

## بهینه‌سازی قابلیت اطمینان و هزینه در سیستم‌های سری-موازی تعمیرپذیر با نرخ شکست وانی شکل

الهام بصیری

گروه آمار، دانشگاه کوثر بجنورد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۶

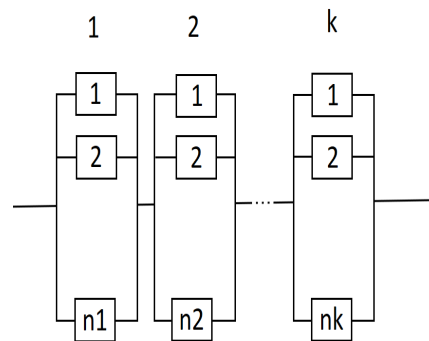
**چکیده:** وقتی یک سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعیین قابلیت اطمینان این سیستم، یعنی احتمال این که از مدت زمان معینی بیشتر عمر کند، مورد علاقه است. از طرفی قابلیت اطمینان یک سیستم به ساختار و قابلیت اطمینان اجزای آن نیز بستگی دارد. بنابراین برای افزایش قابلیت اطمینان سیستم می‌توان قابلیت اطمینان اجزای آن را بهبود بخشید. برای این منظور لازم است فعالیت‌های تعمیر و نگهداری انجام شود که خود منجر به افزایش هزینه‌ها خواهد شد. یک راه دیگر تغییر مکان اجزای سیستم‌ها است. در این مقاله با کمینه کردن هزینه و بیشینه نمودن قابلیت اطمینان یک سیستم سری-موازی، مکان اجزای سیستم و زمان بهینه نگهداری پیشگیرانه تعیین می‌شوند. در انتها، نحوه کاربست روش ارائه شده در یک مثال عددی نشان داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم سری-موازی، تعمیر و نگهداری، نرخ شکست وانی شکل، بهینه‌سازی، قابلیت اطمینان.

## ۱ مقدمه

در دنیای صنعتی رقابت در تولید محصولات و انتظارات مشتریان افزایش یافته و به دنبال آن تولیدکنندگان در تلاش کاهش هزینه‌ها، افزایش کیفیت و بالا بردن قابلیت اطمینان تولیدات هستند. شاخص‌های مختلفی در صنعت معرفی شده‌اند که قابلیت اطمینان یکی از مهم‌ترین آن‌ها است. قابلیت اطمینان برابر است با احتمال اینکه یک محصول تولیدشده هدف‌های خاص خود را برای یک زمان معین به نحو راضی‌کننده‌ای انجام دهد. قابلیت اطمینان و کاهش احتمال خرابی‌ها در صنایع حساسی مانند هوافضا و دفاعی از اهمیت بیشتری برخوردار است و امروزه مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران قرار گرفته است (بارلو و پروشان، ۱۹۷۵؛ میکر و اسکوبار، ۱۹۹۸؛ کرباسیان و طباطبایی، ۱۳۸۸؛ اسدی، ۱۳۹۵).

سیستم‌های صنعتی معمولاً از اجزا و قطعات متعددی تشکیل شده‌اند که براساس یک ساختار از پیش تعیین شده برای یک هدف معین در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. هر کدام از اجزا به طور مستقل یا وابسته به دیگر اجزا، وظیفه‌ای را انجام می‌دهند. از معروف‌ترین سیستم‌ها می‌توان به سیستم‌های سری، موازی و سری-موازی (تابادا و همکاران، ۲۰۰۸) اشاره کرد، که در شکل ۱ نمایش داده شده است. در یک سیستم سری-موازی، که یکی از پرکاربردترین چیدمان‌های رایج در صنایع مختلف است، مجموعه اصلی به صورت سری قرار می‌گیرد و اجزای موازی به هر یک از اجزای سری اضافه می‌گردند.



شکل ۱. سیستم سری-موازی

تابع قابلیت اطمینان<sup>۱</sup> یا تابع بقا<sup>۲</sup> برای یک سیستم سری-موازی متشکل از  $k$  سیستم سری، هر یک

<sup>۱</sup>Reliability Function

<sup>۲</sup>Survival Function

دارای  $n_i$ ،  $1 \leq i \leq k$ ، زیرسیستم موازی، به صورت

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^k (1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}(t))), \quad (1)$$

است، که در آن  $R_{ij}$  قابلیت اطمینان جزء  $i$ ام است.

