مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۱، ص ۵۵ – ۷۲
DOI: 10.29252/jss.14.1.55

مدلی از شوک گردشی در حالت گسسته

محمدحسین پورسعید و نادر اسدیان

گروه آمار، دانشگاه لرستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۱۰

چکیده: یک سیستم در دوره‌های زمانی گسسته در معرض دنباله‌ای از شوک‌ها قرار دارد به طوری‌که شوک‌ها در هر یک از دوره‌ها با احتمالی مانند p بطور تصادفی و مستقل از هم رخ می‌دهند. اگر تعداد شوک‌های متوالی وارده بر سیستم کمتر از یک سطح بحرانی از پیش تعیین شده مانند $k(\geq ۱)$ باشد، آن‌گاه به سیستم آسیبی نمی‌رسد. همچنین سیستم با احتمالی مانند θ خراب می‌شود هرگاه تعداد شوک‌های متوالی برابر با k باشد و به محض آن‌که تعداد شوک‌های متوالی به $k+۱$ برسد، سیستم کاملاً از کار می‌افتد. از این رو، این مدل را می‌توان نسخه‌ای از شوک گردشی دانست که در آن، شوک‌ها در دوره‌های زمانی گسسته رخ می‌دهند و الگوی رفتاری سیستم نیز در مواجهه با k شوک متوالی، قطعی و تعینی نیست. در این مقاله، ویژگی‌های سیستم تحت این مدل، به ویژه گشتاورهای مرتبه اول و دوم طول عمر سیستم و برآورد پارامترهای مجهول در آن بررسی و به تعمیمی از مدل اشاره می‌شود. همچنین، روشی برای محاسبه میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: شوک مدل، مدل شوک گردشی، توزیع هندسی تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

شوک مدل‌ها، در نظریه قابلیت اطمینان، بیمه و امورمالی کاربرد گسترده‌ای دارند. برای مثال، اگر مراجعه مشتریان به یک شرکت بیمه یا زیان‌های وارده بر یک شرکت تولیدی را شوک بدانیم، آن‌گاه در مدل‌بندی زمان انتظار مشتریان، زمان ورشکستگی شرکت تولیدی یا رفتار سیستم‌هایی که در طول زمان بطور تصادفی

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمدحسین پورسعید، poursaeed.m@lu.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 90B25

در معرض شوک قرار دارند، از شوک مدل‌ها استفاده می‌شود. یک شوک ممکن است آسیبی جزیی به سیستم وارد کند و در نهایت باعث خرابی آن شود یا این‌که سیستم را بلافاصله از فعالیت بیاندازد. بنابراین در نظریه شوک مدل، احتمال سالم بودن سیستم تحت شوک در فاصله‌ای مانند $(\circ, t)$ و میانگین طول عمر آن، مسائلی اساسی به شمار می‌روند و پاسخگویی به آن‌ها،از اهمیت بالایی برخوردار است (اریلماز و بایراموگلو، ۲۰۱۴ و لروند و همکاران، ۲۰۱۹). در مبحث شوک مدل، فرض می‌شود که یک سیستم (یا یک قطعه) در معرض شوک‌هایی قرار دارد که مقدار شوک‌ها یا زمان وقوع آن‌ها، تصادفی است. مدل‌بندی شوک‌ها با توجه به مقدار شوک، زمان بین شوک‌ها و معیارهای شکست سیستم انجام می‌شود و به صورت مدل‌های شوک تجمعی[۱]، شوک غایی[۲]، شوک گردشی[۳]، شوک دلتا[۴]، یا مدل‌های ترکیبی[۵] در نظر گرفته می‌شوند.

در مدل شوک تجمعی، سیستم از کار می‌افتد هرگاه مجموع مقدار شوک‌های وارده بر سیستم از یک حد آستانه بگذرد و در مدل شوک غایی به محض این‌که مقدار یک شوک از سطح داده‌شده‌ای بگذرد، سیستم از کار می‌افتد. برای آشنایی بیشتر با مدل‌های نامبرده شده، به سومیتا و شانتی کومار (۱۹۸۵) و گات (۱۹۹۰) مراجعه شود. در مدل شوک گردشی نیز به محض این‌که تعداد شوک‌های متوالی بحرانی از سطح داده شده k بگذرد، سیستم از کار می‌افتد. اگر مقدار n-امین شوک، تعداد شوک‌های رخ داده تا زمان t و همچنین طول عمر سیستم به ترتیب با U_n، $N(t)$ و T نشان داده‌شوند، آن‌گاه

$$T \leq t \Leftrightarrow \min\{n : U_{n-j} > s, j = \circ, ..., k-1\} \leq N(t) \qquad (1)$$

که در آن $s \geq \circ$، نیز سطحی تعیین شده برای بحرانی بودن شوک است. برای اطلاع بیشتر از مدل شوک گردشی، می‌توان به اریلماز (۲۰۱۲ و ۲۰۱۵) و منابع مورد استفاده آن‌ها مراجعه کرد.

