مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۳۹۵ – ۴۱۲
DOI: 10.29252/jss.12.2.395

مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارت‌ها در دو سبد بیمه ناهمگن

قباد برمال‌زن

گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: مجموع مقادیر خسارت‌ها در یک دوره خاص، یک کمیت اساسی برای مدیریت مناسب شرکت‌های بیمه و قیمت‌گذاری پوشش‌های بیمه‌ای هستند. در این مقاله، به بررسی ترتیب تصادفی معمولی بین مجموع مقادیر خسارت‌ها وقتی که تابع بقای خسارت‌ها، صعودی و مقعر هستند، پرداخته شده است . به‌علاوه برخی از نتایج لی و لی (۲۰۱۶) تعمیم داده خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: بیشاندن زنجیری چند متغیره، مدل نرخ خطر معکوس متناسب، ترتیب تصادفی، شُور-محدب، شُور-مقعر.

۱ مقدمه

یک سبد بیمه به‌صورت $(I_{p_1}X_{\lambda_1}, \cdots, I_{p_n}X_{\lambda_n})$ در نظر بگیرید که در آن X_{λ_1}، $\cdots$، X_{λ_n} بیانگر مقادیر خسارت‌های تصادفی و I_{p_i}ها متغیرهای تصادفی برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند، که $I_{p_i} = 1$، هرگاه حداقل یک خسارت برای i -امین قرارداد، گزارش شده باشد در غیر این‌صورت $I_{p_i} = 0$. یکی از متغیرهای تصادفی مورد علاقه در زمینه‌های گوناگون آمار و احتمال، کمیت $S_n(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} I_{p_i}X_{\lambda_i}$ است که به‌ویژه در علم بیم‌سنجی[1] به مجموع خسارت‌ها[2] در یک سبد بیمه[3] معروف است. برای محاسبه

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: قباد برمال‌زن، ghobad.barmalzan@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15، 62P05

[1]science Actuarial
[2]Amounts Claim Aggregate
[3]Portfolio

مجموع خسارت‌ها، دو مدل وجود دارد که به مدل‌های مخاطره فردی[4] و جمعی[5] معروف هستند. در مدل مخاطره فردی، بیمه نامه‌های فردی حائز اهمیت هستند و به هریک از آنها، احتمالی منتسب می‌شود که احتمال رخداد خسارت آن بیمه نامه است. بنابراین مجموع خسارت‌ها، برابر مجموع سهم هر یک از بیمه نامه‌های فردی در کل سبد بیمه است. به عنوان مثال، یک شرکت بیمه را در نظر بگیرید که کامیون‌های بارکش را بیمه می‌کند. فرض کنید در پایان یک سال، این شرکت n بیمه‌نامه، فروخته باشد و با توجه به سوابق، احتمال گزارش خسارت توسط رانندگان، برابر $p_۱, \ldots, p_n$ باشند. در چنین مواردی، چون مقادیر خسارت‌ها و احتمال منسب به هریک از بیمه‌نامه‌ها مشخص و معلوم است مدل مخاطره انفرادی برای توصیف مجموع مقادیر خسارت‌ها، مناسب است (بازیاری، ۱۳۹۱). در مدل مخاطره جمعی، ساختار بیمه‌نامه‌های فردی مشخص نیست و به جای آن کل سبد بیمه، حائز اهمیت است و احتمال رخداد خسارت‌ها برای بیمه‌نامه‌ها مشخص نیست. یعنی فرایندی مدنظر است که در آن فقط زمان وقوع و تعداد خسارت‌ها ثبت می‌شود و اینکه خسارت‌ها از کدام بیمه‌نامه ناشی شده‌اند اهمیتی ندارد.

اگر X_{λ_i} ها هم‌توزیع باشند آن‌گاه سبد بیمه، همگن و در غیر این‌صورت، ناهمگن نامیده می‌شود. بسیاری از کمیت‌های مرتبط با علم بیم‌سنجی، شامل مجموع متغیرهای تصادفی هستند که از جمله آنها می‌توان به مقدار در معرض مخاطره، حق بیمه زیان‌بس برای مقدار خسارت‌های تجمعی و احتمال ورشکستگی در زمان متناهی در یک محیط اقتصادی، اشاره نمود. برای محاسبه این کمیت‌ها و امثال آنها در علم بیم‌سنجی، به تابع توزیع مجموع متغیرهای تصادفی نیاز است که به‌دست آوردن آن، معمولاً پیچیده است. لذا از روش‌های تقریبی و شبیه‌سازی، برای محاسبه این کمیت‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله، با استفاده از نظریه ترتیب‌های تصادفی، کران‌هایی برای تابع توزیع این مجموع از متغیرهای تصادفی، به‌دست آمده است.

اگر متغیرهای تصادفی X_{λ_i} و I_{p_i} متناظر با قراردادها، هم‌توزیع نباشند آن‌گاه چگونگی تغییر مشخصه‌های مرتبط با $S_n(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p})$ یک مسئله مهم است. بدیهی است که این تغییر در توزیع‌ها، باعث ناهمگنی در سبد بیمه می‌شوند. در این مقاله، تاثیر ناهمگنی روی مشخصه‌های مختلف مجموع مقادیر خسارت‌ها از دیدگاه ترتیب‌های تصادفی، مورد مطالعه قرار گرفته است. مسئله ناهمگنی در بیمه، ابتدا توسط اسپیرو (۱۹۹۸) برای بیمه‌های غیر عمر مورد مطالعه قرار گرفت. بعدها داهان و همکاران (۲۰۰۴) سبدهای بیمه‌ایی از بیمه‌گذاران با موضوع‌های متفاوت را مورد بررسی قرار دادند و تاثیر ناهمگنی را بر موضوع‌های تحت مطالعه، بررسی نمودند. در ادامه، ناهمگنی در سبد بیمه، توسط مفهومی تحت عنوان

[4] models risk Individual
[5] models risk Collective

بیشاندن[۶] در قراردادهای بیمه اعمال می‌شود.

