مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۲۹۵ – ۳۲۱
DOI: 10.29252/jss.12.2.295

آنتروپی مانده تسالیس و اندازه واگرایی آن مبتنی بر تابع چندک

وحیده احراری، سیمیندخت براتپور و آرزو حبیبی راد

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۱۴   تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: آنتروپی نقش اساسی در مباحث قابلیت اعتماد و مطالعات طول عمر سیستم‌ها ایفا می‌کند. در مطالعات اخیر توجه زیادی به استفاده از تابع چندک، خواص و کاربردهای آن به عنوان رویکردی جایگزین در تشخیص مدل‌های آماری و تحلیل داده‌ها شده است. در مقاله حاضر آنتروپی مانده تسالیس مبتنی بر تابع چندک معرفی و به بررسی خواص آن در مدل‌های پیوسته پرداخته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع‌های طول عمر خاص، صورت‌هایی بسته برای آنتروپی مانده تسالیس چندکی به‌دست آورده و خواص یکنوایی آنها را مورد مطالعه قرار داده و به مشخص‌سازی بر اساس این آنتروپی پرداخته شده است. همچنین اندازه واگرایی تسالیس بر مبنای تابع چندک و شکل چندکی آن برای متغیر مانده عمر به‌دست آورده می‌شود. در نهایت یک برآوردگر برای آنتروپی مانده تسالیس چندکی معرفی شده و با مطالعه شبیه‌سازی، عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی مانده تسالیس، آنتروپی شانون، اندازه واگرایی تسالیس، مانده طول عمر، تابع چندک، ترتیب‌های تصادفی و مشخص‌سازی.

۱ مقدمه

شانون (۱۹۴۸) معیاری از عدم حتمیت را که امروزه کاربردهای بسیاری در رشته‌های مختلف دارد، معرفی کرد. برای متغیر تصادفی پیوسته نامنفی X با تابع توزیع $F(t) = P(X \leq t)$، تابع چگالی احتمال

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: سیمیندخت براتپور، baratpour@um.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 94A17، 62E10، 62N05

$f(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(t) = P(X > t)$، آنتروپی شانون متغیر تصادفی X به‌صورت

$$H(X) = -\int_{\circ}^{\infty} f(x) \log f(x) dx = -E(\log f(X)), \tag{۱}$$

تعریف می‌شود. در سال‌های اخیر تعمیم‌هایی از مفهوم آنتروپی در مباحث نظریه اطلاع، قابلیت اعتماد و متون آمار و احتمال، ارائه شده است که در ادامه برخی از آنها معرفی خواهند شد.

یکی از اندازه‌های اطلاع برای مقایسه دو توزیع و یکی از معیارهای اندازه‌گیری فاصله بین دو توزیع احتمال، اطلاع تشخیص کولبک–لیبلر است که اولین بار توسط کولبک و لیبلر (۱۹۵۱) معرفی شد. برای دو متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X و Y به ترتیب با توابع چگالی احتمال f_X و g_Y، اطلاع کولبک – لیبلر به عنوان میزان تفاوت توزیع‌های این دو متغیر، عبارتست از

$$D_{KL}(X,Y) = \int_{\circ}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

در مواردی که مدت زمان یک دوره مطالعاتی به عنوان متغیر اصلی مورد علاقه در زمینه‌های زیادی از جمله قابلیت اعتماد، تحلیل بقا، اقتصاد، تجارت و غیره در نظر گرفته می‌شود، اندازه‌های اطلاع تابعی از زمان هستند و در نتیجه پویا می‌باشند. بر پایه همین ایده، ابراهیمی و پلری (۱۹۹۵) آنتروپی شانون متغیر مانده طول عمر X را در زمان t با استفاده از رابطه (۱) به‌صورت

$$H(X;t) = -\int_{t}^{\infty} \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} \log \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} dx, \tag{۲}$$

تعریف کردند. توجه شود که $H(X;t) = H(X_t)$، که در آن $X_t = (X - t \mid X > t)$ عمر مانده سیستم تحت شرط $X > t$، می‌باشد. واضح است که اگر $t \to \circ$، آنگاه آنتروپی مانده به آنتروپی شانون میل می‌کند.

در سال‌های اخیر، ابراهیمی (۱۹۹۶) و بلزونس و همکاران (۲۰۰۴)، به مشخص‌سازی بر اساس آنتروپی مانده پرداختند و برخی از ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی و سالخوردگی آن را بیان کردند. اسدی و ابراهیمی (۲۰۰۰)، نتایج جدیدی را در رابطه با آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکوردی بر اساس آنتروپی مانده به‌دست آوردند. سانوج و سانکاران (۲۰۱۲) آنتروپی مانده را بر مبنای تابع چندک تعیین کردند و ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار دادند. ناندا و همکاران (۲۰۱۴)، نتایجی از مشخص‌سازی برخی

توزیع‌های خاص را به همراه برخی ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی بر پایه آنتروپی مانده رنی مبتنی بر تابع چندک به‌دست آوردند.

یکی از تعمیم‌های آنتروپی شانون، آنتروپی تسالیس (۱۹۸۸) است که به‌صورت

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha - 1}[1 - \int_0^\infty f^\alpha(x)dx], \quad \alpha \neq 1,\ \alpha > 0, \tag{۳}$$

تعریف می‌شود. وقتی $\alpha \to 1$، آنتروپی تسالیس به آنتروپی شانون میل می‌کند. آنتروپی مانده تسالیس را با استفاده از رابطه (۳) می‌توان به‌صورت

$$H_\alpha(X;t) = \frac{1}{\alpha - 1}[1 - \int_t^\infty (\frac{f(x)}{\bar{F}(t)})^\alpha dx], \quad \alpha \neq 1,\ \alpha > 0. \tag{۴}$$

تعریف کرد. حال مفاهیم ذکر شده بر حسب تابع چندک بیان می‌شوند. برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(x)$، تابع چندک به‌صورت

$$Q(u) = F^{-1}(u) = inf\{x \mid F(x) \geq u\},\ 0 \leq u \leq 1, \tag{۵}$$

تعریف می‌شود و به آن چندک مرتبه u ام توزیع نیز می‌گویند. در مطالعات آماری، استفاده از تابع چندک به عنوان روشی برای مدل‌بندی و تحلیل داده‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در مطالعات قابلیت اعتماد سعی شده است مفاهیم و اندازه‌های اساسی آن مبتنی بر تابع چندک بازنویسی شوند. بیان این مفاهیم بر اساس تابع چندک دارای خواص ویژه‌ای است. به عنوان مثال، اگر x_u چندک مرتبه u ام ($0 < u < 1$) توزیع طول عمر باشد، آنگاه در زمان x_u، $u \times 100$ درصد واحدهای جامعه دچار خرابی می‌شوند، یا به‌عبارت دیگر، احتمال خرابی یک واحد قبل از چندک مرتبه u برابر u است. در مواقعی‌که وجود یک داده دورافتاده یا یک مشاهده حدی بر روی اندازه‌های قابلیت اعتماد می‌تواند تاثیر قابل توجهی داشته باشد، استفاده و کارکردن با اندازه‌های چندکی که کمتر تحت تاثیر مشاهدات حدی یا مشاهدات دورافتاده قرار می‌گیرند، مناسب‌تر و راحت‌تر است. از جمله منابع که می‌توان به آنها مراجعه نمود عبارتند از نیر و سانکاران (۲۰۰۹)، سانکاران و نیر (۲۰۰۹)، نیر و همکاران (۲۰۱۱)، سانکاران و همکاران (۲۰۱۰) و ناندا و همکاران (۲۰۱۴).