با ترکیب مدل‌های پیشین یا معرفی مدل‌هایی جدید نیز مطالعاتی انجام گرفته است. مدل دلتا شوک توسط لی و کونگ (۲۰۰۷)، لی و ژائو (۲۰۰۷)، اریلماز (۲۰۱۳)، اریلماز و بایراموگلو (۲۰۱۴) و پورسعید (۲۰۱۹) بررسی شده‌است که در این مدل هرگاه فاصله بین دو شوک متوالی کمتر از مقدار از پیش تعیین شده δ باشد، سیستم خراب می‌شود. پرورده و بالاکریشنان (۲۰۱۵) و لروند و همکاران (۲۰۱۹) نیز بررسی‌هایی مرتبط با مدل‌های ترکیبی انجام داده‌اند.

---

[1] Cumulative shock model
[2] Extreme shock model
[3] Run shock model
[4] δ-shock model
[5] Mixed models

در این مقاله، مدلی از شوک گردشی در نظر گرفته می‌شود که در بخش ۲ معرفی خواهد شد. در بخش ۳ به مدل‌بندی و بررسی ویژگی‌های سیستم تحت این مدل، برآورد پارامترهای مجهول در آن و تعمیمی از مدل پرداخته می‌شود. در بخش ۴ نیز روشی برای محاسبه میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته ارائه می‌شود.

۲ معرفی مدل

در مدل شوک گردشی تعریف شده در (۱)، سیستم با وقوع فقط و فقط k شوک متوالی بحرانی، از کار می‌افتد در صورتی که امکان آسیب دیدن یک سیستم در مواجهه با سطوح مرزی نیز وجود دارد. از این‌رو در این مقاله به جای در نظر گرفتن یک سطح بحرانی، در واقع نواری بحرانی در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که سیستم در مواجهه با ناحیه‌ای از آن قطعاً خراب می‌شود و امکان خرابی سیستم در مواجهه با ناحیه دیگر نیز وجود دارد. بنابراین، سیستمی در نظر گرفته می‌شود که در دوره‌های زمانی $t = ۱, ۲, ...$ در معرض دنباله‌ای از شوک‌ها قرار دارد به گونه‌ای که احتمال وقوع شوک در هر یک ازدوره‌ها عددی مانند p بوده و $k(\geq ۱)$ نیز سطحی بحرانی است. اگر تعداد شوک‌های متوالی کمتر از k باشد، به سیستم هیچ‌گونه آسیبی نمی‌رسد و اگر تعداد شوک‌های متوالی برابر با k باشد سیستم با احتمالی مانند θ $(۰ < \theta < ۱)$، خراب می‌شود و به محض آن‌که تعداد شوک‌های متوالی به $k + ۱$ برسد، سیستم کاملاً از کار می‌افتد.

زیان‌های مالی وارده بر شرکت‌های تولیدی و همچنین عدم بارندگی‌ها در مناطق کشاورزی که باعث ورشکستگی شرکت‌ها یا از بین رفتن محصولات زراعی می‌شوند، می‌توانند مثال‌هایی مرتبط با مدل شوک گردشی معمولی، محسوب شوند. برای مثال، در مدل جدید با در نظر گرفتن $\theta = ۰/۲$ و $k = ۳$ برای شرکت‌های تولیدی، می‌توان گفت که شرکت‌ها با احتمال ۲۰ درصد ورشکست می‌شوند هرگاه در سه دوره زمانی متوالی با زیان‌های مالی بحرانی مواجه شوند، و اگر در چهار دوره زمانی متوالی با زیان‌های مالی بحرانی مواجه شوند، ورشکسته خواهند شد که در این حالت، نسخه جدیدی از مدل شوک گردشی در حالت گسسته مطرح است که در این تحقیق بررسی می‌شود.