گاهی شرکت‌های بیمه[۷] ممکن است قادر به پرداخت خسارت‌های احتمالی نباشند. در این صورت شرکت‌های بیمه تا آستانه‌ای از خسارت‌ها را که به آن سطح نگه‌داشت d می‌گویند پرداخت کرده و مابقی خسارت را که با $X-d$ نشان داده می‌شود به شرکت‌های بیمه دیگری که به شرکت بیمه اتکایی معروف هستند واگذار می‌کنند. شرکت بیمه اتکایی در ازای قبول خسارت $X-d$، حق بیمه‌ای از شرکت بیمه اول دریافت می‌کند که به آن حق بیمه زیان‌بس[۸] می‌گویند. بنابراین بیمه اتکایی زیان‌بس کل مخاطره را پوشش نمی‌دهد و فقط قسمت بالایی مخاطره را پوشش می‌دهد. فرض کنید خسارت نامنفی X برای یک شرکت بیمه اتفاق افتد. در این صورت پرداخت بیمه اتکایی به‌صورت $(X-d)_+ = \max\{X-d, ۰\}$ است. بنابراین بیمه‌گر، مخاطره را تا آستانه d نگه می‌دارد و بیمه‌گر اتکایی، مابقی مخاطره را پرداخت خواهد کرد. به‌عبارت دیگر، زیان بیمه‌گر در سطح d متوقف می‌شود و با افزایش d حق بیمه اتکایی کاهش می‌یابد. حق بیمه زیان‌بس با نماد $\Pi_X(d)$ نشان داده و به‌صورت $\Pi_X(d) = E(X-d)_+$ تعریف می‌شود.

در کاربردهای بیم‌سنجی، به دلیل اینکه خسارت‌های با مقادیر بزرگ، می‌توانند برای بقای بیمه‌گر خطرساز باشند، اغلب دم تابع توزیع مورد توجه است. محاسبه بسیاری از کمیت‌های مرتبط با علم بیم‌سنجی از قبیل احتمال ورشکستگی[۹] حق بیمه زیان‌بس و چندک‌های ذخیره زیان، به نوعی نیازمند استفاده از دم تابع توزیع یا همان تابع بقا است. تابع بقا در علم بیم‌سنجی از آن جهت مورد توجه است که رخداد یا عدم رخداد مقادیر بزرگ، بیشترین سود یا زیان را به همراه دارد. با توجه به این اهمیت تابع بقا، ترتیب تصادفی معمولی[۱۰] به‌صورت مبسوط در این مقاله، برای مجموع مقادیر خسارت‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

مقایسه تصادفی تعداد خسارت‌ها و مجموع خسارت‌ها در هر دو زمینه نظری و کاربردی، مورد علاقه بسیاری از آماردانان است. کارلین و نویکوف (۱۹۶۳) نشان دادند که پراکندگی زیاد بین p_i ها به معنای بیشاندن، ترتیب تصادفی کوچکتر بین مجموع تعداد خسارت‌ها را نسبت به ترتیب محدب[۱۱] نتیجه می‌دهد.

---

[6] Majorization
[7] reinsurance Companies
[8] Premium loss stop
[9] Probability Ruin
[10] Order Stochastic Usual
[11] Order convex

به‌عبارت دقیق‌تر، نشان دادند

$$(p_1, \cdots, p_n) \overset{m}{\succeq} (p_1^*, \cdots, p_n^*) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} I_{p_i} \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n} I_{p_i^*}, \qquad (1)$$

که در آن $I_{p_1^*}, \cdots, I_{p_n^*}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i^*}) = p_i^*$ برای $i = 1, \cdots, n$ و مستقل از X_{λ_i} ها هستند. ما (۲۰۰۰) نتیجه (۱) را به حالتی با تعداد خسارت‌ها متفاوت ولی اندازه خسارت‌های یکسان، تعمیم داد و نشان داد اگر $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ متغیرهای تصادفی تعویض‌پذیر[12] باشند، آن‌گاه

$$(p_1, \cdots, p_n) \overset{m}{\succeq} (p_1^*, \cdots, p_n^*) \Longrightarrow S_n(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}) \leq_{cx} S_n(\lambda, \mathbf{p}^*) \qquad (2)$$

$$(h(p_1), \cdots, h(p_n)) \overset{m}{\succeq} (h(p_1^*), \cdots, h(p_n^*)) \Longrightarrow S_n(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}) \geq_{st} S_n(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}^*), \qquad (3)$$

که در آن $h(p) = -\log p$ یا $h(p) = (1-p)/p$. همچنین ما (۲۰۰۰) نشان داد که (۲) برقرار است هرگاه $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ متغیرهای تصادفی نامنفی با این شرط که $X_{\lambda_1} \leq_{st} \cdots \leq_{st} X_{\lambda_n}$ و $(h(p_1), \cdots, h(p_n)) \in D_n^+$ و $D_n^+ = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0\}$. این مقایسه‌ها بعدها توسط فراستیگ (۲۰۰۱) و هو و روان (۲۰۰۴) مورد بررسی قرار گرفتند و شرایطی برای مقایسه تصادفی مقادیر خسارت‌ها نسبت به ترتیب زبرجمعی[13] ترتیب چند متغیره معمولی متقارن[14] معرفی شدند. دنوا و فراستیگ (۲۰۰۶) به مطالعه اثر صعودی ناهمگنی ریسک‌ها نسبت به ترتیب محدب صعودی (زیان‌بس) پرداختند. خالدی و احمدی (۲۰۰۸) این مقایسه‌ها را برای حالت کلی، که هم تعداد خسارت‌ها و هم اندازه خسارت‌ها متفاوت باشند مورد مطالعه قرار دادند. آنها فضای ماتریسی زیر را معرفی کردند

$$\mathcal{S}_n = \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ b_1 \dots b_n \end{pmatrix} : a_1 \geq \dots \geq a_n > 0 \text{ و } b_1 \geq \dots \geq b_n > 0 \right\},$$

