد بازنشسته و ناتوان برای محاسبه برآورد مالی بلند مدت و کوتاه، مانند ارزیابی از ذخیره ملزم به پرداخت حداقل حقوق بازنشستگی می‌پردازد. داده مربوط به سن مرگ (به سال) زنان بازنشسته با معلولیت موقت است. جدول ۳ نتایج برازش توزیع‌های مختلف شامل برآورد پارامترها به همراه خطای استاندارد آنها، مقادیر تابع درستنمایی و معیارهای AIC و BIC را نشان می‌دهد. بافت‌نگار داده‌ها و نمودار توزیع‌های برازنده شده در شکل ۳، تایید کننده این برتری در برازش داده‌ها است.

جدول ۳. برآورد پارامترها و خطاهای استاندارد (داخل پرانتز) برای داده‌های IMSS.

پارامتر	BS	SN - BS	SNT - BS	Gam - N	SLap - BS
α	۰٫۲۳۰۸ (۰٫۰۰۰۹)	۰٫۲۳۴۴ (۰٫۰۰۰۲)	۰٫۲۳۴۳ (۰٫۱۱۷۳)	۰٫۰۳۹۸ (۰٫۰۰۷۲)	۰٫۱۴۸۴ (۰٫۰۲۴۵)
β	۴۶٫۵۴۴۹ (۰٫۴۰۶۶)	۴۴٫۷۱۳۱ (۰٫۹۶۷۸)	۴۴٫۷۴۲۰ (۰٫۵۶۷۴)	۰٫۶۵۷۷ (۰٫۶۴۳۷)	۵۵٫۰۰۰۰ (۱٫۰۰۰۲۵)
$\lambda(\mu)$	-	۰٫۲۱۶۲ (۰٫۱۴۶۳)	۴٫۱۰۷۸ (۱٫۶۵۸۰)	۵۹٫۹۹۱۷ (۱٫۴۱۷۵)	-۰٫۵۶۳۹ (۰٫۳۴۷۵)
$\nu(\sigma)$	-	-	۰٫۰۸۸۶ (۰٫۰۱۹۰)	۴٫۷۰۲۱ (۰٫۱۰۲۳)	-
Log.Like	-۱۰۶۰٫۵۷۶۰	-۱۰۶۰٫۴۵۸۰	-۱۰۵۷٫۲۵۱۰	-۱۰۵۵٫۱۶۹۰	-۱۰۵۱٫۳۸۰۰
AIC	۲۱۲۵٫۱۵۲۰	۲۱۲۶٫۹۱۶۰	۲۱۲۲٫۵۰۲۰	۲۱۱۸٫۳۳۸۰	۲۱۰۸٫۷۶۰۰
BIC	۲۱۳۲٫۴۲۲۰	۲۱۳۷٫۸۲۰۰	۲۱۳۷٫۰۴۱۰	۲۱۳۲٫۸۷۷۰	۲۱۱۹٫۶۶۵۰

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تعمیم جدیدی از چگالی‌های به فرم بیرن‌بام-ساندرز برپایه توزیع چوله-لاپلاس معرفی شد. برای این توزیع جدید که بیرن‌بام-ساندرز چوله-لاپلاس نام گرفت، برخی ویژگی‌ها مورد بررسی قرار گرفته و برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع با استفاده از الگوریتم EM مورد محاسبه قرار گرفتند. پس از معرفی روشی برای به دست آوردن خطاهای استاندارد برآوردهای درستنمایی، به منظور بررسی عملکرد برآوردها مطالعات شبیه‌سازی مونت کارلو انجام گرفت و مشخص گردید که با افزایش حجم نمونه



شکل ۳. بافت‌نگار داده‌ها به همراه توزیع‌های برازش داده شده.

برآوردگرهای به دست آمده دارای ویژگی‌های مطلوبی هستند. سپس توزیع جدید بر روی دو داده واقعی برازش داده شده و با مقایسه آن با چند توزیع دیگر مشخص گردید که توزیع بدست آمده بر روی داده‌ها برازش مناسبتری را انجام می‌دهد.