تذکر: در مدل جدید، p به عنوان احتمال وقوع هرگونه شوک در هر یک از دوره‌های زمانی معرفی شده‌است. با این حال، شبیه (۱)، p را نیز می‌توان به صورت احتمال وقوع شوک بحرانی در هر یک از دوره‌های زمانی تعریف کرد. بنابراین، اگر U_t میزان شوک وارده بر سیستم در t-امین دوره زمانی و $s \geq ۰$ نیز سطحی تعیین شده برای بحرانی بودن شوک باشد، آن‌گاه:

$$p = P(U_t > s) : t = ۱, ۲, ...$$

همان‌طور که فرض شد، سیستم در مواجهه با k شوک متوالی اول، با احتمال θ خراب می‌شود که در این‌صورت طول عمر آن، برابر با تعداد دوره‌های زمانی لازم تا رسیدن به k شوک متوالی اول خواهد بود، ولی اگر سیستم سالم بماند و بلافاصله در دوره زمانی بعدی نیز شاهد وقوع شوک باشیم، کاملاً از کار می‌افتد و در نتیجه، طول عمر سیستم، یک واحد بیشتر از تعداد دوره‌های زمانی لازم تا رسیدن به اولین k شوک متوالی است. اگر سیستم در مواجهه با k شوک متوالی اول سالم بماند و بلافاصله، در دوره زمانی بعدی نیز شوک رخ ندهد آن‌گاه تا وقوع k شوک متوالی دوم، سیستم فعال است. در این‌صورت، عملکرد سیستم در مواجهه با k شوک متوالی دوم مشابه عملکرد آن در مواجهه با k شوک متوالی اول خواهد بود. بنابراین همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، طول عمر سیستم با تعداد دوره‌های زمانی لازم تا رسیدن به k شوک متوالی بسیار مرتبط است. توزیع زمان انتظار تا k موفقیت متوالی را توزیع هندسی تعمیم‌یافته می‌نامند که در تعریف زیر، به بعضی از ویژگی‌های آن اشاره شده است. برای اطلاع بیشتر می‌توان به فیلیپو و همکاران (۱۹۸۳)، مالور و امی (۲۰۰۱) و همچنین اریلماز و دمیر (۲۰۰۷) مراجعه نمود.

تعریف ۱: در تکرار آزمایش‌های مستقل برنولی با احتمال موفقیت p، اگر متغیر تصادفی W_k تعداد آزمایش‌های لازم تا رسیدن به k–امین موفقیت متوالی باشد آن‌گاه W_k دارای توزیع هندسی تعمیم‌یافته مرتبه با پارامتر p خواهد بود که تابع احتمال، تابع مولد احتمال و میانگین آن به صورت (بالاکریشنان و کوتراس، ۲۰۰۲)

$$\begin{aligned} W_k \sim G(k,p) \Leftrightarrow P(W_k = x) \\ = I(x=k)p^k + I(x=k+1, k+2, \ldots) \sum_{y=1}^{x-k} q^y p^{x-y} B(x-k-y, k, x-k-1) \end{aligned}$$

است، که در آن $B(\ell,k,n) = \sum_{s=0}^{\min\{\frac{1}{k}, n-\ell+1\}} (-1)^s \binom{n-\ell+1}{s}\binom{n-sk}{n-\ell}$ و

$$E(t^{W_k}) = \frac{(1-pt)(pt)^k}{1-t(1-q(pt)^k)} \quad , \quad E(W_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}. \tag{2}$$

۳ مدل‌بندی سیستم و برخی از ویژگی‌های آن

برای مدل‌بندی سیستم، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هندسی تعمیم‌یافته مرتبه k با پارامتر p با $X_1, X_2, \ldots$ و همچنین طول عمر سیستم با $W_{k,\theta}$ نشان داده می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده در

بخش دوم، طول عمر سیستم با احتمال θ برابر با X_1 ، با احتمال $(1-\theta)p$ برابر با (X_1+1) ، با احتمال $\theta(1-\theta)q\theta$ برابر با $(X_1+1)+X_2$ و به همین ترتیب، خواهد بود. بنابراین،

$$W_{k,\theta} = \begin{cases} X_1 & \text{با احتمال} \quad \theta \\ (X_1+1) & \text{با احتمال} \quad (1-\theta)p \\ (X_1+1)+X_2 & \text{با احتمال} \quad (1-\theta)q\theta \\ (X_1+1)+(X_2+1) & \text{با احتمال} \quad (1-\theta)q(1-\theta)p \\ (X_1+1)+(X_2+1)+X_3 & \text{با احتمال} \quad [(1-\theta)q]^2\theta \\ (X_1+1)+(X_2+1)+(X_3+1) & \text{با احتمال} \quad [(1-\theta)q]^2(1-\theta)p \\ \vdots & \vdots \end{cases} \tag{3}$$

و میانگین طول عمر سیستم را می‌توان با توجه به (۳) بدست آورد. با این‌حال، برای مدل‌بندی بهتر سیستم و محاسبه سایر کمیت‌های مرتبط با آن، به صورت زیر نیز می‌توان عمل کرد.