و تحت این فضا، قضیه‌ای را بیان و اثبات نمودند که با استفاده از آن می‌توان مجموع خسارت‌های متناظر با دو سبد بیمه ناهمگن را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، مقایسه نمود. برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۵)

[12] Exchangeable
[13] order Supermodular
[14] order stochastic symmetric and usual Multivariate

نسخه کامل‌تری از فضای S_n به صورت زیر معرفی کردند

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{c} a_1 \dots a_n \\ b_1 \dots b_n \end{array} \right) : \ a_i, b_j > 0 \quad \text{و} \quad (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \ \right\},$$

که با استفاده از آن، توانستند تعداد بیشتری از مجموع خسارت‌ها را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، با یکدیگر مقایسه نمایند. ژانگ و زو (۲۰۱۶) شرط بیشاندن زنجیری چند متغیره را با شرط بیشاندن ضعیف عوض کرده و بلافاصله نتایج برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۵) را تعمیم دادند.

اما نکته‌ای که باید متذکر شد این است که مقایسه‌های تصادفی که تاکنون در مورد مجموع مقادیر خسارت‌ها مورد بررسی قرار گرفته بود برای حالاتی بود که تابع بقای مربوط به خسارت‌ها، تابعی نزولی و محدب بود. این مساله برای زمانی که تابع بقای خسارت‌ها، تابعی صعودی و مقعر باشند هنوز حل نشده بود که سرانجام لی و لی (۲۰۱۶) برای اولین بار توانستند این مساله را حل کنند. این نویسندگان، مقایسه تصادفی مربوط به مجموع مقایر خسارت‌ها را برای حالتی با تعداد خسارت‌های متفاوت ولی اندازه خسارت یکسان، انجام دادند. در این مقاله، این مقایسه‌ها را برای یک حالت کلی، وقتی که هم تعداد خسارت‌ها و هم اندازه آنها متفاوت باشند مورد مطالعه قرار گرفته است.

در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است. مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارت‌ها نسبت به بیشاندن زنجیری چند متغیره، در بخش ۳ انجام شده است. سرانجام، یک مصداق از نتایج به دست آمده، در مدل نرخ خطر وارون متناسب، در بخش ۴ ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

از آنجا که ریسک‌ها متغیرهای تصادفی نامنفی هستند لذا اندازه‌گیری یک ریسک، معادل با بیان یک تناظر مانند ϱ بین متغیرهای تصادفی نامنفی و اعداد حقیقی نامنفی $\mathbb{R}^+$ است. اعداد حقیقی، نشان‌دهنده اندازه ریسک تخصیص داده شده به ریسک X بوده و در نتیجه با $\varrho[X]$ نشان داده می‌شوند. بنابراین اندازه ریسک، تابعی است که به هر ریسک، یک عدد حقیقی نامنفی را تخصیص می‌دهد. اگر X بیانگر مقدار زیان ممکن در چند سبد بیمه مالی باشد، آنگاه $\varrho[X]$ به‌عنوان سرمایه‌ای تعبیر می‌شود که باید به سبد بیمه به‌عنوان ذخیره تثبیتی اضافه شود تا سبد بیمه نسبت به کنترل کننده‌های داخلی و خارجی، قابل قبول باشد.

در چنین حالتی $\varrho[X]$ سرمایه ریسک سبد بیمه است. از چنین اندازه‌های ریسکی، برای تعیین سهام و سرمایه‌های لازم، برای اجتناب از ورشکستگی استفاده می‌شود. در ادامه دو نمونه از اندازه‌های ریسک مهم و پرکاربرد، تحت عناوین مقدار در معرض مخاطره و مقدار در معرض مخاطره دمی، آورده شده است.

تعریف ۱: (دنوا و همکاران، ۲۰۰۵) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(t) = P(X \leq t)$ و معکوس از راست پیوسته $F^{-1}(p)$ باشد. برای سطح احتمال داده شده $p \in (0, 1)$، مقدار در معرض مخاطره به صورت $VaR[X;p] = F^{-1}(p) = \sup\{t \in \mathbb{R} | P(X \leq t) \leq p\}$ تعریف می‌شود.

مقدار در معرض مخاطره، هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد رفتار و سنگینی دم بالایی توزیع، نشان نمی‌دهد. بنابراین این مسئله می‌تواند به‌عنوان یک نقطه ضعف از معیار مقدار در معرض مخاطره در نظر گرفته شود. معیاری که این ضعف را پوشش می‌دهد مقدار در معرض مخاطره دمی نامیده می‌شود.

تعریف ۲: (دنوا و همکاران، ۲۰۰۵) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای مقدار در معرض مخاطره $VaR[X;\xi]$ باشد. برای هر سطح احتمال داده شده $p \in (0, 1)$، مقدار در معرض مخاطره دمی به صورت

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X;\xi]\, d\xi$$

تعریف می‌شود.

میزان ناهمگنی میان سبد بیمه‌ها که به وسیله پارامترها منعکس می‌شود، می‌تواند با استفاده از مفهوم بیشاندن بین پارامترها مقایسه شود. بیشاندن روشی برای مقایسه دو بردار نامنفی با بعدهای یکسان، از لحاظ پراکندگی مؤلفه‌های آنها است. وقتی که نامساوی بیشاندن، بین دو بردار برقرار باشد سبد بیمه متناظر با جهت بیشاندن بزرگتر، ناهمگن‌تر از سبد بیمه دیگری است.