سانوج و سانکاران (۲۰۱۲) با استفاده از رابطه (۵) و تغییر متغیر $x = Q(p)$ روابط (۱) و (۲) را به‌ترتیب به‌صورت

$$H(X) = \int_{۰}^{۱} \log q(p)dp,$$
$$H(u) = H(X; Q(u)) = \log(۱ - u) + (۱ - u)^{-۱} \int_{۰}^{۱} \log q(p)dp,$$

بیان کردند، که در آن $q(p)$ مشتق تابع $Q(p)$ است و تابع چگالی چندک نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که بر خلاف آنتروپی مانده که توزیع متغیر تصادفی را به‌طور یکتا مشخص نمی‌کند، آنتروپی مانده بر مبنای تابع چندک، توزیع متغیر تصادفی را به‌طور یکتا مشخص می‌کند. سانوج و همکاران (۲۰۱۳) نیز خواص آنتروپی متغیر طول عمر گذشته را بر اساس تابع چندک بررسی کردند. سانکاران و همکاران (۲۰۱۶) نیز با استفاده از رابطه (۵)، تغییر متغیر $x = Q_X(p)$ و عبارت

$$G(F^{-۱}(u)) = G(Q_X(u)), \ ۰ \leq u \leq ۱,$$

که در آن G تابع توزیع متغیر تصادفی Y و Q_X تابع چندک متغیر تصادفی X است، اندازه واگرایی کولبک-لیبلر را بر اساس تابع چندک به‌صورت

$$D^*_{KL}(X, Y) = -\int_{۰}^{۱} \log(\frac{d}{dp}(Q_Y^{-۱}(Q_X(p))))dp,$$

بیان کردند. این اندازه پیشنهادی، ویژگی‌ها و مزایای مختلفی دارد. اولا در مواردی که توابع توزیع شکل پیچیده‌ای دارند اما چندک‌های متناظر شکل ساده‌تری دارند، محاسبه اندازه واگرایی آسان‌تر است. ثانیا این رویکرد، شیوه جایگزینی را در مطالعه اندازه واگرایی ارائه می‌دهد. به‌علاوه چندک‌ها ویژگی‌های خاصی دارند که توابع توزیع ندارند و کاربرد این ویژگی‌ها نتایج جدید و دیدگاه بهتری را درباره ویژگی‌های اندازه واگرایی که به‌دست آوردن آن به روش معمول مشکل است، ارائه می‌دهد.

در این مقاله، آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک معرفی و خواص مهم آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۲، صورت‌های بسته‌ای برای آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک ارائه می‌شود و نشان می‌دهیم اندازه تعریف شده، توزیع متغیر تصادفی را به‌طور یکتا مشخص می‌کند و مشخص‌سازی

بر پایه این آنتروپی را برای برخی از توزیع‌های طول عمر بیان می‌کنیم. رابطه ترتیب‌های تصادفی آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک در بخش ۳ ارائه می‌شود. در بخش ۴، اندازه واگرایی تسالیس بر اساس تابع چندک به همراه برخی از ویژگی‌های مهم آن بیان شده و شکل چندکی این اندازه برای متغیر تصادفی مانده عمر به‌دست آورده می‌شود. در بخش ۵ به معرفی برآوردگری برای آنتروپی مذکور پرداخته و عملکرد آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی با تابع توزیع $F(x)$، تابع چندک $Q(u)$ و تابع چگالی چندک $q(u)$ باشد، با استفاده از رابطه (۵)،

$$F(Q(u)) = u, \quad ۰ \leq u \leq ۱,$$

که با مشتق‌گیری از آن بر حسب u، نتیجه می‌شود

$$q(u)f(Q(u)) = ۱. \tag{۶}$$

همچنین تابع خطر چندکی به‌صورت

$$R(u) = r(Q(u)) = \frac{f(Q(u))}{\bar{F}(Q(u))} = [(۱-u)q(u)]^{-۱}, \; ۰ < u < ۱, \tag{۷}$$

است، که نرخ شکست را در فاصله کوتاهی بعد زمان $Q(u)$ به شرط فعال بودن تا نقطه $۱۰۰ \times (۱-u)$ درصد توزیع را نشان می‌دهد (سانوج و سانکاران، ۲۰۱۲؛ سانوج و همکاران، ۲۰۱۳). بنابراین آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک، عبارتست از

$$\begin{aligned} H_\alpha(X;Q(u)) &= \frac{۱}{\alpha-۱}[۱-\int_{Q(u)}^{\infty}(\frac{f(x)}{\bar{F}(Q(u))})^\alpha dx] \\ &= \frac{۱}{\alpha-۱}[۱-\int_{u}^{۱}(\frac{f(Q(p))}{۱-u})^\alpha q(p)dp] \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1}{\alpha-1}[1-\frac{1}{(1-u)^{\alpha}}\int_u^1 [q(p)]^{-(\alpha-1)}dp],\ \alpha\neq 1,\ \alpha>0 \qquad (8)$$

در رابطه (۸) وقتی $u\to 0$، آنتروپی تسالیس چندکی به‌دست می‌آید که در واقع صورت چندکی رابطه (۳) است. توزیع‌هایی هستند که تابع توزیع یا تابع چگالی آن‌ها صورت بسته‌ای ندارند، لذا آنتروپی آن‌ها قابل محاسبه نیست اما تابع چندک یا تابع چگالی چندک آن‌ها صورت بسته‌ای داشته و آنتروپی چندکی آن‌ها قابل محاسبه است (نیر و همکاران، ۲۰۱۳).

مثال ۱: توزیع دیویس[1] دارای تابع چندک

$$Q_X(u)=C\frac{u^{\lambda_1}}{(1-u)^{\lambda_2}},\quad 0\leq u<1,$$

است، که در آن $C>0$ پارامتر مقیاس و λ_1 و λ_2 مثبت و پارامترهای شکل هستند. گیلچریست (۲۰۰۰) آن را توزیع توانی پارتو نامید. اگرچه تابع توزیع یا تابع چگالی X، صورت بسته‌ای ندارند، اما تابع چگالی چندک آن به‌صورت

$$q_X(u)=C\frac{u^{\lambda_1-1}}{(1-u)^{\lambda_2+1}}[\lambda_1(1-u)+\lambda_2 u],$$

است. لذا آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک که در حالت غیر چندکی برای آن قابل محاسبه نیست، وقتی $C=1$، عبارت است از

$$H_\alpha(X;Q(u))=\frac{1}{\alpha-1}[1-\frac{1}{(1-u)^{\alpha}}\int_u^1 [\frac{p^{(\lambda_1-1)}(\lambda_1(1-p)+\lambda_2 p)}{(1-p)^{\lambda_2+1}}]^{-(\alpha-1)}dp],$$

که انتگرال آن با روش‌های عددی قابل محاسبه است. رابطه (۸) را می‌توان به‌صورت

$$\int_u^1 [q(p)]^{-(\alpha-1)}dp=(1-u)^{\alpha}[1-(\alpha-1)H_\alpha(X;Q(u))], \qquad (9)$$

[1] Davies

بازنویسی کرد. با مشتق‌گیری از رابطه (۹) نسبت به u تابع چگالی چندک به‌صورت

$$q(u) = \frac{1}{1-u}[\alpha(1-(\alpha-1)H_\alpha(X;Q(u))) + (\alpha-1)(1-u)H'_\alpha(X;Q(u))]^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$

حاصل می‌شود. با وجود اینکه آنتروپی مانده تسالیس توزیع متغیر تصادفی را به‌طور یکتا مشخص نمی‌کند، با داشتن آنتروپی مانده تسالیس چندکی، می‌توان تابع چگالی چندک را به‌طور یکتا مشخص نمود.

برای تعدادی از توزیع‌های طول عمر معروف روابط مربوط به آنتروپی مانده تسالیس بر اساس تابع چندک در جدول ۱ ارائه شده است. قضیه زیر نشان می‌دهد آنتروپی مانده تسالیس چندکی، توزیع متغیر تصادفی را به‌طور یکتا مشخص می‌کند.

قضیه ۱: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته نامنفی با تکیه‌گاه مشترک χ و به‌ترتیب دارای توابع توزیع F_X و F_Y و توابع چندک Q_X و Q_Y باشند، آن‌گاه $F_X(x) = F_Y(x),\ x \in \chi$ است، اگر و تنها اگر

$$H_\alpha(X;Q_X(u)) = H_\alpha(Y;Q_Y(u)),\ 0 < u < 1.$$

برهان: برای اثبات طرف اول قضیه ابتدا فرض کنید $F_X(x) = F_Y(x),\ x \in \chi$،

$$Q_X(u) = Q_Y(u),\ 0 < u < 1,$$

بنابراین $q_X(u) = q_Y(u),\ 0 < u < 1$ و داریم

$$\frac{1}{(1-u)^\alpha}\int_u^1 [q_X(p)]^{-(\alpha-1)}dp = \frac{1}{(1-u)^\alpha}\int_u^1 [q_Y(p)]^{-(\alpha-1)}dp. \qquad (10)$$

در نتیجه $H_\alpha(X;Q_X(u)) = H_\alpha(Y;Q_Y(u))$ برای اثبات عکس، فرض کنید رابطه (۱۰) برقرار باشد، با مشتق‌گیری از آن داریم

$$[q_X(u)]^{-(\alpha-1)} = [q_Y(u)]^{-(\alpha-1)},\ 0 < u < 1,$$

لذا $q_X(u)=q_Y(u),\ \circ<u<\text{۱}$ و در نتیجه $Q_X(u)=Q_Y(u),\ \circ<u<\text{۱}$ بنابراین

$$F_X(u)=F_Y(u),\ \circ<u<\text{۱}.$$

حال به مشخص‌سازی یک خانواده از توزیع‌ها بر اساس آنتروپی مانده تسالیس چندکی پرداخته می‌شود.