نظر به امکان از کارافتادگی سیستم، بعد از مواجهه با شوک‌هایی متوالی به طول k و همچنین امکان وقوع شوک در دوره زمانی بعد از آن‌ها، متناظر با هر یک از k شوک متوالی و همچنین دوره‌های زمانی بعد از آن‌ها، آزمایش‌هایی برنولی در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو، متغیر تصادفی برنولی Y_i مرتبط با خرابی سیستم، بعد از وقوع i–امین k شوک متوالی و همچنین متغیر تصادفی برنولی Z_i نیز مرتبط با وقوع شوک در دوره زمانی بعد از مشاهده i–امین k شوک متوالی، تعریف می‌شود. بنابراین با توجه به فرضیات مسئله، $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی مستقل از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع خواهند بود، به گونه‌ای که

$$P(Y_i=1)=\theta, \quad P(Z_i=1)=p : i=1,2,3,...$$

اگر متغیر تصادفی M تعداد دفعات "وقوع k شوک متوالی" باشد که سیستم قبل از خرابی با آن‌ها مواجه می‌شود، آنگاه M مستقل از $X_1, X_2, ...$ است و پیشامد $(M=m)$ نیز معادل با یکی از پیشامدهای

$$((Y_1=0, Z_1=0), ..., (Y_m=0, Z_m=0), Y_{m+1}=1) \tag{4}$$

$$((Y_1=0, Z_1=0), ..., (Y_m=0, Z_m=0), (Y_{m+1}=0, Z_{m+1}=1) \tag{5}$$

خواهد بود که در آن ۱ $P(Y_\circ = \circ) = P(Z_\circ = \circ) =$. بنابراین،

$$W_{k,\theta} = \begin{cases} \sum_{i=۱}^{m+۱}(X_i + ۱) - ۱ & [(۱-\theta)q]^m\theta \quad \text{با احتمال} \quad m = \circ, ۱, ... \\ \sum_{i=۱}^{m+۱}(X_i + ۱) & [(۱-\theta)q]^m(۱-\theta)p \quad \text{با احتمال} \quad m = \circ, ۱, ... \end{cases}$$

در حالت خاص ۱ $k =$، متغیرهای تصادفی مستقل $X_۱, X_۲, ...$ دارای توزیع هندسی معمولی با میانگین $\frac{۱}{p}$ هستند. در این‌صورت، $S_{m+۱} = \sum_{i=۱}^{m+۱} X_i$ دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای ۱ + m، p و میانگین $\frac{m+۱}{p}$ خواهد بود و

$$\begin{aligned} P(W_{۱,\theta} \geq t) &= \theta \sum_{m=\circ}^{\infty} [(۱-\theta)q]^m P(S_{m+۱} \geq t-m)] I(t \geq ۲m+۱) \\ &+ (۱-\theta)p \sum_{m=\circ}^{\infty} [(۱-\theta)q]^m P(S_{m+۱} \geq t-m-۱) I(t \geq ۲(m+۱)). \end{aligned}$$

لم ۱: متغیر تصادفی M دارای توزیع هندسی با میانگین $\frac{۱-(p+q\theta)}{p+q\theta}$ است.

برهان: با توجه به روابط (۴) و (۵) و همچنین استقلال $Y_۱, Y_۲, ...$ و $Z_۱, Z_۲, ...$، داریم:

$$\begin{aligned} P(M = m) &= (\prod_{i=۱}^{m} P(Y_i = \circ, Z_i = \circ)) \times P(Y_{m+۱} = ۱) \\ &+ (\prod_{i=۱}^{m} P(Y_i = \circ, Z_i = \circ)) \times P(Y_{m+۱} = \circ, Z_{m+۱} = ۱) \\ &= (q(۱-\theta))^m (p+q\theta), \quad m = \circ, ۱, ۲... \end{aligned}$$

قضیه ۱: میانگین طول عمر سیستم برابر است با $\frac{۱-p^k(p+q\theta)}{qp^k(p+q\theta)}$.