تعریف ۳: (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $a_{(1)} \leq \cdots \leq a_{(n)}$ و $b_{(1)} \leq \cdots \leq b_{(n)}$ به‌ترتیب مقادیر مرتب شده متناظر با $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ باشند. بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = 1, \cdots, n-1$، $\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}$.

مفهوم بیشاندن ارتباط نزدیکی با پراکندگی دارد. زیرا اگر $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از $\mathbf{b}$ باشد ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) آنگاه دامنه بردار $\mathbf{a}$ یعنی $a_{(n)} - a_{(1)}$ بزرگتر از دامنه بردار $\mathbf{b}$ یعنی $b_{(n)} - b_{(1)}$ است و در نتیجه بردار $\mathbf{a}$ پراکنده‌تر از بردار $\mathbf{b}$ است.

تعریف ۴: (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شُور-محدب[15] نامیده می‌شود هرگاه

$$\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b} \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \geq \phi(\mathbf{b}).$$

همچنین، تابع ϕ شُور-مقعر [16] نامیده می‌شود هرگاه جهت نامساوی فوق، عوض شود.

قضیه ۱: (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باز و $\phi : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ شُور-محدب (شُور-مقعر) نامیده می‌شود اگر و فقط اگر

الف) تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ متقارن باشد.

ب) برای هر $i \neq j$ و هر $\mathbf{z} \in \mathbb{I}^n$

$$(z_i - z_j)\left(\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(\mathbf{z})\right) \geq 0 \; (\leq 0),$$

که در آن $\frac{\partial \phi}{\partial z_i}$ بیانگر مشتق جزئی تابع ϕ نسبت به مؤلفه i -ام است.

تعمیم‌هایی از مفهوم بیشاندن برداری، برای مقایسه ماتریس‌ها معرفی شده‌اند. قبل از بیان آنها، ابتدا چند ماتریس خاص یادآوری می‌شود.

ماتریس P یک ماتریس تصادفی مضاعف [17] نامیده می‌شود هرگاه همه درایه‌های آن نامنفی باشند و جمع هر سطر و هر ستون آن، برابر با ۱ باشند.

ماتریس مربع Π، از مرتبه $n \times n$، یک ماتریس جایگشت[18] نامیده می‌شود هرگاه هر سطر و ستون آن، دارای یک درایه ۱ بوده و بقیه درایه‌های آن، صفر باشند. واضح است $n!$ از این ماتریس‌های جایگشت $n \times n$ وجود دارند که با تعویض سطر یا ستون‌های ماتریس واحد I به دست می‌آیند.

[15]Schur-convex
[16]Schur-concave
[17] matrix stochastic Doubly
[18]matrix Permutation

یک ماتریس T-تبدیل[۱۹] به صورت $T = wI + (۱-w)\Pi$ تعریف می‌شود که در آن $۰ \leq w \leq ۱$ و Π یک ماتریس جایگشت است. باید توجه داشت اگر ماتریس T-تبدیل روی بردار a اعمال شود فقط دو مؤلفه از آن بردار را جابجا می‌کند. به عبارت دیگر، مقدار $\mathbf{a}T$ برابر است با

$$(a_۱, \cdots, a_{j-۱}, wa_j + (۱-w)a_k, a_{j+۱}, \cdots, a_{k-۱}, wa_k + (۱-w)a_j, a_{k+۱}, \cdots, a_n).$$

ماتریس T-تبدیل در بیمه، در مفهوم ناهمگنی در سبد بیمه ظاهر می‌شود. اگر $\mathbf{a}$ بردار پارامترهای یک سبد بیمه باشد آنگاه $\mathbf{a}T$ با $w = ۱/۲$ سبد بیمه جدیدی به وجود می‌آورد که در آن ناهمگنی در قراردادهای i ام و j ام با دو قرارداد همگن با پارامترهای جدید $(a_i + a_j)/۲$ جایگزین شده است.

تعریف ۵: (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $A = \{a_{ij}\}$ و $B = \{b_{ij}\}$ دو ماتریس $m \times n$ به ترتیب با سطرهای $a_۱^R, \ldots, a_m^R$ و $b_۱^R, \ldots, b_m^R$ باشند. در این‌صورت

الف) ماتریس A به معنای بیشاندن سطری[۲۰] بزرگتر از ماتریس B است ($A >^{row} B$) هرگاه برای هر $i = ۱, \ldots, m$ داشته باشیم $a_i^R \overset{m}{\succeq} b_i^R$.

ب) ماتریس A به معنای بیشاندن زنجیری[۲۱] بزرگتر از ماتریس B است ($A \gg B$) هرگاه یک مجموعه متناهی از ماتریس‌های T-تبدیل $T_۱, \cdots, T_k$ از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$B = AT_۱T_۲ \ldots T_k.$$

ج) ماتریس A به معنای بیشاندن ماتریسی[۲۲] بزرگتر از ماتریس B است ($A > B$) هرگاه یک ماتریس تصادفی مضاعف P وجود داشته باشد به‌طوری‌که $B = AP$.

باید توجه داشت که اگر ماتریس A به معنای بیشاندن زنجیری، بزرگتر از ماتریس B باشد آنگاه ماتریس A به معنای بیشاندن ماتریسی، بزرگتر از ماتریس B است. همچنین اگر ماتریس A به معنای بیشاندن ماتریسی، بزرگتر از ماتریس B باشد آنگاه ماتریس A به معنای بیشاندن سطری، بزرگتر از

---

[19] matrix T-transform
[20] majorization Row
[21] majorization Chain
[22] majorization Matrix

ماتریس B است. به عبارت دیگر،

$$A \gg B \Rightarrow A > B \Rightarrow A >^{row} B.$$

برای جزئیات بیشتر در مورد مفهوم بیشاندن برداری و ماتریسی و کاربردهای آنها، می‌توان به مارشال و همکاران (۲۰۱۱) مراجعه نمود.