یکی از موضوعات مهم در نظریه قابلیت اطمینان مبحث تعمیر و نگهداری<sup>۱</sup> است. تقریباً تمام سیستم‌ها دارای عمر محدود هستند و با گذشت زمان امکان خرابی و از کار افتادگی آن‌ها وجود دارد. حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا این خرابی‌ها قابل رفع هستند؟ چگونه می‌توان از وقوع چنین خرابی‌هایی جلوگیری کرد؟ برخی از سیستم‌ها در صورت خرابی تحت یک فرآیند مشخص می‌توانند به وضعیت فعال قبل برگردند. چنین سیستم‌هایی را تعمیرپذیر گویند. در دنیای واقعی بسیاری از سیستم‌ها مانند اتومبیل، هواپیما، کامپیوتر و ... از نوع تعمیرپذیر هستند. فعالیت‌های تعمیر و نگهداری نقش مهمی در کارکرد مطلوب سیستم‌های صنعتی ایفا می‌کنند. از طرفی این فعالیت‌ها معمولاً پرهزینه هستند. لذا، انتخاب برنامه تعمیر و نگهداری بهینه که با صرف حداقل هزینه انجام می‌شود امری ضروری است. فعالیت‌های تعمیر و نگهداری براساس زمانی که انجام می‌شوند به دو دسته تعمیر و نگهداری اصلاحی<sup>۲</sup> و پیشگیرانه<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند. تعمیرات اصلاحی به مجموعه فعالیت‌هایی گفته می‌شود که بعد از وقوع خرابی به منظور راه‌اندازی مجدد سیستم انجام می‌شوند و تا قبل از وقوع خرابی هیچگونه مداخله‌ای صورت نمی‌گیرد. تعمیرات پیشگیرانه نیز شامل مجموعه فعالیت‌های برنامه‌ریزی شده‌ای از قبیل بازرسی، تنظیم، تعویض و تعمیر است که قبل از وقوع خرابی به منظور حفظ سیستم‌ها و جلوگیری از توقفات پیش‌بینی نشده انجام می‌شوند. از اهداف تعمیر و نگهداری می‌توان به موارد رفع نواقص و معایب جزئی قبل از نیاز به تعمیرات کلی، جلوگیری از افزایش اثرات عیوب و نواقص و توسعه آن در کل سیستم، افزایش طول عمر تجهیزات و در نتیجه صرفه‌جویی در خرید تجهیزات جدید، کاهش توقف تولید و جلوگیری از زیان‌های ناشی از توقف در کار، افزایش راندمان و بازده کاری، کاهش در مصرف لوازم یدکی و تقلیل هزینه مربوطه، تشخیص نوع عملکرد ماشین‌آلات و تعیین هزینه‌های تعمیراتی مربوطه به منظور تصمیم‌گیری در مورد تهیه و انتخاب ماشین‌های جدید، افزایش راندمان تولیدی ماشین‌آلات و کاهش هزینه‌های تولید و همچنین کاهش تعمیرات کلی، تکراری و غیرضروری که باعث صرفه‌جویی در نیروی کار و سرمایه‌های انسانی سازمان می‌شود، اشاره نمود

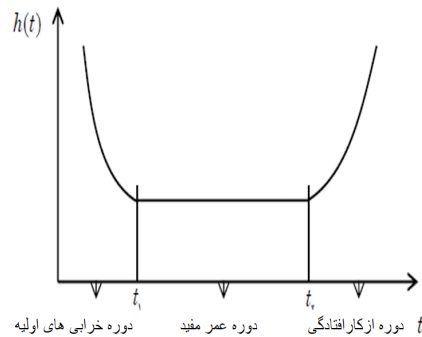
<sup>1</sup>Maintenance

<sup>2</sup>Corrective Maintenance

<sup>3</sup>Preventive Maintenance

(حاج شیرمحمدی، ۱۳۹۵؛ وانگ و فام، ۲۰۰۶؛ بلوم، ۲۰۰۵).

تابع نرخ شکست<sup>۱</sup> نشان‌دهنده عملکرد شکست در طول زمان است. این کمیت در واقع نرخ از کارافتادگی سیستم را در زمان  $t$  نمایش می‌دهد و معیاری برای اندازه‌گیری سالخوردگی سیستم است. سیستمی که دارای نرخ شکست صعودی<sup>۲</sup> (IFR) باشد با افزایش زمان فرسوده می‌شود. حال اگر تابع نرخ شکست نزولی<sup>۳</sup> (DFR) باشد قابلیت اطمینان سیستم با افزایش زمان بهبود پیدا می‌کند. یکی از الگوهای معروف تابع نرخ شکست که در مهندسی قابلیت اطمینان کاربردهای فراوانی داشته و پدیده‌های متنوعی را می‌توان تفسیر کرد الگوی نرخ شکست  $U$ -شکل یا وانی‌شکل<sup>۴</sup> است. در این الگو تابع نرخ شکست دارای نموداری به صورت شکل ۲ است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این حالت تابع نرخ شکست سیستم ابتدا برای یک دوره نزولی خواهد بود که به آن دوره خرابی‌های اولیه می‌گویند. در یک دوره زمانی نرخ شکست تقریباً ثابت است که به آن دوره عمر مفید می‌گویند. سپس نرخ شکست شروع به صعود می‌کند که به آن دوره از کارافتادگی یا استهلاک گفته می‌شود. این الگو برای طول عمر محصولات مختلف صنعتی و حتی موجودات زنده مانند انسان در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال یک اتومبیل در ابتدای تولید نرخ از کارافتادگی آن بالاست که به آن مرحله آب‌بندی گفته می‌شود. پس از این دوران نرخ شکست آن ثابت است و بعد از مدت زمانی دوره سالخوردگی (استهلاک) آن شروع می‌شود که در این دوران نرخ از کارافتادگی با گذشت زمان افزایش می‌یابد.