برهان: با توجه به استقلال متغیر تصادفی M و دنباله $X_۱, X_۲, \ldots$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E(W_{k,\theta}) &= E(E(W_{k,\theta} \mid M)) = \sum_{m=۰}^{\infty} E\Big(\sum_{i=۱}^{m+۱}(X_i+۱)-۱\Big)[(۱-\theta)q]^m\theta \\ &+ \sum_{m=۰}^{\infty} E\Big(\sum_{i=۱}^{m+۱}(X_i+۱)\Big)[(۱-\theta)q]^m(۱-\theta)p \\ &= E(X_۱+۱)E(M+۱) - \frac{\theta}{p+q\theta} = \frac{E(X_۱)+(۱-\theta)}{p+q\theta} \qquad (۶) \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته مرتبه k که در (۲) آمده و جایگذاری در (۶)، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

فرع ۱: با توجه به قضیه (۱)

$$\lim_{p\to ۰} E(W_{k,\theta}) = \infty \quad , \quad \lim_{p\to ۱} E(W_{k,\theta}) = k+۱-\theta$$
$$\lim_{\theta\to ۱} E(W_{k,\theta}) = E(W_k) \quad , \quad \lim_{\theta\to ۰} E(W_{k,\theta}) = E(W_{k+۱})$$

در واقع دو رابطه آخر، ارتباط بین میانگین سیستم تحت مدل جدید را با میانگین سیستم‌هایی که در مواجهه با وقوع k یا $k+۱$ شوک متوالی بطور قطعی خراب می‌شوند را نشان می‌دهند.

فرع ۲: با توجه به (۶)، میانگین طول عمر سیستم تابعی نزولی از θ است. از طرفی میانگین هندسی تعمیم‌یافته مرتبه k با پارامتر p، تابعی صعودی از k و نزولی از p است (بالاکریشنان و کوتراس ، ۲۰۰۲)، بنابراین میانگین طول عمر سیستم نیز تابعی صعودی از k و نزولی از p خواهد بود. در شکل‌های ۱ تا ۵، به ازای بعضی از مقادیر k، p و θ، نمودار میانگین طول عمر سیستم رسم شده است.

قضیه ۲: الف– میانگین تعداد شوک‌های وارده تا زمان خرابی سیستم برابر است با $\frac{۱-p^k(p+q\theta)}{qp^{k-۱}(p+q\theta)}$.
ب– میانگین تعداد دفعاتی که سیستم تا زمان خرابی با k شوک متوالی مواجه می‌شود برابر است با $\frac{q+p\theta}{p+q\theta}$.
برهان: الف: اگر متغیر تصادفی برنولی V_i، متناظر با وقوع شوک در i–امین دوره زمانی باشد و همچنین تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی با R نشان داده شود، آنگاه $R = \sum_{i=۱}^{W_{k,\theta}} V_i$ خواهد بود. بر پایه فرضیات مسئله، $E(V_i) = p : i = ۱, ۲, \ldots$ و همچنین $W_{k,\theta}$ و $\{V_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مستقل از هم هستند. بنابراین، با بکارگیری معادله والد، $E(R) = E(W_{k,\theta})E(V_۱) = pE(W_{k,\theta})$ و با

جایگذاری، نتیجه مطلوب بدست می‌آید.
ب: اگر تعداد دفعاتی که سیستم تا زمان خرابی با k شوک متوالی مواجه می‌شود با L نشان داده شود، با توجه به (۴) و (۵) داریم

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)[(1-\theta)q]^m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} m[(1-\theta)q]^m(1-\theta)p \\ &= E(M+1)-(1-\theta)p\sum_{m=0}^{\infty}[(1-\theta)q]^m = \frac{q+p\theta}{p+q\theta}. \end{aligned} \tag{7}$$

فرع ۳: با توجه به (۷)، نتایج زیر به دست می‌آیند.

$$p=q \Rightarrow E(L)=1 \quad , \quad \lim_{\theta\to 1} E(L)=1 \quad , \quad \lim_{\theta\to 0} E(L)=\frac{q}{p}$$

فرع ۴: میانگین تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی ($(E(R)$)، تابعی صعودی از k و تابعی نزولی از θ و p است. با توجه به قسمت الف قضیه ۲، فرع ۱ و $E(R)=pE(W_{k,\theta})$، روابط