قضیه ۲: متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی چندک

$$q_X(u)=Ku^{-B}(\text{۱}-u)^{-(A+B)},\quad K>\circ, \tag{۱۱}$$

است، اگر و تنها اگر آنتروپی مانده تسالیس چندکی آن برابر

$$\begin{aligned}H_\alpha(X;Q_X(u)) &= \frac{\text{۱}}{\alpha-\text{۱}}[\text{۱}-(\text{۱}-u)^{-\alpha}K^{-(\alpha-\text{۱})}D\\ &\times\ (\text{۱}-\frac{\text{۱}}{D}Beta(u;B(\alpha-\text{۱})+\text{۱},(\alpha-\text{۱})(A+B)+\text{۱}))],\end{aligned}$$

باشد، که در آن A و B ثابت‌های حقیقی، $Beta(x;a,b)=\int_\circ^x t^{a-\text{۱}}(\text{۱}-t)^{b-\text{۱}}dt$ تابع بتای ناقص،

$$D=[\Gamma(B(\alpha-\text{۱})+\text{۱})\Gamma((\alpha-\text{۱})(A+B)+\text{۱})]/\Gamma((\alpha-\text{۱})(A+\text{۲}B)+\text{۲})$$

و $\Gamma(x)=\int_\circ^\infty t^{x-\text{۱}}e^{-t}dt$ است.

برهان: طرف اول قضیه با به کارگیری رابطه (۸) و تابع بتای ناقص نتیجه می‌شود. طرف عکس آن نیز با توجه به قضیه ۱ همواره برقرار است.

با توجه به خانواده توزیع معرفی شده در رابطه (۱۱) می‌توان چندین توزیع مشهور را مشخص سازی کرد، از جمله به ازای $B=\circ$ و $A=\text{۱}$ توزیع نمایی و به ازای $B=\circ$ و $A=\circ$ توزیع یکنواخت مشخص‌سازی می‌شود. هرگاه $B=\circ$ و $A=\frac{\text{۲}a+\text{۱}}{a+\text{۱}}$ توزیع پارتو تعمیم‌یافته حاصل می‌شود و به‌ازای مقادیر $B=\text{۱}-\frac{\text{۱}}{\beta}$ و $A=\frac{\text{۱}}{\beta}-\text{۱}$ توزیع توانی و به‌ازای $B=\text{۱}$ و $A=\text{۱}$ توزیع نمایی منفی به‌دست می‌آید.

جدول ۱: توابع چندک و آنتروپی مانده تسالیس بر مبنای چندک

توزیع	تابع توزیع	تابع چندک	آنتروپی مانده تسالیس چندکی
نمایی	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x};\ x > 0; \lambda > 0$	$-\frac{1}{\lambda}\log(1-u)$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\alpha}]$
یکنواخت	$F(x) = \frac{x-a}{b-a};\ a \leq x \leq b$	$a + u(b-a)$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - (b-a)^{-(\alpha-1)}(1-u)^{-(\alpha-1)}]$
پارتو نوع یک	$F(x) = 1 - (\frac{x}{\sigma})^{-\alpha_1};$ $x > \sigma > 0; \alpha_1 > 0$	$\sigma(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_1}}$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{(\frac{\sigma}{\alpha_1})^{-(\alpha-1)}(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha_1}}}{(\alpha-1)(\frac{1}{\alpha_1}+1)+1}]$
پارتو نوع دو	$F(x) = 1 - \alpha_1^c(x+\alpha_1)^{-c};$ $x > 0; \alpha_1, c > 0$	$\alpha_1[(1-u)^{-\frac{1}{c}} - 1]$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{(\frac{\alpha_1}{c})^{-(\alpha-1)}(1-u)^{\frac{\alpha-1}{c}}}{(\alpha-1)(\frac{1}{c}+1)+1}]$
توانی	$F(x) = (\frac{x}{\alpha_1})^{\beta};$ $0 \leq x \leq \alpha_1; \alpha_1, \beta > 0$	$\alpha_1 u^{\frac{1}{\beta}}$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{(\frac{\alpha_1}{\beta})^{-(\alpha-1)}[1-u^{(\alpha-1)(1-\frac{1}{\beta})+1}]}{(1-u)^{\alpha}[(\alpha-1)(1-\frac{1}{\beta})+1]}]$
بتای بازمقیاسیده	$F(x) = 1 - (1 - \frac{x}{R})^c;$ $0 \leq x \leq R; c, R > 0$	$R[1 - (1-u)^{\frac{1}{c}}]$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{(\frac{R}{c})^{-(\alpha-1)}(1-u)^{\frac{1-\alpha}{c}}}{(\alpha-1)(1-\frac{1}{c})+1}]$
نمایی منفی	$F(x) = e^{\lambda x};\ \lambda > 0; x < 0$	$\frac{1}{\lambda}\log u$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}(1-u)^{-(\alpha)}(1-u^{\alpha})}{\alpha}]$
پارتو تعمیم یافته	$F(x) = 1 - (1 + \frac{ax}{b})^{-\frac{a+1}{a}};$ $x > 0; b > 0; a > -1$	$\frac{b}{a}[(1-u)^{-\frac{a}{a+1}} - 1]$	$\frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{(\frac{b}{a+1})^{-(\alpha-1)}(1-u)^{\frac{(\alpha-1)a}{a+1}}}{(\alpha-1)(\frac{a}{a+1}+1)+1}]$

در قضیه بعدی توزیع نمایی به‌صورت مستقیم و بدون استفاده از قضیه ۱ مشخص‌سازی می‌شود.

قضیه ۳: متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با میانگین $۱/\lambda$ است، اگر و تنها اگر

$$H_\alpha(X; Q_X(u)) = c, \quad \forall\, ۰ < u < ۱,$$

که در آن c مقدار ثابتی است.

برهان: طرف اول قضیه با توجه به جدول ۱ نتیجه می‌شود. برای اثبات طرف عکس با مشتق‌گیری از رابطه (۸) نسبت به u و مساوی صفر قرار دادن آن،

$$\alpha \int_u^۱ q(p)^{-(\alpha-۱)} dp = (۱-u) q^{-(\alpha-۱)}(u). \tag{۱۲}$$

با مشتق‌گیری مجدد از رابطه (۱۲) نسبت به u و انجام محاسبات جبری داریم

$$\frac{q'(u)}{q(u)} = \frac{۱}{۱-u}. \tag{۱۳}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۳) نسبت به u، عبارت $\log q(u) = -\log(۱-u) + c$ حاصل می‌شود. در نتیجه $q(u) = (۱-u)^{-۱} e^c$. حال اگر قرار داده شود $c = -\log\lambda$، توزیع نمایی با پارامتر λ نتیجه می‌شود.

۳ خواص یکنوایی و ترتیبی آنتروپی مانده تسالیس چندکی

سانوج و سانکاران (۲۰۱۲) خواص یکنوایی و ترتیبی آنتروپی مانده شانون را بررسی کردند. سانوج و همکاران (۲۰۱۳) نیز خواص یکنوایی و ترتیبی آنتروپی گذشته شانون را مورد مطالعه قرار دادند. در این بخش، خواص یکنوایی و ترتیبی آنتروپی مانده تسالیس چندکی بررسی می‌شود، سپس با توجه به این خواص، قضایا و تعاریفی بیان می‌شوند.

تعریف ۱: متغیر تصادفی X دارای خاصیت آنتروپی مانده تسالیس چندکی صعودی (نزولی) است، هرگاه $H_\alpha(X; Q_X(u))$ نسبت به u صعودی (نزولی) باشد.

قضیه ۴: اگر $H_\alpha(X;Q_X(u))$ بر حسب u صعودی (نزولی) باشد، آنگاه:

$$H_\alpha(X;Q_X(u)) \geq (\leq)[\frac{1}{\alpha-1} - \frac{(R(u))^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)}]. \tag{14}$$

که در آن $R(u)$ تابع خطر چندکی است (رابطه (۷)).