مخاطره‌ها به طورکلی به وسیله توابع توزیع و توابع نرخ خطر و توابع مناسب دیگر، مقایسه و مدل‌بندی می‌شوند. ترتیب‌های تصادفی در بخش‌های مختلف بیمه کاربرد دارند که به‌عنوان نمونه می‌توان به بیمه سرقت اتومبیل، بیمه تصادف، بیمه بدهکاری و غیره اشاره نمود. همچنین ترتیب‌بندی مخاطره‌ها یکی از ابزارهای مهم و پایه‌ای در برآورد احتمال ورشکستگی، پیش‌بینی مجموع خسارت‌ها و تحلیل اصلی حق بیمه‌ها است تا شرکت‌های بیمه بتوانند با در دست داشتن تقریبی از احتمالات ورشکستگی، برای سود یا زیان آینده خود برنامه‌ریزی کنند.

تعریف ۶: (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نامنفی به‌ترتیب با توابع توزیع $F(x)$ و $G(x)$ و توابع بقای $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$ باشند. گوییم X در ترتیب تصادفی معمولی بزرگتر از Y است ($X \geq_{st} Y$) هرگاه برای هر $x > ۰$، $\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x)$. به عبارت دیگر، $X \geq_{st} Y$ اگر و فقط اگر برای هر تابع صعودی $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و با شرط وجود امیدهای ریاضی، داشته باشیم $E(\phi(X)) \geq E(\phi(Y))$.

تعریف ۶ نشان می‌دهد X با احتمال بیشتری، مقادیر بزرگتر را نسبت به Y اختیار می‌کند. محاسبه بسیاری از کمیت‌های مرتبط با علم بیم‌سنجی از قبیل احتمال ورشکستگی، حق بیمه زیان‌بس و چندک‌های ذخیره زیان، به نوعی نیازمند استفاده از دم تابع توزیع یا همان تابع بقا است. تابع بقا در علم بیم‌سنجی از آن جهت مورد توجه است که رخداد یا عدم رخداد مقادیر بزرگ، بیشترین سود یا زیان را به همراه دارد. رابطه

$$X \geq_{st} Y \Longleftrightarrow VaR[X;p] \geq VaR[Y;p], \qquad p \in (۰,۱)$$

بین مقدار در معرض مخاطره و ترتیب معمولی برقرار است. جزئیات بیشتر در مورد بیشاندن و ترتیب‌های تصادفی را می‌توان در برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۱)، برمال‌زن و حیدری (۱۳۹۲) و برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) مشاهده کرد.

تعریف ۷: (دنوا و همکاران، ۲۰۰۵) X در ترتیب زیان‌بس بزرگتر از Y است ($X \geq_{sl} Y$) هرگاه به ازای هر $d \geq ۰$ داشته باشیم $\Pi_X(d) \geq \Pi_Y(d)$.

کمیت $\Pi_X(d)$ در بیمه، بیانگر مقدار حق بیمه زیان بس در یک شرکت بیمه اتکایی است هنگامی‌که سطح نگه‌داشت d در قرارداد بیمه اعمال شده باشد. بنابراین می‌توان گفت $X \geq_{sl} Y$ است هرگاه حق بیمه زیان‌بس برای مخاطره X با سطح نگه‌داشت d، بزرگتر از مقدار متناظر آن، برای مخاطره Y باشد. رابطه

$$X \geq_{sl} Y \Longleftrightarrow TVaR[X;p] \geq TVaR[Y;p], \qquad p \in (۰,۱)$$

بین مقدار در معرض مخاطره دمی و ترتیب زیان بس برقرار است.

۳ مقایسه تصادفی بین مجموع مقادیر خسارت‌ها

ساده‌ترین روش برای مقایسه دو متغیر تصادفی، استفاده از شاخص‌های مرکزی یا شاخص‌های پراکندگی است. اما این شاخص‌ها در نهایت یک عدد هستند و اطلاعات زیادی را در مورد توزیع منتقل نمی‌کنند. از این رو محققان، به روش‌هایی که منعکس کننده اطلاعات بیشتری از توزیع‌ها باشند روی آورده‌اند. در این بخش، به مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارت‌ها پرداخته می‌شود که با استفاده از آن، می‌توان کران‌های را برای تابع بقا یا تابع توزیع مجموع مقادیر خسارت‌ها پیدا کرد.

قضیه ۲: فرض کنید $X_{\lambda_۱}, \cdots, X_{\lambda_n}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی باشند، که در آن X_{λ_i} دارای تابع بقای $\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ با $\lambda_i > ۰$ برای $i = ۱,\cdots,n$ هستند. همچنین فرض کنید $I_{p_۱},\cdots,I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند، که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. بعلاوه فرض کنید برای $i = ۱,\cdots,n$، تابع بقای $\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ نسبت به λ_i صعودی باشد. اگر $(h(p_{۱:n}),\cdots,h(p_{n:n})) \overset{m}{\succeq} (h(q_{۱:n}),\cdots,h(q_{n:n}))$ آن‌گاه

$$\sum_{i=۱}^{n} I_{p_{i:n}} X_{\lambda_{n-i+۱:n}} \geq_{st} \sum_{i=۱}^{n} I_{q_{i:n}} X_{\lambda_{n-i+۱:n}}, \qquad (۴)$$

که در آن $h(p) = -\log p$ یا $h(p) = (۱-p)/p$.