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to 0} E(R)=\infty \quad , \quad \lim_{p\to 1} E(R)=k+1-\theta \\ &\lim_{\theta\to 0} E(R)=pE(W_{k+1}) \quad , \quad \lim_{\theta\to 1} E(R)=pE(W_k) \end{aligned}$$

برقرار هستند. همچنین، میانگین تعداد دفعاتی که سیستم تا زمان خرابی با k شوک متوالی مواجه می‌شود ($(E(L)$)، تابعی نزولی از p می‌باشد و نسبت به θ، تابعی ثابت است هرگاه $p=\frac{1}{2}$. اگر $0<p<\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}<p<1$)، آنگاه $E(L)$ نسبت به θ، تابعی نزولی (صعودی) است. در شکل‌های ۶ تا ۸، عملکرد میانگین تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی به عنوان تابعی از k، p و θ و همچنین در شکل‌های ۹ و ۱۰، عملکرد میانگین تعداد دفعاتی که سیستم تا زمان خرابی با k شوک متوالی مواجه می‌شود، نیز به عنوان تابعی از p و θ رسم شده است.

نکته ۱: برای اثبات قضیه ۱، می‌توان به روش ساده زیر تابع مولد احتمال طول عمر سیستم را نیز به آسانی بدست آورد. با توجه به این‌که لازمه خرابی سیستم، "مشاهده k شوک متوالی" و سپس "موفقیت در انجام یک آزمایش برنولی با پارامتر θ" یا "مشاهده شوک در دوره زمانی بعدی" است، از این‌رو، بعد از مشاهده k شوک متوالی، اگر آزمایش برنولی با پارامتر θ منجر به شکست شود یا در دوره زمانی بعدی

شوکی مشاهده نشود، همین روند ادامه خواهد داشت. بنابراین، با توجه به ارتباط طول عمر سیستم با توزیع هندسی تعمیم‌یافته، لازمه خرابی سیستم، روند تکرار و ادامه آزمایش‌ها تا خرابی سیستم، رابطه

$$\begin{aligned} E(W_{k,\theta}) &= E(X_1 I(Y_1=1)) + E((X_1+1)I(Y_1=0)I(Z_1=1)) \\ &+ E((I(Y_1=0)I(Z_1=0)(X_1+1+W'_{k,\theta})) \\ &= \theta E(X_1) + (1-\theta)pE(X_1+1) + (1-\theta)qE(X_1+1+W'_{k,\theta}) \quad (8) \end{aligned}$$

برقرار است، که در آن، متغیرهای تصادفی $W'_{k,\theta}$ و $W_{k,\theta}$ همتوزیع هستند. بنابراین، با انجام محاسبات

$$E(W_{k,\theta}) = \frac{E(X_1)+(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)p} \quad (9)$$

بدست می‌آید. برای تعیین تابع مولد گشتاور نیز می‌توان مشابه روش به کار رفته در (۸) عمل کرد و قضیه زیر را اثبات نمود.

قضیه ۳: تابع مولد احتمال طول عمر سیستم برابر با

$$E(t^{W_{k,\theta}}) = \frac{(\theta+p(1-\theta)t)E(t^{X_1})}{1-q(1-\theta)tE(t^{X_1})}$$

است، که در آن (با توجه به فرمول (۲))، $E(t^{X_1}) = \frac{(1-pt)(pt)^k}{1-t(1-q(pt)^k)}$.

فرع ۵:

$$E(W^2_{k,\theta}) = \frac{(p+q\theta)E(X_1^2)+2(1-\theta)(1+q)E(X_1)+2q(1-\theta)(E(X_1))^2+2q(1-\theta)^2}{(p+q\theta)^2}$$

نکته ۲: در بررسی عملکرد یک سیستم، پارامتر مجهول θ را می‌توان توسط نسبت دفعاتی که سیستم به علت مواجهه با k شوک متوالی از کار می‌افتد، برآورد نمود و به صورتی مشابه نیز برای پارامتر مجهول p، اقدام کرد. ولی در بیشتر مواقع فقط مقدار طول عمر سیستم را شاهد هستیم. از این‌رو، نمی‌توان از روش فوق‌الذکر بهره برد. اگر فقط یکی از پارامترهای k، p و θ مجهول باشد، با استفاده از گشتاور مرتبه اول و در غیراین‌صورت،