شکل ۰۲. نمودار تابع نرخ شکست وانی‌شکل

<sup>1</sup>Failure Rate Function

<sup>2</sup>Increasing Failure Rate

<sup>3</sup>Decreasing Failure Rate

<sup>4</sup>Bathtub-Shaped

یکی از توزیع‌های مهم طول عمر توزیع وایبل<sup>۱</sup> است، که به دلیل انعطاف‌پذیری بالا در مطالعات قابلیت اطمینان کاربرد وسیعی دارد. متغیر طول عمر  $T$  دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل  $b > 0$  و پارامتر مقیاس  $a > 0$  است هرگاه تابع چگالی احتمال، تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ شکست آن به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} f(t) &= ba^b t^{b-1} e^{-(at)^b}, \quad t > 0 \\ R(t) &= e^{-(at)^b}, \\ h(t) &= ba^b t^{b-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

باشند. یکی از مهم‌ترین دلایل شهرت این توزیع این است که با تغییر پارامترها، تابع نرخ شکست این توزیع می‌تواند صعودی، نزولی یا ثابت باشد. بنابراین دارای اشکال گوناگونی است و این خاصیت موجب شده که از این توزیع برای برازش بسیاری از مجموعه داده‌ها استفاده شود. در رابطه (۲) ملاحظه می‌شود که تابع نرخ شکست توزیع وایبل برای مقادیر  $b > 1$  تابعی صعودی IFR و برای  $b < 1$  تابعی نزولی DFR است. همچنین به ازای  $b = 1$ ، توزیع وایبل به توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{a}$  تبدیل می‌شود و تابع نرخ شکست آن مقداری ثابت است (شکل ۳). تعمیمی از توزیع وایبل توسط زی و لای (۱۹۹۶) معرفی شد که توزیع وایبل افزوده<sup>۲</sup> نامیده می‌شود. این توزیع از ترکیب دو توزیع وایبل که یکی دارای تابع نرخ شکست نزولی و دیگری دارای تابع نرخ شکست صعودی است، بدست می‌آید. تابع چگالی احتمال، تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ شکست این توزیع به ترتیب به صورت

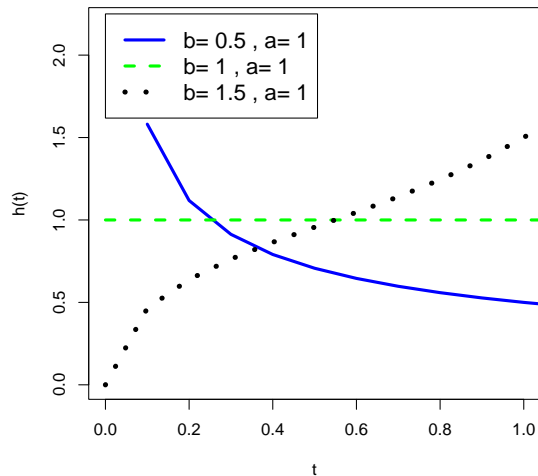
$$\begin{aligned} f(t) &= (ba^b t^{b-1} + dc^d t^{d-1}) e^{-(at)^b - (ct)^d}, \quad t > 0, b > 1, d < 1, a, c > 0, \\ R(t) &= e^{-(at)^b - (ct)^d}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$h(t) = ba^b t^{b-1} + dc^d t^{d-1}, \quad (4)$$

هستند. با مشتق‌گیری از تابع نرخ شکست (۴) و مساوی صفر قرار دادن آن می‌توان نشان داد که تابع

<sup>1</sup>Weibull Distribution

<sup>2</sup>Additive Weibull Distribution



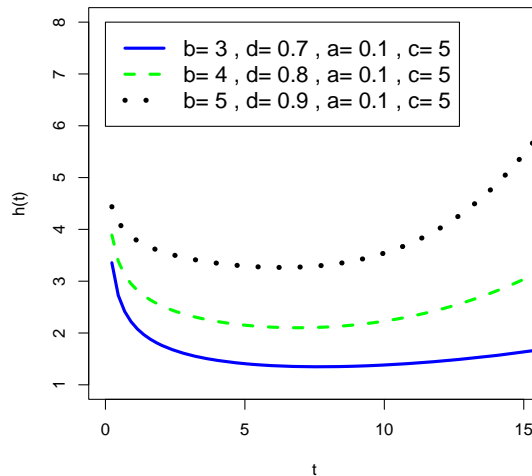
شکل ۳. نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل

نرخ شکست در زمان  $t_0$  به حداقل مقدار خود می‌رسد و سپس افزایش می‌یابد، هرگاه

$$t_0 = \left( \frac{d(1-d)c^d}{b(b-1)a^b} \right)^{\frac{1}{b-d}}. \quad (5)$$

با توجه به اینکه  $b > 1$ ،  $d < 1$  و  $a, c > 0$ ، بنابراین  $t_0$  مقداری مثبت است. شکل ۴ نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل افزوده را به‌ازای پارامترهای مختلف نمایش می‌دهد، که به‌ازای تمام پارامترها همواره وانی‌شکل است.