یکی از مسایل مهمی که در آن می‌توان از این توزیع بهره برد، برآوردگر بیزی پارامترهای توزیع و یا استفاده از این توزیع به عنوان توزیع پیشین می‌باشد. همچنین به عنوان تعمیمی دیگر از آن، به دلیل آن که این توزیع بسیار مطلوبتر از توزیع بیرن‌بام ساندرز است می‌توان از آن در ساخت توزیع‌های آمیخته استفاده کرد (بالاکریشن، ۲۰۱۱). برای تعمیم بیشتر این توزیع به سایر علوم به خصوص مسایل تحلیل بقا سوال مهمی که مطرح می‌شود آن است که آیا تعمیم‌های توزیع بیرن‌بام ساندرز که با جایگزینی توزیع‌های چوله بدست می‌آیند توزیع حدی فواصل زمانی میان دو عبور فرایندهای دیگری هستند یا خیر؟

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران، سردبیر و ویراستار گرامی مجله برای ارائه پیشنهادهای سازنده، در راستای بهبود این پژوهش، بسیار سپاسگزارند.

مراجع

- Alzaatreh, A., Famoye, F., and Carl Lee, C. (2014), The Gamma-Normal Distribution: Properties and Applications, *Computational Statistics and Data Analysis*, **69**, 67-80.
- Arslan, O. (2010), An Alternative Multivariate Skew Laplace Distribution: Properties and Estimation, *Statistical Papers*, **57**, 865-887.
- Azzalini, A. (1985), A Class of Distributions which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of statistics*, **12**, 171-178.
- Balakrishnan, N., Gupta, R. C., Kundu, D., Leiva, V., and Sanhueza, A. (2011), On Some Mixture Models Based on the Birnbaum-Saunders Distribution and Associated Inference, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 2175-2190.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A., and Vilca, F. (2009), Estimation in the Birnbaum-Saunders Distribution Based on Scale-Mixture of Normals and the EM-Algorithm, *Sort*, **33**, 171-192.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A., and Cabrera, E. (2009), Mixture Inverse Gaussian Distributions and its Transformations, Moments and Applications, *Statistics*, **43**, 91-104.
- Basford, K. E., Greenway D. R., McLachlan G. J., and Peel D. (1997), Standard Errors of Fitted Means under Normal Mixture, *Computational Statistics*, **12**, 1-17.
- Birnbaum, Z. W., and Saunders, S. C. (1969), A New Family of Life Distribution, *Journal of Applied Probability*, **6**, 319-327.
- Dempster, A. P., Laird N. M., and Rubin D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm (with discussion), *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 1-38.
- Díaz-García, J. A., and Leiva-Sánchez, V. (2005), A New Family of Life Distributions Based on the Elliptically Contoured Distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **128**, 445-457.
- Hashemi, F., Amirzadeh, V., and Jamalizadeh, A. (2015), An Extension of the Birnbaum-Saunders Distribution Based on Skew-Normal-t Distribution, *Statistical Research and Training Center*, **12**, 1-37.
- Jørgensen, B. (1982), *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Springer-Verlag, New York.

- Leiva, V., Vilca, F., Balakrishnan, N., and Sanhueza, A. (2010), A Skewed Sinh-Normal Distribution and Its Properties and Application to Air Pollution, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **39**, 426-443.
- Louis, T. A. (1982), Finding the Observed Information when Using the EM Algorithm, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, **44**, 226-232.
- Meng, X. L., and Rubin, D. B. (1993), Maximum Likelihood Estimation via the ECM Algorithm: A General Framework, *Biometrika*, **80**, 267-278.
- Nadarajah, S., and Kotz, S. (2003), Skewed Distributions Generated by the Normal Kernel, *Statistics and Probability Letters*, **65**, 269-277.
- Nichols, M. D., and Padgett, W. J. (2006), A Bootstrap Control for Weibull Percentiles, *Quality and Reliability Engineering International*, **22**, 141-151.
- Park, C., and Padgett, W. J. (2005), Accelerated Degradation Models for Failure Based on Geometric Brownian Motion and Gamma Processes, *Lifetime Data Analysis*, **11**, 511-527.
- Vilca, F., Santana, L., Leiva, V., and Balakrishnan, N. (2011), Estimation of Extreme Percentiles in Birnbaum-Saunders Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1665-1678.