با استفاده از گشتاورهای مراتب بالاتر طول عمر سیستم، می‌توان برآوردگر گشتاوری پارامترها را معرفی نمود. بنابراین، با توجه به $\theta = \frac{1-p^k(p+qE(W_{k,\theta}))}{qp^{k-1}(p+qE(W_{k,\theta}))}$، $k = \frac{-\ln[(p+q\theta)(1+qE(W_{k,\theta}))]}{\ln p}$ و این‌که میانگین طول عمر سیستم، تابعی یکنوا از p است، می‌توان برآوردگرهای گشتاوری را بدست آورد. برای مثال، برآوردگر گشتاوری θ به صورت

$$\tilde{\theta} = \frac{1-p^k(p+q\bar{W}_{k,\theta})}{qp^{k-1}(p+q\bar{W}_{k,\theta})}$$

است که در آن $\bar{W}_{k,\theta} = \frac{\sum_i^n W_{k,\theta,i}}{n}$ و $W_{k,\theta,1}, W_{k,\theta,2}, ..., W_{k,\theta,n}$، نمونه‌ای تصادفی از طول عمر سیستم‌های یکسان و مستقل است.

فرع ۶: به عنوان تعمیمی از مسئله مطرح شده، فرض کنید که سیستم در دوره‌های زمانی $t = 1, 2, ...$ در معرض دنباله‌ای از شوک‌ها قرار دارد به طوری‌که احتمال وقوع شوک در هر یک از دوره‌ها عددی مانند p بوده و $k(\geq 1)$ نیز سطحی بحرانی است. اگر تعداد شوک‌های متوالی کمتر از k باشد، به سیستم هیچگونه آسیبی نمی‌رسد و اگر تعداد شوک‌های متوالی برابر با k باشد، سیستم با احتمال θ_1 و اگر تعداد شوک‌های متوالی برابر با $k+1$ باشد، با احتمال θ_2 خراب می‌شود $(\theta_1 < \theta_2)$ و همچنین به محض آن‌که تعداد شوک‌های متوالی به $k+2$ برسد، سیستم کاملاً از کار می‌افتد. طول عمر این سیستم را با W_{k,θ_1,θ_2} نشان داده، با توجه به روش بکار رفته در (۸)، رابطه

$$\begin{aligned}
E(W_{k,\theta_1,\theta_2}) &= E((X_1 I(Y_1=1)) + E((X_1+1)I(Y_1=0)I(Z_1=1))I(Y_2=1)) \\
&+ E((X_1+2)I(Y_1=0)I(Z_1=1)I(Y_2=0)I(Z_2=1)) \\
&+ E((X_1+2+W'_{k,\theta_1,\theta_2})I(Y_1=0)I(Z_1=1)I(Y_2=0)I(Z_2=0)) \\
&+ E((X_1+1+W''_{k,\theta_1,\theta_2})I(Y_1=0)I(Z_1=0))
\end{aligned}$$

برقرار است، که در آن، متغیرهای تصادفی W_{k,θ_1,θ_2}، W'_{k,θ_1,θ_2} و $W''_{k,\theta_1,\theta_2}$ همتوزیع هستند. بنابراین،

با انجام محاسبات، رابطه

$$\begin{aligned} E(W_{k,\theta_1,\theta_2}) &= \frac{E(X_1)+(1-\theta_1)+(1-\theta_1)p(1-\theta_2)}{\theta_1+(1-\theta_1)p\theta_2+(1-\theta_1)p(1-\theta_2)p} \\ &= \frac{1-p^k+qp^k(1-\theta_1)+q(1-\theta_1)p^{k+1}(1-\theta_2)}{qp^k(\theta_1+(1-\theta_1)p\theta_2+(1-\theta_1)p(1-\theta_2)p)} \end{aligned}$$

به عنوان تعمیمی از رابطه (۹) بدست می‌آید.