مسأله مرتبط با سیستم‌ها از منظرهای مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. آشرفینگلد (۱۹۸۴) از جمله اولین کتاب‌هایی است که در زمینه سیستم‌های تعمیرپذیر وجود دارد. لای و چن (۲۰۰۸) دوره جایگزینی بهینه در یک سیستم دو واحدی تحت مدل شوک را با در نظر گرفتن هزینه بدست آوردند. طول دوره بهینه تعمیر و نگهداری پیشگیرانه در سیستم‌های تعمیرپذیر با نرخ خطرهای متفاوت و همچنین با در نظر گرفتن تابع هزینه توسط صفایی و احمدی (۱۳۹۴) تعیین شده است. بهینه‌سازی هزینه تعمیر و نگهداری پیشگیرانه در سیستم‌های چندوضعیتی توسط ایرانمنش و همکاران (۱۳۹۷) مورد بررسی قرار گرفت. با در نظر گرفتن دو معیار قابلیت اطمینان و هزینه مسأله مکان‌یابی اجزای سیستم‌ها



شکل ۴. نمودار تابع نرخ شکست توزیع وایبل افزوده

توسط کرباسیان و همکاران (۱۳۸۹) برای سیستم‌های سری با طول عمر وایبل با پارامتر شکل بزرگتر از یک مورد مطالعه قرار گرفت. برای مطالعه مسائل مشابه می‌توان به فلقی و همکاران (۱۳۸۳) و سالازار و همکاران (۲۰۰۶) مراجعه نمود.

در این مقاله یک سیستم سری-موازی در نظر گرفته شده است که اجزای آن در صورت خرابی قابل تعمیر هستند. زمانی که یک خرابی رخ دهد باید تصمیم به تعمیر آن اتخاذ شود. از طرف دیگر، در طول دوره عملکرد سیستم، به منظور افزایش طول عمر آن، می‌توان نگهداری پیشگیرانه انجام داد. در اینجا توزیع وایبل افزوده که دارای نرخ شکست وانی شکل است، برای توزیع طول عمر سیستم در نظر گرفته شده است. هدف مکان‌یابی بهینه اجزای این سیستم و دوره بهینه نگهداری پیشگیرانه است طوری که بیشترین قابلیت اطمینان با کمترین هزینه حاصل شود. در ادامه، یک سیستم سری-موازی با شرایط مشخص معرفی و توابع قابلیت اطمینان و هزینه آن ارائه می‌شوند. سپس برای حداکثر کردن قابلیت اطمینان و حداقل نمودن هزینه، یک تابع هدف که ترکیب خطی از قابلیت اطمینان و هزینه است معرفی می‌شود. از حل این مسأله مکان بهینه اجزای سیستم و دوره بهینه نگهداری پیشگیرانه تعیین می‌شوند. در انتها به منظور ارزیابی نتایج مقاله به ارائه یک مثال پرداخته شده است.

## ۲ بیان مسأله

سیستمی سری-موازی که متشکل از  $k$  سیستم سری با  $n_i$ ،  $1 \leq i \leq k$ ، زیر سیستم موازی هستند را در نظر بگیرید که

الف - همه اجزای سیستم تعمیرپذیر باشند.

ب - همه اجزا مستقل از هم کار کنند و در نتیجه خرابی‌های آن‌ها مستقل از هم رخ دهند.

ج - زمان‌های انجام تعمیر و نگهداری اصلاحی و پیشگیرانه، بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی هستند.

د - هرکدام از اجزای سیستم بتواند در هر مکانی از سیستم قرار گیرد.

ه - طول عمر اجزای سیستم دارای توزیع وایبل افزوده با تابع قابلیت اطمینان (۳) و نرخ شکست (۴) باشد.

با استفاده از رابطه (۱) می‌توان نشان داد، تابع قابلیت اطمینان چنین سیستمی بعد از زمان  $t$  از انجام

نگهداری پیشگیرانه به صورت

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^k \left[ 1 - \prod_{\ell=1}^N \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{lij}(t))^{X_{lij}} \right], \quad (6)$$

است، که در آن قابلیت اطمینان مؤلفه  $\ell$ ام واقع در مکان  $j$ امین جزء زیر سیستم  $i$ ام،  $1 \leq i \leq k$ ،  $1 \leq j \leq n_i$ ،  $1 \leq \ell \leq N$ ،  $N = \sum_{i=1}^k n_i$  همچنین

$$X_{lij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر مؤلفه } \ell \text{ام در مکان } j \text{امین جزء زیر سیستم } i \text{ام قرار گیرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال با استفاده از روابط (۳) و (۶) بدست می‌آید

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^k \left[ 1 - \prod_{\ell=1}^N \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ 1 - \exp \left( - (a_{lij}t)^{b_{lij}} - (c_{lij}t)^{d_{lij}} \right) \right\}^{X_{lij}} \right], \quad (7)$$

که در آن  $a_{lij}, c_{lij} > 0$ ،  $b_{lij} > 1$  و  $d_{lij} < 1$ ، به‌ازای  $1 \leq i \leq k$ ،  $1 \leq j \leq n_i$ ،  $1 \leq \ell \leq N$  و  $N = \sum_{i=1}^k n_i$ .