برهان: با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۸) نسبت به u داریم

$$\begin{aligned} H'_\alpha(X;Q_X(u)) &= -(\frac{\alpha}{\alpha-1})(1-u)^{-(\alpha+1)}\int_u^1 q^{-(\alpha-1)}(p)dp \\ &+ \frac{(1-u)^{-\alpha}}{(\alpha-1)[q(u)]^{\alpha-1}} \\ &= \alpha(1-u)^{-1}H_\alpha(X;Q_X(u)) - \frac{\alpha(1-u)^{-1}}{\alpha-1} \\ &+ \frac{(1-u)^{-\alpha}}{(\alpha-1)[q(u)]^{\alpha-1}} \\ &= \alpha(1-u)^{-1}H_\alpha(X;Q_X(u)) - \frac{\alpha(1-u)^{-1}}{\alpha-1} \\ &+ \frac{(1-u)^{-1}}{(\alpha-1)[R(u)]^{\alpha-1}}. \end{aligned} \tag{15}$$

بنابراین اگر $H_\alpha(X;Q_X(u))$ نسبت به u صعودی (نزولی) باشد، آنگاه نامساوی (۱۴) نتیجه می‌شود.

لم ۱: (ناندا و همکاران، ۲۰۱۴) فرض کنید f و g توابعی باشند که $f(u,x) : R_+^2 \to R_+$ و $g(x) : R_+ \to R_+$. اگر $\int_u^\infty f(u,x)dx$ بر حسب u صعودی و $g(x)$ بر حسب x صعودی (نزولی) باشد، در این صورت، $\int_u^\infty f(u,x)g(x)dx$ بر حسب u صعودی (نزولی) است، در صورتی‌که انتگرال موجود باشد.

قضیه ۵: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی باشد و $\phi(x)$ یک تابع نامنفی ، صعودی و محدب (مقعر) باشد. اگر $Y=\phi(X)$، آنگاه:

(الف) برای $\alpha > 1$، اگر $H_\alpha(X;Q_X(u))$ بر حسب u نزولی، آنگاه $H_\alpha(Y;Q_Y(u))$ بر حسب u صعودی (نزولی) است.

(ب) برای $0 < \alpha < 1$، اگر $H_\alpha(X;Q_X(u))$ بر حسب u نزولی، آنگاه $H_\alpha(Y;Q_Y(u))$ بر حسب u نزولی (صعودی) است.

برهان: قضیه را برای $\alpha > ۱$ ثابت کرده، برای $۰ < \alpha < ۱$ نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود. ابتدا فرض کنید $H_\alpha(X; Q_X(u))$ تابعی نزولی بر حسب u باشد، بنابراین، با توجه به رابطه (۸)،

$$\frac{۱}{\alpha - ۱}\int_u^۱ \frac{[q_X(p)]^{-(\alpha-۱)}}{(۱-u)^\alpha}dp,$$

بر حسب u تابعی صعودی است. از طرفی اگر $g(y)$ تابع چگالی احتمال $Y = \phi(X)$ باشد، آنگاه $g(y) = \frac{f(\phi^{-۱}(y))}{\phi'(\phi^{-۱}(y))}$، بنابراین

$$g(Q_Y(u)) = \frac{۱}{q_Y(u)} = \frac{f(Q(u))}{\phi'(Q(u))} = \frac{۱}{q_X(u)\phi'(Q(u))}. \qquad (۱۶)$$

لذا آنتروپی مانده تسالیس برای متغیر تصادفی Y با استفاده از (۱۶) عبارتست از

$$\begin{aligned} H_\alpha(Y; Q_Y(u)) &= \frac{۱}{\alpha-۱} - \frac{(۱-u)^{-\alpha}}{\alpha-۱}\int_u^۱ [q_Y(p)]^{-(\alpha-۱)}dp \\ &= \frac{۱}{\alpha-۱} - \frac{۱}{\alpha-۱}\int_u^۱ \frac{[q_X(p)]^{-(\alpha-۱)}}{(۱-u)^\alpha}[\phi'(Q_X(p))]^{-(\alpha-۱)}dp. \end{aligned}$$

چون $\alpha > ۱$ و ϕ تابعی محدب (مقعر) است، بنابراین $[\phi'(Q_X(p))]^{-(\alpha-۱)}$ نزولی (صعودی) است، لذا با توجه به لم ۱، عبارت

$$\frac{۱}{\alpha-۱}\int_u^۱ \frac{[q_X(p)]^{-(\alpha-۱)}}{(۱-u)^\alpha}[\phi'(Q_X(p))]^{-(\alpha-۱)}dp,$$

بر حسب u نزولی (صعودی) است، بنابراین $H_\alpha(Y; Q_Y(u))$ بر حسب u صعودی (نزولی) است.

قضیه ۶: (الف) اگر $Q_X(u)$ تابعی محدب بر حسب u باشد و $۰ < \alpha < ۱$، آنگاه $H_\alpha(X; Q_X(u))$ بر حسب u صعودی است.

(ب) اگر $Q_X(u)$ تابعی مقعر بر حسب u باشد و $\alpha > ۱$، آنگاه $H_\alpha(X; Q_X(u))$ بر حسب u نزولی است.

برهان: (الف) از $p > u$ و با توجه به اینکه $Q_X(u)$ تابعی محدب بر حسب u است، داریم

$$\int_u^1 [q(p)]^{-(\alpha-1)}dp > (1-u)[q(u)]^{-(\alpha-1)},$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(\frac{\alpha}{\alpha-1})(1-u)^{-(\alpha+1)}\int_u^1 [q(p)]^{-(\alpha-1)}dp &< (\frac{\alpha}{\alpha-1})(1-u)^{-\alpha}[q(u)]^{-(\alpha-1)}\\ &< \frac{(1-u)^{-\alpha}}{\alpha-1}[q(u)]^{-(\alpha-1)},\end{aligned}$$

لذا با استفاده از رابطه (۱۵) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. قسمت ب قضیه نیز مشابه الف ثابت می‌شود.

مثال ۲: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع وارون نمایی با تابع توزیع $F(t) = e^{-\lambda/t}; t > 0$ و تابع چندک $Q(u) = -\frac{\lambda}{\log u}$ باشد. اگر $Y = \phi(X) = X^\beta$، آنگاه Y دارای توزیع وارون وایبل با تابع توزیع $F(t) = e^{-\lambda/t^\beta}; t > 0$ است. برای توزیع وارون نمایی، $q(u) = \frac{\lambda}{u(\log u)^2}$، لذا با استفاده از روابط (۸) و (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}H'_\alpha(X;Q_X(u)) &= -\frac{\alpha(1-u)^{-(\alpha+1)}}{\alpha-1}\int_u^1 (\frac{\lambda}{p(\log p)^2})^{-(\alpha-1)}dp\\ &+ \frac{(1-u)^{-\alpha}}{\alpha-1}(\frac{\lambda}{u(\log u)^2})^{-(\alpha-1)}.\end{aligned}$$

از $p > u$، نتیجه می‌شود $p(\log p)^2 > u(\log u)^2$، بنابراین برای $\alpha > 1$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(1-u)^{-(\alpha+1)}}{\alpha-1}\int_u^1 (\frac{\lambda}{p(\log p)^2})^{-(\alpha-1)}dp &> \frac{\alpha(1-u)^{-\alpha}}{\alpha-1}(\frac{\lambda}{u(\log u)^2})^{-(\alpha-1)}\\ &> \frac{(1-u)^{-\alpha}}{\alpha-1}(\frac{\lambda}{u(\log u)^2})^{-(\alpha-1)},\end{aligned}$$

درنتیجه $H_\alpha(X;Q_X(u))$ نزولی بر حسب u است. حال اگر $\beta > 1$، آنگاه ϕ تابعی محدب است. لذا با استفاده از قضیه ۵، $H_\alpha(Y;Q_Y(u))$ بر حسب u صعودی است و اگر $0 < \beta < 1$، آنگاه ϕ تابعی مقعر است و با توجه به قضیه ۵، $H_\alpha(Y;Q_Y(u))$ برحسب u نزولی است.

تعریف ۲: هرگاه برای هر $\circ \leq u \leq ۱$، $H_\alpha(X; Q_X(u)) \leq H_\alpha(Y; Q_Y(u))$، آن‌گاه گفته می‌شود متغیر تصادفی X در ترتیب آنتروپی مانده تسالیس چندکی از متغیر تصادفی Y کمتر است و با نماد $X \leq_{TQE} Y$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳: هرگاه برای هر $\circ \leq u \leq ۱$، $R_X(u) \geq R_Y(u)$، آن‌گاه گفته می‌شود متغیر تصادفی X در ترتیب نرخ خطر چندکی از متغیر تصادفی Y کمتر است و با نماد $X \leq_{QFR} Y$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۷: برای هر $\alpha > \circ$، اگر $X \leq_{QFR} Y$، آن‌گاه $X \leq_{TQE} Y$.