برهان: برای حالت $n = ۲$، کافی است برای هر تابع صعودی نشان داده شود

$$E\{\phi(I_{p_{۱:۲}}X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}})\} \geq E\{\phi(I_{q_{۱:۲}}X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{q_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}})\}.$$

فرض کنید $(-\log q_{۱:۲}, -\log q_{۲:۲}) \overset{m}{\succeq} (-\log p_{۱:۲}, -\log p_{۲:۲})$. در این صورت طبق تعریف ۳ می‌توان نوشت:

$$p_{۱:۲}\, p_{۲:۲} = q_{۱:۲}\, q_{۲:۲} \quad \text{و} \quad p_{۱:۲} + p_{۲:۲} \geq q_{۱:۲} + q_{۲:۲}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{array}{rcl}
E\{\phi(I_{p_{۱:۲}}X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}})\} & = & E\{E\{\phi(I_{p_{۱:۲}}X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}}|I_{p_{۱:۲}})\}\} \\
& = & E\{p_{۱:۲}\phi(X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}}) \\
& + & (۱ - p_{۱:۲})\phi(I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}})\} \\
& = & E\{E\{p_{۱:۲}\phi(X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}}|I_{p_{۲:۲}})\}\} \\
& + & E\{E\{(۱ - p_{۱:۲})\phi(I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}}|I_{p_{۲:۲}})\}\} \\
& = & E\{p_{۱:۲}\, p_{۲:۲}\, \phi(X_{\lambda_{۲:۲}} + X_{\lambda_{۱:۲}}) \\
& + & p_{۱:۲}\,(۱ - p_{۲:۲})\,\phi(X_{\lambda_{۲:۲}})\} \\
& + & E\{\, p_{۲:۲}(۱ - p_{۱:۲})\,\phi(X_{\lambda_{۱:۲}}) \\
& + & (۱ - p_{۱:۲})\,(۱ - p_{۲:۲})\,\phi(\circ)\} \\
& = & p_{۱:۲}\, p_{۲:۲}\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}} + X_{\lambda_{۱:۲}})) \\
& - & E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}})) - E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}})) + E(\phi(\circ))\} \\
& + & p_{۱:۲}\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}}) - E(\phi(\circ))\} \\
& + & p_{۲:۲}\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}} - E(\phi(\circ))\} + E(\phi(\circ)),
\end{array}$$

بنابراین

$$\begin{array}{rcl}
\Delta & = & E\{\phi(I_{p_{۱:۲}}X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{p_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}})\} - E\{\phi(I_{q_{۱:۲}}X_{\lambda_{۲:۲}} + I_{q_{۲:۲}}X_{\lambda_{۱:۲}})\} \\
& = & (p_{۱:۲}\, p_{۲:۲} - q_{۱:۲}\, q_{۲:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}} + X_{\lambda_{۱:۲}}))
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}})) - E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}})) + E(\phi(\circ))\}\\
&+ \quad (p_{۱:۲} - q_{۱:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}} - E(\phi(\circ))\}\\
&+ \quad (p_{۲:۲} - q_{۲:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}} - E(\phi(\circ))\}\\
&= \quad (p_{۱:۲} - q_{۱:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۲:۲}} - E(\phi(\circ))\}\\
&+ \quad (p_{۲:۲} - q_{۲:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}} - E(\phi(\circ))\}, \quad (p_{۱:۲}\, p_{۲:۲} = q_{۱:۲}\, q_{۲:۲})\\
&\geq \quad (p_{۱:۲} - q_{۱:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}} - E(\phi(\circ))\}\\
&+ \quad (p_{۲:۲} - q_{۲:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}} - E(\phi(\circ))\}, \quad (X_{\lambda_{۲:۲}} \geq_{st} X_{\lambda_{۱:۲}})\\
&= \quad (p_{۱:۲} + p_{۲:۲} - q_{۱:۲} - q_{۲:۲})\,\{E(\phi(X_{\lambda_{۱:۲}} - E(\phi(\circ))\}\\
&\geq \quad \circ, \qquad\qquad (p_{۱:۲} + p_{۲:۲} \geq q_{۱:۲} + q_{۲:۲})
\end{aligned}
$$

برای $n > ۲$، فرض کنید

$$
Z = I_{p_{i:n}} X_{\lambda_{n-i+۱:n}} + I_{p_{j:n}} X_{\lambda_{n-j+۱:n}} + \sum_{\ell=i\neq j} I_{p_{\ell:n}} X_{\lambda_{n-l+۱:n}}
$$

و

$$
W = I_{q_{i:n}} X_{\lambda_{n-i+۱:n}} + I_{q_{j:n}} X_{\lambda_{n-j+۱:n}} + \sum_{\ell=i\neq j} I_{q_{\ell:n}} X_{\lambda_{n-l+۱:n}}.
$$

کافی است تحت شرط $(h(q_{۱:n}), \cdots, h(q_{n:n})) \overset{m}{\succeq} (h(p_{۱:n}), \cdots, h(p_{n:n}))$ نشان داده شود. برای هر زوج مرتب (i, j) با $۱ \leq i \leq j \leq n$ رابطه

$$
Z \geq_{st} W, \tag{۵}
$$

برقرار است که با استفاده از حالت $n = ۲$ و این واقعیت که ترتیب تصادفی معمولی تحت عمل پیچش، بسته است اثبات می‌شود. برای زمانی که $h(p) = (۱-p)/p$ به طور مشابه اثبات می‌شود. نکته‌ای که باید متذکر شد این است که اگر شرط $(h(q_{۱:n}), \cdots, h(q_{n:n})) \overset{m}{\succeq} (h(p_{۱:n}), \cdots, h(p_{n:n}))$ با $(-h(q_{۱:n}), \cdots, -h(q_{n:n})) \overset{m}{\succeq} (-h(p_{۱:n}), \cdots, -h(p_{n:n}))$ عوض شود، آن‌گاه جهت نامساوی تصادفی (۴) نیز عوض می‌شود.