معیار دیگر مورد مطالعه در این مقاله تابع هزینه است که از سه بخش هزینه مکان‌یابی اجزای سیستم، هزینه فعالیت‌های نگهداری پیشگیرانه و هزینه فعالیت‌های تعمیر اصلاحی تشکیل شده است. فرض کنید  $C_{lij}$  نشان‌دهنده هزینه استقرار جزء  $\ell$ ام در مکان  $j$ ام زیر سیستم  $i$ ام باشد. در این صورت هزینه مکان‌یابی کل اجزای سیستم به صورت

$$C_1 = \sum_{\ell=1}^N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{lij} C_{lij}, \quad (8)$$

است. حال اگر  $C_{lij}^p$  هزینه انجام عملیات نگهداری پیشگیرانه بر روی جزء  $\ell$ ام واقع در مکان  $j$ ام زیر سیستم  $i$ ام باشد، آنگاه میانگین هزینه نگهداری پیشگیرانه برای کل دوره عمر سیستم به صورت

$$C_2 = \sum_{\ell=1}^N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{lij} C_{lij}^p \left[ \frac{T^*}{t} \right], \quad (9)$$

خواهد بود، که در آن  $[\cdot]$  نشان‌دهنده جزء صحیح است و

$$T^* = \begin{cases} t_0 & 0 < t < t_0 \\ T - t_0 & t_0 < t < T, \end{cases} \quad (10)$$

که در آن  $t_0$  در رابطه (۵) تعریف شده است. اما با در نظر گرفتن یک دوره از نگهداری پیشگیرانه تعداد خرابی‌های مورد انتظار با توجه به فرآیند پواسن برابر

$$E(N(t)) = \int_0^t h(t) dt,$$

است، که در آن  $h(\cdot)$  تابع نرخ شکست است. از رابطه (۴) نتیجه می‌شود

$$E(N(t)) = \int_0^t b_{lij} a_{lij}^{b_{lij}} t^{b_{lij}-1} + d_{lij} c_{lij}^{d_{lij}} t^{d_{lij}-1} dt = (ta_{lij})^{b_{lij}} + (tc_{lij})^{d_{lij}}.$$

بنابراین در کل دوره عمر سیستم، تعداد خرابی‌های اتفاقی و در نتیجه تعداد تعمیرات اصلاحی برابر

۳۶۰ ..... بهینه‌سازی قابلیت اطمینان و هزینه در سیستم‌های سری-موازی

بعد از خرابی‌های اتفاقی جزء  $\ell$ ام در مکان  $j$ ام زیر سیستم  $i$ ام باشد، میانگین هزینه تعمیرات اصلاحی در کل دوره عمر سیستم عبارت است از

$$C_p = \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \{ (ta_{lij})^{b_{lij}} + (tc_{lij})^{d_{lij}} \} X_{lij} C_{lij}^c \frac{T^*}{t}. \quad (11)$$

با بکارگیری روابط (۸)، (۹) و (۱۱) تابع هزینه از رابطه

$$\begin{aligned} C_{total} &= C_1 + C_p + C_r \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{lij} C_{lij} + \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{lij} C_{lij}^p \left[ \frac{T^*}{t} \right] \\ &\quad + \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \{ (ta_{lij})^{b_{lij}} + (tc_{lij})^{d_{lij}} \} X_{lij} C_{lij}^c \frac{T^*}{t}, \quad (12) \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود، که در آن  $T^*$  در رابطه (۱۰) تعریف شده است. از آنجا که بیشینه کردن  $R_{sys}$  معادل کمینه نمودن  $1 - R_{sys}$  است، بنابراین هدف کمینه کردن تابع  $1 - R_{sys}$  در (۷) و به حداقل رساندن تابع  $C_{total}$  در (۱۲) است. یعنی

$$\begin{cases} \min 1 - R_{sys} \\ \min C_{total} \end{cases} \quad (13)$$

محدودیت‌های مدل عبارتند از:

الف- مقدار قابلیت اطمینان سیستم از حداقل مقدار قابل قبول بیشتر باشد، یعنی  $R_{sys} \geq R_{min}$ .

ب- مقدار هزینه از حداکثر بودجه مورد نظر بیشتر نشود، یعنی  $C_{total} \leq C_{max}$ .

ج- مقدار  $X_{lij}$  صفر یا یک است. یعنی

$$X_{lij} = 0, 1, \quad \ell = 1, \dots, N, \quad N = \sum_{i=1}^k n_i, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

د- هر جزء تنها در یک مکان قرار گیرد. به عبارتی

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{lij} = 1, \quad \ell = 1, \dots, N, \quad N = \sum_{i=1}^k n_i.$$

ه- در هر مکان تنها یک جزء قرار گیرد. به عبارتی

$$\sum_{\ell=1}^N X_{lij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad N = \sum_{i=1}^k n_i.$$

برای حل مسأله فوق روش‌های مختلفی وجود دارد. برای مطالعه این روش‌ها بعنوان مثال می‌توان به **ارگات (۲۰۰۵)** مراجعه نمود. در این مقاله به منظور تک‌هدفه کردن این مدل دوهدفه، از روش وزن‌دهی استفاده شده است. علاوه بر این، با توجه به اینکه توابع هزینه و قابلیت اطمینان واحدهای متفاوت دارند و نمی‌توانند با هم جمع شوند، مقادیر این توابع نسبت به مقادیر بهینه هر یک یعنی  $R_{sys}^{opt}$  و  $C_{total}^{opt}$  در نظر گرفته شده‌اند. به عبارت دیگر، بجای در نظر گرفتن خود این توابع از  $\frac{1-R_{sys}}{1-R_{sys}^{opt}}$  و  $\frac{C_{total}}{C_{total}^{opt}}$  که بیانگر درصد انحراف از مقدار بهینه هستند، استفاده شده‌اند. بنابراین، براساس توابع هدف (۱۳)، یک تابع هدف به صورت

$$W_1 \frac{C_{total}}{C_{total}^{opt}} + W_2 \frac{1 - R_{sys}}{1 - R_{sys}^{opt}}, \quad W_1 + W_2 = 1, \quad 0 \leq W_1 \leq 1, \quad 0 \leq W_2 \leq 1. \quad (14)$$