برهان: قضیه برای $\alpha > ۱$ اثبات می‌شود، برای $\circ < \alpha < ۱$ نیز به‌طور مشابه قابل اثبات است. طبق فرض قضیه $R_X(p) \geq R_Y(p)$، لذا داریم

$$\int_u^۱ [R_X(p)]^{\alpha-۱} dp \geq \int_u^۱ [R_Y(p)]^{\alpha-۱} dp.$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{\alpha-۱}[۱ - \frac{۱}{(۱-u)} \int_u^۱ [R_X(p)]^{\alpha-۱} dp] \leq \frac{۱}{\alpha-۱}[۱ - \frac{۱}{(۱-u)} \int_u^۱ [R_Y(p)]^{\alpha-۱} dp],$$

بنابراین $X \leq_{TQE} Y$.

قضیه ۸: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته نامنفی باشند، به‌طوری‌که $X \leq_{TQE} Y$، آن‌گاه برای هر تابع نامنفی صعودی و محدب $\phi(x)$، داریم

$$\phi(X) \leq_{TQE} \phi(Y). \quad (۱۷)$$

برهان: ابتدا حالتی در نظر گرفته می‌شود که $\alpha > ۱$. کافی است نشان داده شود برای هر $\circ \leq u \leq ۱$ نامساوی

$$\frac{۱}{\alpha-۱}[۱ - \int_u^۱ \frac{[q_X(p)]^{-(\alpha-۱)}}{(۱-u)^\alpha} [\phi'(Q_X(p))]^{-(\alpha-۱)} dp] \leq$$
$$\frac{۱}{\alpha-۱}[۱ - \int_u^۱ \frac{[q_Y(p)]^{-(\alpha-۱)}}{(۱-u)^\alpha} [\phi'(Q_Y(p))]^{-(\alpha-۱)} dp].$$

برقرار است، با توجه به فرض قضیه،

$$\int_u^1 \frac{[q_X(p)]^{-(\alpha-1)}}{(1-u)^\alpha}dp \geq \int_u^1 \frac{[q_Y(p)]^{-(\alpha-1)}}{(1-u)^\alpha}dp, \quad \forall u \in [0,1]. \tag{۱۸}$$

در نتیجه $q_X(u) \leq q_Y(u)$. لذا $Q_X(u) \leq Q_Y(u)$. چون $\phi(x)$ تابعی محدب است، $\phi'(x)$ صعودی است. لذا

$$[\phi'(Q_Y(p))]^{-(\alpha-1)} \leq [\phi'(Q_X(p))]^{-(\alpha-1)}. \tag{۱۹}$$

با استفاده از رابطه (۱۸) داریم

$$\int_u^1 ([q_X(p)]^{-(\alpha-1)} - [q_Y(p)]^{-(\alpha-1)})dp \geq 0, \tag{۲۰}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰)،

$$\int_u^1 [q_X(p)]^{-(\alpha-1)}[\phi'(Q_X(p))]^{-(\alpha-1)}dp \geq \int_u^1 [q_Y(p)]^{-(\alpha-1)}[\phi'(Q_Y(p))]^{-(\alpha-1)}dp.$$

لذا، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. برای $0 < \alpha < 1$ نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

قضیه ۹: اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت آنتروپی مانده تسالیس چندکی صعودی (نزولی) باشد و همچنین روابط $X \leq_{TQE} (\geq) Y$ و $X \geq_{QFR} (\leq) Y$ بین دو متغیر تصادفی برقرار باشند، آنگاه Y نیز دارای خاصیت آنتروپی مانده تسالیس چندکی صعودی (نزولی) است.

برهان: با استفاده از قضیه ۴ و تعاریف ۲ و ۳ اثبات می‌شود.

۴ اندازه واگرایی تسالیس بر مبنای تابع چندک

در این بخش، ابتدا اندازه واگرایی تسالیس بر اساس چندک تعیین و برخی از خواص آن بیان می‌شود. سپس شکل چندکی اندازه واگرایی تسالیس برای متغیر مانده طول عمر به‌دست آورده می‌شود. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مطلقا پیوسته نامنفی به‌ترتیب دارای توابع چگالی احتمال f و g، توابع توزیع

F و G، توابع چندک $Q_X(u)$ و $Q_Y(u)$ و توابع چگالی چندک $q_X(u)$ و $q_Y(u)$ باشند. خانواده واگرایی سیزار که به رده واگرایی ϕ نیز معروف است و برای تعیین فاصله دو توزیع احتمال به‌کار می‌رود، توسط سیزار (۱۹۶۷) به‌صورت

$$D^{\phi}(X,Y)=\int_{۰}^{\infty}g(x)\phi[\frac{f(x)}{g(x)}]dx, \tag{۲۱}$$

ارائه شد، که در آن $\phi:[۰,\infty]\to R$ یک تابع محدب است، به‌طوری‌که $\phi(۱)=۰$. در صورتی‌که $\phi(x)=x\log(x)$، آنگاه $D^{\phi}(X,Y)$ اندازه واگرایی کولبک–لیبلر را نتیجه می‌دهد. بنابراین، اندازه واگرایی کولبک–لیبلر $D_{KL}(X,Y)$ یک حالت خاص از اندازه واگرایی سیزار است. یکی دیگر از اندازه‌های اطلاعی که در رده واگرایی سیزار قرار می‌گیرد، اندازه واگرایی تسالیس است که تابع $\phi(x)$ برای آن عبارت است از

$$\phi(x)=\frac{x^{\alpha}-x}{\alpha-۱},\quad \alpha\neq ۱,\ \alpha>۰.$$

بنابراین اندازه واگرایی تسالیس با استفاده از رابطه (۲۱) به‌صورت

$$D_T(X,Y)=\frac{۱}{\alpha-۱}[\int_{۰}^{\infty}(\frac{f(x)}{g(x)})^{\alpha}g(x)dx-۱],\quad \alpha\neq ۱,\ \alpha>۰. \tag{۲۲}$$

است. با تغییر متغیر $x=Q_X(p)$ در رابطه (۲۲) و با استفاده از رابطه (۶)، اندازه واگرایی تسالیس به‌صورت

$$\begin{aligned} D_T^{*}(X,Y) &= \frac{۱}{\alpha-۱}[\int_{۰}^{۱}(\frac{f(Q_X(p))}{g(Q_X(p))})^{\alpha}g(Q_X(p))dQ_X(p)-۱] \\ &= \frac{۱}{\alpha-۱}[\int_{۰}^{۱}(q_X(p)g(Q_X(p)))^{-(\alpha-۱)}dp-۱], \end{aligned} \tag{۲۳}$$

قابل بیان است. حال با استفاده از رابطه $F(Q_X(u))=u$ داریم $F^{-۱}(u)=Q_X(u)$، لذا

$$G(F^{-۱}(u))=G(Q_X(u)). \tag{۲۴}$$

با مشتق‌گیری از (۲۴) نسبت به u عبارت

$$\frac{d}{du}(G(F^{-1}(u))) = \frac{d}{du}(G(Q_X(u))) = q_X(u)g(Q_X(u)), \qquad (۲۵)$$

حاصل می‌شود. به‌طور معادل داریم

$$\frac{d}{du}(Q_Y^{-1}(Q_X(u))) = q_X(u)g(Q_X(u)). \qquad (۲۶)$$

با استفاده از رابطه (۲۶)، رابطه (۲۳) را می‌توان به‌صورت

$$D_T^*(X,Y) = \frac{1}{\alpha-1}[\int_0^1 (\frac{d}{dp}(Q_Y^{-1}(Q_X(p))))^{-(\alpha-1)}dp - 1], \qquad (۲۷)$$

بازنویسی کرد. رابطه (۲۷) در واقع فاصله بین توزیع‌های F و G را بر حسب توابع چندک آنها بیان می‌کند. $Q_3(u) = Q_Y^{-1}(Q_X(u))$ در نظر گرفته می‌شود که تابع چندک $F(G^{-1})$ است. زیرا هر تابع صعودی از تابع چندک، تابع چندک است. در نتیجه رابطه (۲۷) به‌صورت

$$\begin{aligned} D_T^*(X,Y) &= \frac{1}{\alpha-1}[\int_0^1 (\frac{d}{dp}(Q_3(p)))^{-(\alpha-1)}dp - 1] \\ &= \frac{1}{\alpha-1}[\int_0^1 [q_3(p)]^{-(\alpha-1)}dp - 1], \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

تعریف می‌شود، که در آن $q_3(p) = \frac{d}{dp}(Q_3(p))$. وقتی توابع چندک Q_X و Q_Y متناظر با توابع توزیع F و G وجود داشته باشند، روابط (۲۷) و (۲۸) شیوه ساده‌ای را برای محاسبه اندازه واگرایی تسالیس فراهم می‌کنند. به‌علاوه واضح است که در (۲۷) وقتی $Q_X = Q_Y$، آن‌گاه $D_T^*(X,Y) = 0$.