قضیه ۳: (لی و لی، ۲۰۱۶) فرض کنید $X_{\lambda_1},\cdots,X_{\lambda_n}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی باشند، که در آن X_{λ_i} دارای تابع بقای $\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ با $\lambda_i>0$ برای $i=1,\cdots,n$ هستند. همچنین فرض کنید $I_{p_1},\cdots,I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i})=p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. به‌علاوه فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) برای $i=1,\cdots,n$، تابع بقای $\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ صعودی و مقعر، نسبت به λ_i باشد.

(ب) تابع بقای $\sum_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$ تابعی شُور-مقعر نسبت به λ_i ها باشد.

در این صورت

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\overset{m}{\succeq}(\mu_1,\cdots,\mu_n)\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n} I_{p_{i:n}}X_{\mu_{n-i+1:n}}\geq_{st}\sum_{i=1}^{n} I_{p_{i:n}}X_{\lambda_{n-i+1:n}}.$$

قضیه زیر، نتیجه‌ای مستقیم از قضایای ۲ و ۳ است که براساس آن می‌توان مجموع مقایر خسارت‌ها را با یکدیگر مقایسه نمود وقتی که ماتریس $(\boldsymbol{\lambda},-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}))$ به ماتریس $(\boldsymbol{\mu},-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}))$ تغییر پیدا می‌کند. بدین منظور ابتدا فضای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{U}_n=\left\{(\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{pmatrix} a_1\ldots a_n\\ b_1\ldots b_n\end{pmatrix}:\ a_i>0\,,\ b_i<0,\ (a_i-a_j)(b_i-b_j)\geq 0\right\}.$$

قضیه ۴: فرض کنید $X_{\lambda_1},\cdots,X_{\lambda_n}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی باشند، که در آن X_{λ_i} دارای تابع بقای $\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ با $\lambda_i>0$ برای $i=1,\cdots,n$ هستند. همچنین فرض کنید $I_{p_1},\cdots,I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i})=p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. بعلاوه فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) برای $i=1,\cdots,n$، تابع بقای $\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ صعودی و مقعر، نسبت به λ_i باشد.

(ب) تابع بقای $\sum_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$ تابعی شُور-مقعر نسبت به λ_i ها باشد.

آن‌گاه برای $(\boldsymbol{\lambda},-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}))\in\mathcal{U}_n$ و $(\boldsymbol{\mu},-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}))\in\mathcal{U}_n$ داریم:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & \lambda_n\\ -h(p_1)\ldots & & -h(p_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & \ldots & \mu_n\\ -h(q_1)\ldots & & -h(q_n)\end{pmatrix}\ \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_{q_i} X_{\mu_i} \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} I_{p_i} X_{\lambda_i},$$

که در آن $h(p) = -\log p$ یا $h(p) = (1-p)/p$.

برهان: از $(\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{h(p)}) \gg (\boldsymbol{\mu}, -\boldsymbol{h(q)})$ نتیجه می‌شود روابط

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \overset{m}{\succeq} (\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

$$(-h(p_{1:n}), \cdots, -h(p_{n:n})) \overset{m}{\succeq} (-h(q_{1:n}), \cdots, -h(q_{n:n}))$$

برقرار است. چون $(\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{h(p)}) \in \mathcal{U}_n$ و $(\boldsymbol{\mu}, -\boldsymbol{h(q)}) \in \mathcal{U}_n$ است می‌توان نتیجه گرفت که جایگشت‌های τ_1 و τ_2 از اعداد $\{1, \cdots, n\}$ چنان وجود دارد که $\tau_1(\boldsymbol{\lambda})$، $\tau_1(-\boldsymbol{h(p)})$، $\tau_2(\boldsymbol{\mu})$ و $\tau_2(-\boldsymbol{h(q)})$ دارای مولفه‌های صعودی هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{p_i} X_{\lambda_i} \overset{D}{=} \sum_{i=1}^{n} I_{p_{i:n}} X_{\lambda_{n-i+1:n}} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} I_{q_i} X_{\mu_i} \overset{D}{=} \sum_{i=1}^{n} I_{q_{i:n}} X_{\mu_{n-i+1:n}} \tag{۶}$$

که در آن $\overset{D}{=}$ به معنای هم‌توزیع بودن متغیرهای تصادفی است. چون

$$(-h(p_{1:n}), \cdots, -h(p_{n:n})) \overset{m}{\succeq} (-h(q_{1:n}), \cdots, -h(q_{n:n}))$$

براساس قضیه ۲ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{p_{i:n}} X_{\mu_{n-i+1:n}} \leq_{st} \sum_{i=1}^{n} I_{q_{i:n}} X_{\mu_{n-i+1:n}} \tag{۷}$$

از طرف دیگر، براساس قضیه ۳ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{p_{i:n}} X_{\mu_{n-i+1:n}} \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} I_{p_{i:n}} X_{\lambda_{n-i+1:n}} \tag{۸}$$

که با ترکیب کردن روابط (۷) و (۸) نتیجه لازم، حاصل می‌شود.

تفسیر قضیه ۴ این است که اگر $\sum_{i=1}^{n} I_{p_i} X_{\lambda_i}$ و $\sum_{i=1}^{n} I_{q_i} X_{\mu_i}$ به ترتیب متناظر با مجموع خسارت‌های n فرد، در دو شرکت بیمه A و B باشند آنگاه احتمال مخاطره پذیری شرکت A بیشتر از شرکت B است.

۴ یک مصداق در مدل نرخ خطر وارون متناسب

فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل، به‌ترتیب با توابع توزیع $F_1, \cdots, F_n$ باشند. متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ از مدل با نرخ خطر وارون متناسب پیروی می‌کنند هرگاه مقادیر ثابت مثبت $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ و تابع توزیع پایه $F(x)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $F_i(x) = F^{\lambda_i}(x)$.