در نظر گرفته می‌شود که باید کمیته شود. از حل این مسأله مقادیر  $X_{lij}$  که نشان‌دهنده مکان اجزا است و  $t$  که دوره تعمیر و نگهداری پیشگیرانه است، تعیین می‌شوند. برای حل مسأله فوق در قدم اول دو تابع هدف بطور جداگانه حل می‌شوند. سپس با قرار دادن جواب‌های بهینه بدست آمده، یعنی  $R_{sys}^{opt}$  و  $C_{total}^{opt}$  در رابطه (۱۴) مدل جدید حل می‌شود.

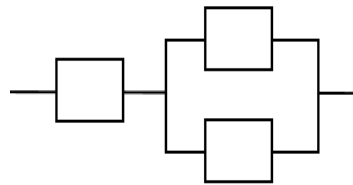
**ملاحظه ۱.** اساساً مسائل بهینه‌سازی چندهدفه دارای جواب منحصر بفرد نیستند. در این‌گونه مسائل جواب بهینه پارتو تعریف می‌شود که براساس نوع ارجحیت یک هدف می‌تواند یک جواب منحصر بفرد یا مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه بدست آید. روش وزن‌دهی یکی از روش‌هاست که با انتخاب وزن‌های مناسب توسط تصمیم‌گیرنده خیره، مسأله را در قالب یک مسأله تک‌هدفه می‌سازد و با یکی از روش‌های حل عددی مسائل بهینه‌سازی جواب مورد نظر بدست می‌آید. این جواب یک جواب توافقی براساس نظر

خبرگان خواهد بود.

ملاحظه ۲. بعنوان حالت خاصی از سیستم سری-موازی می‌توان سیستم سری و سیستم موازی را در نظر گرفت. بنابراین در نتایج بدست آمده چنانچه  $n_i = 1$ ، به‌ازای  $k$ ،  $1 \leq i \leq k$ ، آنگاه نتایج را برای سیستم‌های سری و در صورتی‌که  $k = 1$  باشد نتایج برای سیستم‌های موازی بدست می‌آیند.

## ۲.۱ مثال عددی

یک سیستم سری-موازی به‌صورت شکل ۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید سه مؤلفه باید در این سیستم قرار بگیرند. هدف تعیین مکان مناسب این مؤلفه‌ها و زمان بهینه نگهداری پیشگیرانه است طوری که هزینه کل حداقل و قابلیت اطمینان سیستم حداکثر شود.



شکل ۵. نمودار سیستم سری-موازی مثال عددی

فرض کنید هزینه استقرار جزء  $l$ ام در مکان  $j$ ام زیر سیستم  $i$ ام، هزینه انجام عملیات نگهداری پیشگیرانه بر روی جزء  $l$ ام واقع در مکان  $j$ ام زیر سیستم  $i$ ام و هزینه تعمیرات اصلاحی بعد از خرابی‌های اتفاقی جزء  $l$ ام در مکان  $j$ ام زیر سیستم  $i$ ام به‌ازای  $1 \leq l \leq 3$ ،  $1 \leq i \leq 2$ ،  $1 \leq j \leq n_i$ ،  $n_1 = 1$  و  $n_2 = 2$ ، به‌ترتیب به‌صورت

$$\begin{cases} C_{111} = 0.09 & C_{121} = 0.01 & C_{112} = 0.06 & C_{122} = 0.08 \\ C_{211} = 0.02 & C_{221} = 0.08 & C_{212} = 0.07 & C_{222} = 0.07 \\ C_{311} = 0.09 & C_{321} = 0.09 & C_{312} = 0.08 & C_{322} = 0.01 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{111}^p = 0.85 & C_{121}^p = 0.21 & C_{112}^p = 0.72 & C_{122}^p = 0.82 \\ C_{211}^p = 0.11 & C_{221}^p = 0.85 & C_{212}^p = 0.74 & C_{222}^p = 0.88 \\ C_{311}^p = 0.89 & C_{321}^p = 0.82 & C_{312}^p = 0.81 & C_{322}^p = 0.12 \end{cases}$$

و

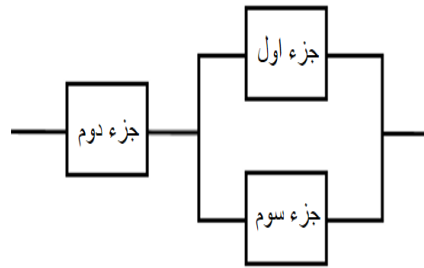
$$\begin{cases} C_{111}^c = 0.85 & C_{121}^c = 0.32 & C_{112}^c = 0.72 & C_{122}^c = 0.82 \\ C_{211}^c = 0.21 & C_{221}^c = 0.41 & C_{212}^c = 0.75 & C_{222}^c = 0.83 \\ C_{311}^c = 0.87 & C_{321}^c = 0.85 & C_{312}^c = 0.89 & C_{322}^c = 0.21 \end{cases}$$