با استفاده از رابطه (۷)، رابطه (۲۸) را می‌توان بر اساس تابع خطر چندکی به‌صورت

$$D_T^*(X,Y) = \frac{1}{\alpha-1}[\int_0^1 [R_3(p)(1-p)]^{-(\alpha-1)}dp - 1], \qquad (۲۹)$$

بیان کرد که در این صورت محاسبه $D_T^*(X,Y)$ وقتی تابع خطر چندکی $Q_3(u)$ وجود داشته باشد، به‌سادگی امکان‌پذیر است.

مثال ۳: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نمایی به‌ترتیب دارای توابع چندک

$$\begin{aligned} Q_X(u) &= -\frac{1}{\lambda_1}\ln(1-u), \lambda_1 > 0 \\ Q_Y(u) &= -\frac{1}{\lambda_2}\ln(1-u), \lambda_2 > 0 \end{aligned}$$

باشند، آن‌گاه $Q_3(u) = Q_Y^{-1}(Q_X(u)) = 1-(1-u)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$، لذا $q_3(u) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-u)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}$ در نتیجه با استفاده از رابطه (۲۸)، داریم

$$D_T^*(X,Y) = \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{-(\alpha-1)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-\alpha)+\alpha} - 1\right].$$

نتیجه ۱: برای تابع پیوسته، مشتق‌پذیر و معکوس‌پذیر $\phi(x)$ داریم

$$D_T^*(\phi(X),\phi(Y)) = \frac{1}{\alpha-1}\left[\int_0^1 \frac{[\frac{d}{dp}(Q_X^{-1}(h(Q_X(p)))]^\alpha}{[\frac{d}{dp}(Q_Y^{-1}(h(Q_X(p)))]^{\alpha-1}}dp - 1\right], \tag{۳۰}$$

که در آن $h(x) = \phi^{-1}(x)$.

برهان: فرض کنید $f_{Z_1}(z_1)$، $F_{Z_1}(z_1)$، $g_{Z_1}(z_1)$ و $G_{Z_1}(z_1)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع متغیرهای تصادفی $Z_1 = \phi(X)$ و $Z_2 = \phi(Y)$ باشند. اگر $\phi^{-1}(z_1) = x = h(z_1)$، آن‌گاه $f_{Z_1}(z_1) = h'(z_1)f(h(z_1))$ و به‌طور مشابه $g_{Z_2}(z_1) = h'(z_1)g(h(z_1))$ بنابراین

$$\begin{aligned} D_{\phi(X),\phi(Y)} &= \frac{1}{\alpha-1}\left[\int_0^\infty \left(\frac{f_{Z_1}(z_1)}{g_{Z_2}(z_1)}\right)^\alpha g_{Z_2}(z_1)dz_1 - 1\right] \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left[\int_0^\infty \left(\frac{f(h(z_1))h'(z_1)}{g(h(z_1))h'(z_1)}\right)^\alpha g(h(z_1))h'(z_1)dz_1 - 1\right]. \end{aligned}$$

حال با تغییر متغیر $z_1 = Q_X(p)$ در رابطه (۳۱) داریم

$$D^*_{\phi(X),\phi(Y)}\frac{1}{\alpha-1}\left[\int_0^1 \frac{[f(h(Q_X(p)))h'(Q_X(p))]^\alpha}{[g(h(Q_X(p)))h'(Q_X(p))]^{\alpha-1}}dQ_X(p) - 1\right]. \tag{۳۱}$$

با استفاده از رابطه $F^{-1}(u) = Q_X(u)$ عبارت

$$G(h(Q_X(u))) = G(h(F^{-1}(u))) = Q_Y^{-1}(h(Q_X(u))), \qquad (۳۲)$$

نتیجه می‌شود. به‌طور مشابه،

$$F(h(Q_X(u))) = F(h(F^{-1}(u))) = Q_X^{-1}(h(Q_X(u))). \qquad (۳۳)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۳۲) و (۳۳)،

$$g(h(Q_X(u)))h'(Q_X(u))q_X(u) = \frac{d}{du}Q_Y^{-1}(h(Q_X(u))), \qquad (۳۴)$$

$$g(h(Q_X(u)))h'(Q_X(u))q_X(u) = \frac{d}{du}Q_Y^{-1}(h(Q_X(u))), \qquad (۳۵)$$

بنابراین با جای‌گذاری روابط (۳۵) و (۳۴) در رابطه (۳۱) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۱.۴ اندازه واگرایی تسالیس مانده بر اساس تابع چندک

طبق تعریف متغیر مانده طول عمر که در بخش ۱ به توضیح آن پرداخته شد، $D_T(X,Y)$ برای مقایسه طول عمرهای مانده X_t و Y_t به‌صورت

$$\begin{aligned} D_T(X,Y;t) &= \frac{1}{\alpha-1}\Big[\int_t^\infty \frac{[f(x)/\bar{F}(t)]^\alpha}{[g(x)/\bar{G}(t)]^{\alpha-1}}dx - 1\Big] \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left[\left(\frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)}\right)^\alpha \frac{1}{\bar{G}(t)}\int_t^\infty \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha g(x)dx - 1\right], \qquad (۳۶) \end{aligned}$$

قابل بیان است. بنابراین اندازه واگرایی تسالیس مانده بر اساس تابع چندک به‌صورت

$$\begin{aligned} D_T^*(X,Y;Q_X(u)) &= \frac{1}{\alpha-1}\Big[\frac{[1-G(Q_X(u))]^{\alpha-1}}{(1-u)^\alpha} \\ &\times \int_u^1 (q_X(p)g(Q_X(p)))^{-(\alpha-1)}dp - 1\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha-1}[\frac{[1-Q_Y^{-1}(Q_X(u))]^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha}}\int_u^1 [q_3(p)]^{-(\alpha-1)}dp-1] \\ &= \frac{1}{\alpha-1}[\frac{[1-Q_3(u)]^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha}}\int_u^1 [q_3(p)]^{-(\alpha-1)}dp-1], \qquad (37) \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. رابطه (۳۷) را می‌توان بر اساس آنتروپی مانده تسالیس چندکی به‌صورت

$$D_T^*(X,Y;Q_X(u)) = [1-Q_3(u)]^{\alpha-1}[H_\alpha(X,Y;Q_3(u))+\frac{1}{\alpha-1}]-\frac{1}{\alpha-1},$$

بازنویسی کرد.

مثال ۴: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی تعریف شده در مثال ۲ باشند. در نتیجه با استفاده از رابطه (۳۷)،

$$D_T^*(X,Y;Q_X(u)) = \frac{1}{\alpha-1}[\frac{(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{-(\alpha-1)}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(1-\alpha)+\alpha}-1].$$

نتیجه ۲: برای تابع پیوسته، مشتق‌پذیر و معکوس‌پذیر $\phi(x)$، مشابه نتیجه ۱ ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned} D_T^*(\phi(X),\phi(Y);Q_X(u)) &= \frac{1}{\alpha-1}\frac{[1-Q_Y^{-1}(h(Q_X(p)))]^{\alpha-1}}{[1-Q_X^{-1}h(Q_X(p))]^{\alpha}} \\ &\times\int_u^1 \frac{[\frac{d}{dp}(Q_X^{-1}h(Q_X(p)))]^{\alpha}}{[\frac{d}{dp}(Q_Y^{-1}(h(Q_X(p))))]^{\alpha-1}}dp-1. \qquad (38) \end{aligned}$$

۵ برآورد آنتروپی مانده تسالیس بر مبنای تابع چندک

در این بخش، یک برآوردگر برای آنتروپی مانده تسالیس چندکی معرفی می‌شود و سپس عملکرد آن با مطالعه شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به رابطه (۸) برای برآورد $H_\alpha(X;Q_X(u))$ نیاز به برآورد تابع $q(u)$ است. در سایر مقالات چندین برآوردگر برای این تابع معرفی شده است. سونی و