قضیه ۵: فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_{\lambda_1}, \cdots, X_{\lambda_n}$ از مدل با نرخ خطر وارون متناسب پیروی کنند. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که مستقل از X_{λ_i} ها هستند. آنگاه برای $(\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{h(p)}) \in \mathcal{U}_n$ و $(\boldsymbol{\mu}, -\boldsymbol{h(q)}) \in \mathcal{U}_n$ داریم:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ -h(p_1) & \dots & -h(p_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_n \\ -h(q_1) & \dots & -h(q_n) \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_{q_i} X_{\mu_i} \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} I_{p_i} X_{\lambda_i},$$

که در آن $h(p) = -\log p$ یا $h(p) = (1-p)/p$.

برهان: برای اثبات قضیه، کافی است شرایط (الف) و (ب) از قضیه ۴ برقرار باشند. تابع بقای هر کدام از متغیرهای تصادفی X_{λ_i} به صورت

$$\bar{F}(x; \lambda_i) = 1 - F^{\lambda_i}(x),$$

است. واضح است که $\bar{F}(x; \lambda_i)$ تابعی صعودی و مقعر از λ_i ها است. بنابراین شرط (الف) از قضیه ۴ برقرار است. از طرف دیگر چون بیشاندن زنجیری، بیشاندن سطری رانتیجه می‌دهد با استفاده از قضیه ۵.۲ از بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۴)، نتیجه می‌شود تابع بقای $\sum_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$ تابعی شُور–مقعر نسبت

به λ_i ها است. اکنون شرط (ب) از قضیه ۴ نیز برقرار است.

از قضیه ۵ می‌توان نتیجه گرفت که در صورتی که اندازه خسارت‌ها از یک خانواده کلی از توزیع‌ها بنام نرخ خطر وارون متناسب پیروی کند آنگاه می‌توان مجموع مقادیر خسارت‌ها را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی با یکدیگر مقایسه نمود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارت‌ها پرداخته می‌شود که در آن تابع بقای X_{λ_i} تابعی صعودی و مقعر در λ_i ها است و بیشاندن زنجیری چند متغیره بین ماتریس پارامترها برقرار است. مصداقی که برای نتایج به دست آمده از این مقاله وجود دارد خانواده توزیع‌های نرخ خطر وارون متناسب است که این خانواده از توزیع‌ها، کاربرد زیادی در مباحث قابلیت اعتماد، آنالیز بقا، اقتصاد و پزشکی دارد.

تقدیر و تشکر

نویسنده از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر این مقاله شده است کمال قدردانی و تشکر را دارد. این تحقیق باحمایت مالی دانشگاه زابل با شماره گرنت UOZ-GR-۹۵۱۷-۶۱ انجام شده است.

مراجع

بازیاری، ا. (۱۳۹۱)، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارتهای وابسته، مجله علوم آماری،۶، ۳۷-۲۱.

برمال‌زن، ق.، حیدری، ع. (۱۳۹۲)، نتایجی جدید در مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n، مجله علوم آماری، ۷، ۴۴-۲۵.

برمال‌زن، ق.، حیدری، ع.، عبداله‌زاده، م. (۱۳۹۱)، مقایسه تصادفی فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل نمایی، مجله علوم آماری، ۷، ۳۹-۵.

برمال‌زن، ق.، حیدری، ع.، معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶-۱۸۹.

Balakrishnan, N., Barmalzan, G., and Haidari, A. (2014), On Usual Multivariate Stochastic Ordering of Order Statistics from Heterogeneous Beta Variables, *Journal of Multivariate Analysis*, **127**, 147-150.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A. T., and Balakrishnan, N. (2015), Stochastic Comparison of Aggregate Claim Amounts Between Two Heterogeneous Portfolios and Its Applications, *Insurance:Mathematics and Economics*, **61**, 235-241.

Dahan, M. Frostig, E., and Langberg, N. A. (2004), Insurance Contracts Portfolios with Heterogeneous Insured Ages, *Insurance:Mathematics and Economics*, **35**, 137-153.

Denuit, M. Dhaene, J. Goovaerts, M. J., and Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley& Sons.

Denuit, M., and Frostig, E. (2006), Heterogeneity and the Need for Capital in the Individual Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 42-66.

Frostig, E. (2001), A Comparison Between Homogeneous and Heterogeneous Portfolios, *Insurance Mathematics and Economics*, **29**, 59-71.

Hu, T., and Ruan, L. (2004), A Note on Multivariate Stochastic Comparisons of Bernoulli Random Variables, *Journal Statistical Planning and Inference*, **126**, 281-288.

Jorion, P. (2000), *Value at Risk*, McGraw-Hill, New York.

Karlin, S., and Novikoff, A. (1963), Generalized Convex Inequalities, *Pacific J. Mathematics*, **13**, 1251-1279.

Khaledi, B., and Ahmadi, S. S. (2008), On Stochastic Comparison Between Aggregate Claim Amounts, *Journal of Statistical Planning and Inference,* **138**, 3121-3129.

Li, C., and Li, X. (2016), Sufficient Conditions for Ordering Aggregate Heterogeneous Random Claim Amounts,*Insurance: Mathematics and Economics*, **70**, 406-413.

Ma, C. (2000), Convex Orders for Linear Combinations of Random Variables, *Journal Statistical Planning Inference*, **84**, 11-25.

Marshall, A. W., and Olkin, I. (2007), *Lifetime Distributions,* Springer, New York.

Marshall, A. W., Olkin, I., and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications,* The 2nd edition. Springer, New York.

Shaked, M., and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.

Spreeuw, J. (1998), Majorization Order Applied to a System of Mortality Profit Distribution, *Proceedings of the Second International Congress on Insurance: Mathematics and Economics*, **4**.

Zhang, Y., and Zhao, P. (2015), Comparisons on Aggregate Risks from Two Sets of Heterogeneous Portfolios, *Insurance: Mathematics and Economics*, **65**, 124-135.