باشند. بعلاوه فرض کنید  $a_{lij} = 0.1$ ،  $c_{lij} = 0.01$ ،  $b_{lij} = 2$  و  $d_{lij} = 0.5$ ، به ازای  $1 \leq i \leq 2$ ،  $1 \leq j \leq n_i$ ،  $1 \leq \ell \leq 3$ ،  $1 \leq \ell \leq 3$ ،  $1 \leq j \leq n_i$  بدست می‌آید. همچنین در این مثال فرض می‌شود  $T = 2$ ،  $C_{max} = 10$  و  $R_{min} = 0.8$ . در این صورت، نتایج حل این مدل با استفاده از نرم‌افزار  $R$  در جدول ۱ گزارش شده است. در ستون اول جدول ۱ مقادیر مختلف برای ضریب تابع هزینه ارائه شده است. لازم به یادآوری است که ضرایب تابع قابلیت اطمینان نیز از این جدول قابل حصول است زیرا  $W_2 = 1 - W_1$ . در ستون دوم جدول طول دوره بهینه تعمیر و نگهداری پیشگیرانه ارائه شده است. در ستون سوم و چهارم جدول نیز به ترتیب مقادیر بهینه  $C_{total}^{opt}$  و  $R_{sys}^{opt}$  که مقادیر بهینه تابع هزینه و قابلیت اطمینان هستند، گزارش شده‌اند. در نهایت و در ستون‌های بعدی مکان‌های بهینه اجزای سیستم مشخص شده‌اند. در جدول ۱ می‌توان مشاهده کرد در کلیه نتایج کسب شده  $C_{total} \leq C_{max}$  و  $R_{sys} \geq R_{min}$ . بعلاوه مطابق انتظار با افزایش ضریب تابع هزینه و در نتیجه کاهش ضریب تابع قابلیت اطمینان، مقادیر هزینه و قابلیت اطمینان کاهش می‌یابند. همچنین، در این حالت مقدار دوره بهینه نگهداری پیشگیرانه نیز افزایش پیدا می‌کند زیرا هرچقدر دوره نگهداری پیشگیرانه کوتاهتر باشد هزینه بیشتری صرف انجام فعالیت‌های نگهداری خواهد شد. زمانی که بعنوان مثال ضریب تابع هزینه برابر  $0.1$  و در نتیجه ضریب تابع قابلیت اطمینان برابر  $0.8$  باشد، بعد از گذشت  $0.232$  واحد زمانی بهتر است فعالیت‌های نگهداری پیشگیرانه انجام شود. مقدار قابلیت اطمینان سیستم در این زمان برابر  $0.85$  و مقدار هزینه تمام شده برابر  $5.755$  است. به همین ترتیب می‌توان برای سایر مقادیر فرض شده برای ضریب تابع هزینه دوره بهینه نگهداری پیشگیرانه را مشاهده نمود. هرگاه ضریب تابع هزینه برابر صفر باشد این بدین معنی است که به حداقل رسیدن هزینه اهمیتی ندارد و تنها به حداقل رسیدن قابلیت اطمینان تحت محدودیت‌های  $C_{total} \leq C_{max}$  و  $R_{sys} \geq R_{min}$  دارای اهمیت است. بطور مشابه، یک بودن ضریب تابع هزینه به این معنی است که تنها هزینه دارای اهمیت است. در جدول ۱ مقدار  $i$  شمارنده زیرسیستم‌های سری و  $j$  نیز نشان‌دهنده مکان‌های زیرسیستم‌ها هستند. بنابراین به عنوان مثال  $(i, j) = (2, 1)$  به این معنی است که جزء اول در اولین مکان زیرسیستم دوم قرار دارد. بطور مشابه  $(i, j) = (1, 1)$  به این معنی است که جزء دوم در اولین مکان زیرسیستم اول قرار گیرد و بالاخره

بهینه‌سازی اجزای سیستم در این مثال را نشان می‌دهد. به معنی قرارگیری جزء سوم در دومین مکان زیر سیستم دوم است. شکل ۶ نیز مکان  $(i, j) = (2, 2)$

جدول ۱. نتایج حاصل از حل مدل در مثال عددی

مکان بهینه اجزا $(i, j)$	مقدار بهینه		دوره نگهداری پیشگیرانه	ضریب تابع هزینه
	هزینه	قابلیت اطمینان		
جزء سوم	جزء اول	جزء دوم		
(۲, ۲)	(۲, ۱)	(۱, ۱)	۰/۹۵۰	۰/۲۳۲
(۲, ۲)	(۲, ۱)	(۱, ۱)	۰/۹۵۰	۰/۲۳۲
(۲, ۲)	(۲, ۱)	(۱, ۱)	۰/۹۵۰	۰/۲۳۲
(۲, ۲)	(۲, ۱)	(۱, ۱)	۰/۹۴۴	۰/۲۹۰
(۲, ۲)	(۲, ۱)	(۱, ۱)	۰/۹۰۰	۰/۸۱۳