همکاران (۲۰۱۲) برآوردگر

$$q_n(u)=\frac{1}{nh(n)}\sum_{i=1}^{n}\frac{K(\frac{i/n-u}{h(n)})}{f_n(X_{i:n})}, \tag{۳۹}$$

را معرفی کردند، که در آن $K(.)$ تابع هسته، $h(n)$ پارامتر هموار کننده و $f_n(t)$ برآوردگر چگالی هسته برای $f(t)$ است و به صورت

$$f_n(t)=\frac{1}{nh(n)}\sum_{i=1}^{n}K(\frac{t-X_i}{h(n)}), \tag{۴۰}$$

تعریف می‌شود. نتایج به‌دست آمده برای برآوردگر $q_n(u)$، عملکرد خوب آن را نسبت به سایر برآوردگرها نشان می‌دهد (سونی و همکاران، ۲۰۱۲). بنابراین از این برآوردگر برای برآورد $q(u)$ در $H_\alpha(X;Q_X(u))$ استفاده می‌شود. لذا با استفاده از (۳۹) و (۴۰) برآوردگر $H_\alpha(X;Q_X(u))$ به‌صورت

$$\hat{H}_\alpha(X;Q_X(u))=\frac{1}{\alpha-1}\left[1-\frac{S_1(u,n,h(n))}{(1-u)^\alpha(nh(n))^{1-\alpha}}\right],$$

معرفی می‌شود، که در آن

$$S_1(u,n,h(n))=\int_u^1[\sum_{t=1}^{n}(K(\frac{t/n-p}{h(n)})/f_n(X_{t:n}))]^{-(\alpha-1)}dp. \tag{۴۱}$$

از بین توابع هسته معرفی شده در متون از تابع هسته اپانچنیکوف[2] (۱۹۶۹) که به عنوان یک تابع هسته بهینه معرفی شده است، استفاده می‌شود. این تابع به صورت

$$K(u)=\frac{3}{4}(1-u^2)I_{(|u|\leq 1)}, \tag{۴۲}$$

[2]Epanechnikov

تعریف می‌شود، که در آن I_A تابع نشانگر است. با جایگذاری (۴۲) در (۴۱) عبارت

$$S_۱(u,n,h(n)) = \int_u^۱ [\sum_{t=۱}^{n} \{ \frac{\frac{۳}{۴}(۱-(\frac{t/n-p}{h(n)})^۲) I_{(|\frac{t/n-p}{h(n)}|\leq ۱)}}{f_n(X_{t:n})} \}]^{-(\alpha-۱)} dp, \qquad (۴۳)$$

حاصل می‌شود. با تقسیم‌بندی انتگرال رابطه (۴۳) روی بازه‌هایی به صورت

$$\frac{t}{n} - h(n) \leq p \leq \frac{t}{n} + h(n),$$

حالات زیر را می‌توان در نظر گرفت:

(الف) برای $۰ < u \leq \frac{۱}{n} + h(n)$، فرض کنید $t^* = \min\{t | (\frac{t}{n} - h(n)) > u\}$.
اگر $\frac{t^*}{n} - h(n) < \frac{۱}{n} + h(n)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} S_۱(u,n,h(n)) &= \int_u^{\frac{t^*}{n}-h(n)} \sum_{t=۱}^{t^*-۱} (S_۲(p,n,h(n)))^{-(\alpha-۱)} dp \\ &+ \sum_{j=t^*}^{\min([۲nh(n)],n)} \int_{\frac{j}{n}-h(n)}^{\frac{j+۱}{n}-h(n)} \sum_{t=۱}^{j} (S_۲(p,n,h(n)))^{-(\alpha-۱)} dp \\ &+ \int_{a_۱}^{\frac{۱}{n}+h(n)} \sum_{t=۱}^{\min([۲nh(n)]+۱,n)} (S_۲(p,n,h(n))^{-(\alpha-۱)} dp \\ &+ \sum_{i=۱}^{t_۰-۱} \int_{\frac{i}{n}+h(n)}^{\min(n,\frac{i+۱}{n}+h(n))} \sum_{t=i+۱}^{\min([i+۲nh(n)],n)} (S_۲(p,n,h(n))^{-(\alpha-۱)} dp \end{aligned}$$

که در آن $S_۲(p,n,h(n)) = \sum_{t=۱}^{n} \{\frac{۳}{۴}(۱-(\frac{t/n-p}{h(n)})^۲) I_{(|\frac{t/n-p}{h(n)}|\leq ۱)} / f_n(X_{t:n})\}$، $[x]$ جزء صحیح x،

$$\begin{aligned} a_۱ &= \frac{\min([۲nh(n)]+۱,n)}{n} - h(n) \\ t_۰ &= \min\{t | (\frac{t}{n} + h(n)) \geq ۱\}. \end{aligned}$$

در غیر این‌صورت اگر $\frac{t^*}{n} - h(n) \geq \frac{1}{n} + h(n)$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} S_1(u,n,h(n)) &= \int_u^{\frac{1}{n}+h(n)} \sum_{t=1}^{\min([n(u+h(n))],n)} (S_2(p,n,h(n)))^{-(\alpha-1)}dp \\ &+ \sum_{i=1}^{t_0-1} \int_{\frac{i}{n}+h(n)}^{\min(n,\frac{i+1}{n}+h(n))} \sum_{t=i+1}^{\min([i+2nh(n)],n)} (S_2(p,n,h(n)))^{-(\alpha-1)}dp. \end{aligned}$$

(ب) برای $\frac{k}{n} + h(n) < u \leq \frac{k+1}{n} + h(n)$ که $k = 1, ..., n-1$

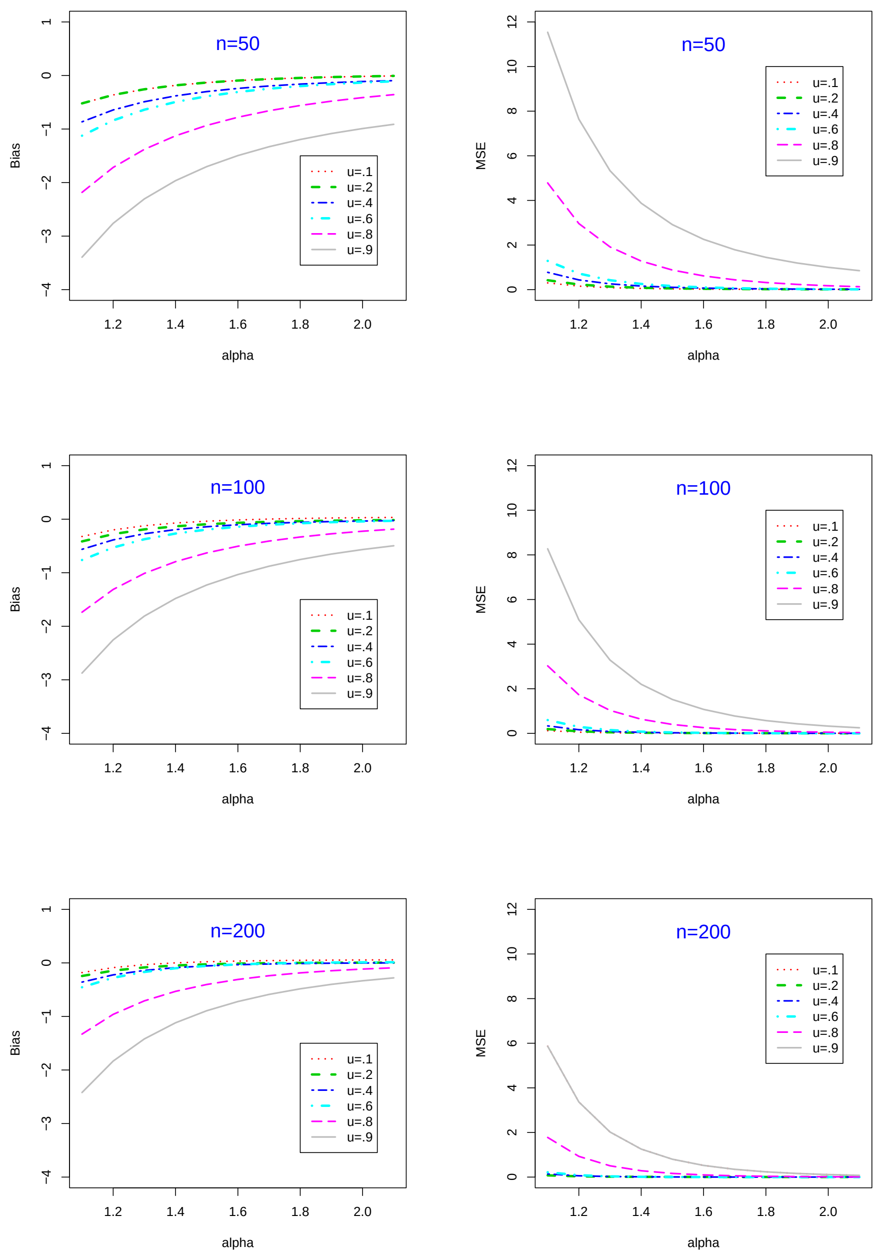
$$\begin{aligned} S_1(u,n,h(n)) &= \int_u^{\min(1,\frac{k+1}{n}+h(n))} \sum_{t=k+1}^{\min([n(u+h(n))],n)} (S_2(p,n,h(n)))^{-(\alpha-1)}dp \\ &+ \sum_{i=k+1}^{t_0-1} \int_{\frac{i}{n}+h(n)}^{\min(n,\frac{i+1}{n}+h(n))} \sum_{t=i+1}^{\min([i+2nh(n)],n)} (S_2(p,n,h(n)))^{-(\alpha-1)}dp. \end{aligned}$$

مثال ۵: به منظور بررسی عملکرد برآوردگر معرفی شده، توزیع دیویس در مثال ۱ به‌ازای $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{2}$ و $C = 1$ در نظر گرفته می‌شود. محاسبات با تعداد تکرار ۵۰۰۰ به ازای $n = 50, 100, 200$ با استفاده از نرم‌افزار R انجام شده است. انتخاب بهینه $h(n)$ بر اساس کمترین میانگین توان دوم خطا برآوردگر $H_\alpha(X;Q_X(u))$ است. به‌طوری‌که به ازای $0 < u < 0.5$ مقدار $h(n)$ بهینه ۰٫۲ و به ازای $0.5 \leq u < 1$ این مقدار ۰٫۳ است. MSE و اریبی $(Bias)$ برآوردگر مورد نظر به ازای $\alpha > 1$ در شکل ۱ ارائه شده است.

طبق نتایج به‌دست آمده، با افزایش حجم نمونه، MSE و $Bias$ کاهش و با افزایش مرتبه چندک این مقادیر افزایش می‌یابد، همان‌طور که سونی و همکاران (۲۰۱۲) به عملکرد ضعیف برآوردگر $q_n(u)$ در دم‌های توزیع اشاره داشته‌اند. همچنین مشاهده می‌شود MSE و Bias برآوردگر مذکور با افزایش α کاهش یافته و به‌طور کلی می‌توان گفت به‌ازای $\alpha > 1.5$ حتی در دم‌های توزیع، دارای عملکرد خوبی است و به ازای α های نزدیک به ۲، MSE و Bias در چندک‌های پایین به سمت صفر میل می‌کنند.

بحث و نتیجه‌گیری

یافتن توزیع طول عمری که بتواند به اندازه کافی رفتار تصادفی طول عمر سیستم مورد نظر را توصیف کند، یکی از مسائل مهم در مطالعات قابلیت اعتماد است. از طرفی تابع چندک به عنوان یکی از شاخص‌های



شکل ۱: نمودار MSE و Bias به ازای حجم نمونه‌های مختلف و برای $\alpha > ۱$

توزیع‌های آماری برای شناسایی بهتر آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. بیان مفاهیم قابلیت اعتماد بر اساس تابع چندک دارای خواص ویژه‌ای است. در صورت وجود مشاهدات دورافتاده و مقادیر فرین، استفاده از اندازه‌های چندکی که کمتر تحت‌تاثیر این مقادیر قرار می‌گیرند، بهتر است. به‌علاوه در رابطه با توزیع‌هایی که تنها تابع چندک آن‌ها مشخص است و تابع توزیع یا تابع چگالی احتمال آن‌ها شکل صریحی ندارند، کار کردن با تابع چندک به جای تابع توزیع می‌تواند مفید باشد.

در این مقاله به مشخص‌سازی توزیع‌های طول عمر خاص و بررسی ویژگی‌های ترتیبی آن‌ها با استفاده از آنتروپی مانده تسالیس مبتنی بر تابع چندک پرداخته شد و برآوردگری برای این آنتروپی معرفی گردید. همچنین اندازه واگرایی تسالیس بر اساس تابع چندک به همراه برخی از ویژگی‌های مهم آن بیان شد. هدف ما در آینده آن است که با استفاده از این اندازه واگرایی به آزمون‌های نیکویی برازش بپردازیم.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران و ویراستار محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود موجب بهبود مقاله گردیدند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

مراجع

Asadi, M. and Ebrahimi, N. (2000), Residual Entropy and its Characterizations in Terms of Hazard Function and Mean Residual Life Function, *Statistics and Probability Letters,* **49**, 263-269.

Belzunce, F., Navarro J., Ruiz J. M. and Del Aguila Y. (2004), Some Results on Residual Entropy Function, *Metrika,* **59**, 147-161.

Csiszar, I. (1967), Information-Type Measures of Difference of Probability Distributions and Indirect Observations, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica,* **2**, 299-318.

Ebrahimi, N. (1996), How to Measure Uncertainty in the Residual Lifetime Distribution, *Sankhya A*, **58**, 48-56.

Ebrahimi, N. and Pellerey, F. (1995), New Partial Ordering of Survival Functions Based on Notion of Uncertainty, *Journal of Applied Probability,* **32**, 202-211.

Epanechnikov, V. A. (1969). Non-Parametric Estimation of a Multivariate Probability Density. *Theory of Probability and Its Applications,* **14**, 153-158.

Gilchrist, W.G. (2000), Statistical Modelling with Quantile Functions. Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton.

Hartley, R. V. L. (1928), Transmission of Information, *Bell System Technical Journal*, **7**, 535-563.

Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951), , *The Annals of Mathematical Statistics,* **22**, 79-86.

Nair, N. U. and Sankaran, P. G. (2009), Quantile Based Reliability Analysis, *Communications in Statistics– Theory and Methods,* **38**, 222-232.

Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Balakrishnan, N. (2013), Quantile-Based Reliability Analysis, New York: Springer.

Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Kumar, V. (2011), Modelling Lifetimes by Quantile Functions Using Parzen's Score Function, *Statistics,* **1**, 1-13.

Nanda, A. K., Sankaran, P. G. and Sunoj, S. M. (2014), Renyi's Residual Entropy: a Quantile Approach, *Statistics and Probability Letters,* **85**, 114-121.

Nyquist, H. (1932), Regeneration Theory, *Bell System Technical Journal,* **11**, 126-147.

Ord, J. K., Patil, G. P., and Taillie, C. (1981), The Choice of a Distribution to Describe Personal Incomes. Statistical distributions in scientific work, **6**, 193-201.

Rao, C. R. (1965), On Discrete Distributions Arising out of Methods of Ascertainment, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Ser A,* **27**, 311-324.

Sankaran, P. G., Nair, N. U. (2009), Nonparametric Estimation of the Hazard Quantile Function, *Journal of Nonparametric Statistics,* **21**, 757–767.

Sankaran, P. G., Nair, N. U. and Sreedevi, E. P. (2010), A Quantile Based Test for Comparing Cumulative Incidence Functions of Competing Risks Models, *Statistics and Probability Letters,* **80**, 886-891.

Sankaran, P. G., Sunoj, S. M. and Nair, N. U. (2016), Kullback-Leibler Divergence: A Quantile Aapproach. *Statistics and Probability Letters,* **111**, 72-79.

Shannon, C. E. (1984), A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423 .

Soni, P., Dewan, I., and Jain, K. (2012). Nonparametric Estimation of Quantile Density Function. *Computational Statistics and Data Analysis,* **56**, 3876-3886.

Sunoj, S. M. and Sankaran, P. G.(2012), Quantile Based Entropy Function, *Statistics and Probability Letters,* **82**, 1049-1053.

Sunoj, S. M., Sankaran, P. G. and Maya, S. S. (2009), Characterization of Life Distributions Using Conditional Expectations of Doubly (Interval) Truncated Random Variables. *Communications in Statistics– Theory and Methods,* **38**, 1441-1452.

Sunoj, S. M., Sankaran, P. G. and Nanda, A. K. (2013), Quantile Based Entropy Function in Past Lifetime, *Statistics and Probability Letters,* **83**, 366-372.

Tsallis, C. (1988), Possible Generalizations of Boltzmann-Gibbs Statistics, *Journal of Statistical Physics,* **52**, 479-487.