شکل ۶. مکان بهینه اجزای سیستم در مثال عددی

## بحث و نتیجه‌گیری

از آنجا که دغدغه اکثر طراحان و کارفرمایان سیستم‌ها افزایش قابلیت اطمینان سیستم بدون افزایش ملموس هزینه‌ها است، در این مقاله با دو هدف حداقل کردن هزینه و حداکثر نمودن قابلیت اطمینان به تعیین مکان بهینه اجزای یک سیستم سری-موازی پرداخته شد و دوره بهینه تعمیر و نگهداری پیشگیرانه نیز تعیین گردید. برای دستیابی به این اهداف با استفاده از روش وزن‌دهی مسأله بهینه‌سازی دوهدفه به یک مسأله یک‌هدفه تبدیل و حل شد. وزن اختصاص داده شده به هر تابع هدف با توجه به اهمیت هر کدام از توابع هدف تعیین شد. نتایج این مقاله برای سیستم‌های سری و همچنین سیستم‌های موازی به‌عنوان حالت خاصی قابل حصول است.

## تقدیر و تشکر

لازم است از سردبیر، هیئت تحریریه، داوران و ویراستار محترم مجله به خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادات ارزنده که باعث بهبود چشمگیری در مقاله شده است، تقدیر و تشکر شود.

## مراجع

- اسدی، م. (۱۳۹۵). آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، مرکز نشر دانشگاهی، اصفهان، ویرایش دوم.
- ایرانمنش، ف.؛ رضاپور، م. و پورموسی، ر. (۱۳۹۷). بهینه‌سازی تعمیر و نگهداری پیشگیرانه در یک سیستم چند وضعیتی، مجله علوم آماری، جلد ۱۲، شماره ۱، ۷۲-۵۷.
- حاج شیرمحمدی، ع. (۱۳۹۵). برنامه‌ریزی تعمیر و نگهداری، انتشارات ارکان دانش، چاپ بیست‌وسوم.
- صفایی، ف. و احمدی، ج. (۱۳۹۴). مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر براساس توابع نرخ خرابی و احتمال تعمیر مینیمال، مجله علوم آماری، جلد ۹، شماره ۱، ۷۶-۶۱.
- فلقی، ح، حقی فام، م. ر. و رضانی، م. (۱۳۸۳). بهبود قابلیت اطمینان شبکه‌های توزیع انرژی الکتریکی توسط جایگذاری بهینه تجهیزات کلیدزنی، فصلنامه امیرکبیر، ۳۵۱-۳۳۸.
- کرباسیان، م. و طباطبایی، ل. (۱۳۸۸). آشنایی با قابلیت اطمینان، انتشارات ارکان دانش، اصفهان، جلد اول.
- کرباسیان، م.؛ قندهاری، م. و عابدی، س. (۱۳۸۹). بهینه‌سازی تعمیر و نگهداری پیشگیرانه مبتنی بر قابلیت اطمینان سیستم بر مبنای هزینه‌ها و قابلیت اطمینان وابسته به مکان اجزای سیستم، مجله مدیریت تولید و عملیات، ۳۰-۱۹.

Ascher, H. and Feingold, H. (1984), *Repairable Systems Reliability*, New York: M. Dekker.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability models*, Florida State Univ Tallahassee.

- Bloom, N. (2005), *Reliability Centered Maintenance (RCM): Implementation Made Simple*, New York: McGraw-Hill.
- Ehrgott, M. (2005), *Multicriteria Optimization*, (Vol. 491), Springer Science & Business Media.
- Lai, M. T. and Chen, Y. C. (2008), Optimal Replacement Period of a Two-unit System with Failure Rate Interaction and External Shocks, *International Journal of Systems Science*, **39**, 71-79.
- Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley and Sons. Inc., New York.
- Salazar, D., Rocco, C. M. and Galván, B. J. (2006), Optimization of Constrained Multiple-Objective Reliability Problems Using Evolutionary Algorithms, *Reliability Engineering and System Safety*, **91**, 1057-1070.
- Taboada, H. A., Espiritu, J. F. and Coit, D. W. (2008), Design Allocation of Multistate Series-Parallel Systems for Power Systems Planning: A multiple Objective Evolutionary Approach, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, **222**, 381-391.
- Wang, H. and Pham, H. (2006), *Reliability and Optimal Maintenance*, Springer Science and Business Media.
- Xie, M. and Lai, C. D. (1996), Reliability Analysis Using an Additive Weibull Model with Bathtub-Shaped Failure Rate Function, *Reliability Engineering and System Safety*, **52**, 87-93.



## **Optimization of Reliability and Cost in Series-Parallel Repairable Systems with Bathtub-Shaped Failure Rate**

E. Basiri

Department of Statistics, Kosar University of Bojnord, Bojnord , Iran.

**Abstract:** When a system is used, it is often of interest to determine with what probability it will work longer than a pre-fixed time. In other words, determining the reliability of this system is of interest. On the other hand, the reliability of each system depends on the structure and reliability of its components. Therefore, in order to improve the reliability of the system, the reliability of its components should be improved. For this purpose, it is necessary to carry out maintenance operations, which will increase costs. Another way to increase the reliability of systems is to change the location of the components. In this paper, the location of system components and optimal maintenance period are determined by minimizing the costs and maximizing the reliability of a series-parallel system. Finally, a numerical example is presented to evaluate the results in the paper.

**Keywords:** Series-Parallel System, Maintenance, Bathtub-Shaped Failure Rate, Optimization, Reliability.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62N05, 62P30.