۴ محاسبه میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته

در این بخش با بکارگیری نتایج بدست آمده در بخش پیشین، روشی برای محاسبه میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته ارائه می‌شود. با توجه به سیستم تعریف شده در بخش ۲ یا فرع ۱، به ازای $\theta = 1$ یا $\theta = 0$ فعالیت سیستم به ترتیب تا مشاهده k یا $k+1$ شوک متوالی خواهد بود از این‌رو با توجه به (۶)، رابطه

$$\begin{aligned} &\lim_{\theta\to 1} E(W_{k,\theta}) = E(X_1) = E(W_k), \quad k=1,2,\ldots \\ &\lim_{\theta\to 0} E(W_{k,\theta}) = \frac{E(X_1)+1}{p} = \frac{E(W_k)+1}{p} = E(W_{k+1}), \quad k=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

بدست می‌آید. با توجه به (۱۰)، رابطه بین میانگین متغیرهای تصادفی هندسی تعمیم‌یافته مرتبه k و $k+1$ به صورت

$$E(W_{k+1}) = \frac{E(W_k)+1}{p} \tag{11}$$

است. بنابراین، با توجه به میانگین توزیع هندسی معمولی که $E(W_1) = \frac{1}{p}$ و بکارگیری رابطه بازگشتی (۱۱) و

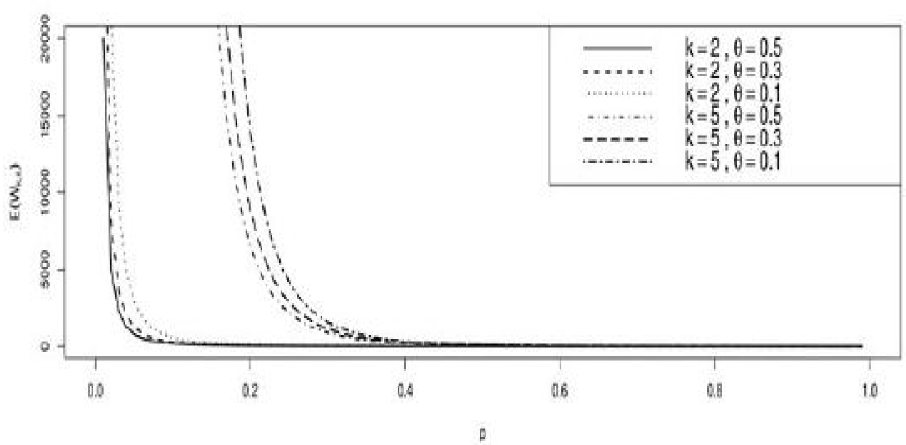
$$E(W_k) = \sum_{j=1}^{k} (\frac{1}{p})^j = \frac{1-p^k}{qp^k} \quad , \quad k=1,2,\ldots \tag{12}$$

ملاحظه می‌شود که رابطه (۱۲) با فرمول متناظر با آن‌که در (۲) آمده است، کاملاً همخوانی دارد. بنابراین، میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته را نیز می‌توان با استفاده از (۶) و در نتیجه رابطه بازگشتی (۱۱)، محاسبه نمود. باcorollary توجه به (۱۱)، می‌توان نوشت:

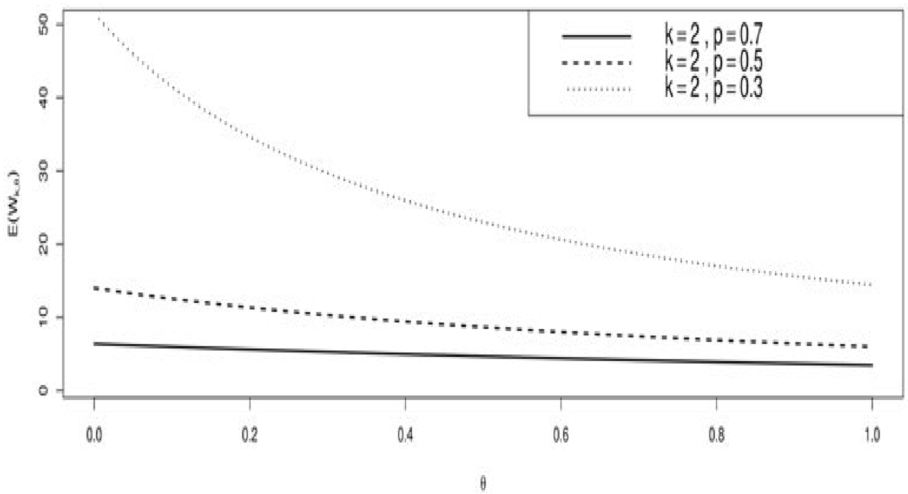
$$E(W_{k+r}) = \sum_{j=۱}^{r} (\frac{۱}{p})^{j} + \frac{E(W_k)}{p^r} = \sum_{j=۱}^{k} (\frac{۱}{p})^{j} + \frac{E(W_r)}{p^k} \qquad (۱۳)$$

با استفاده از (۱۲) و (۱۳)، روابط زیر برقرار هستند.

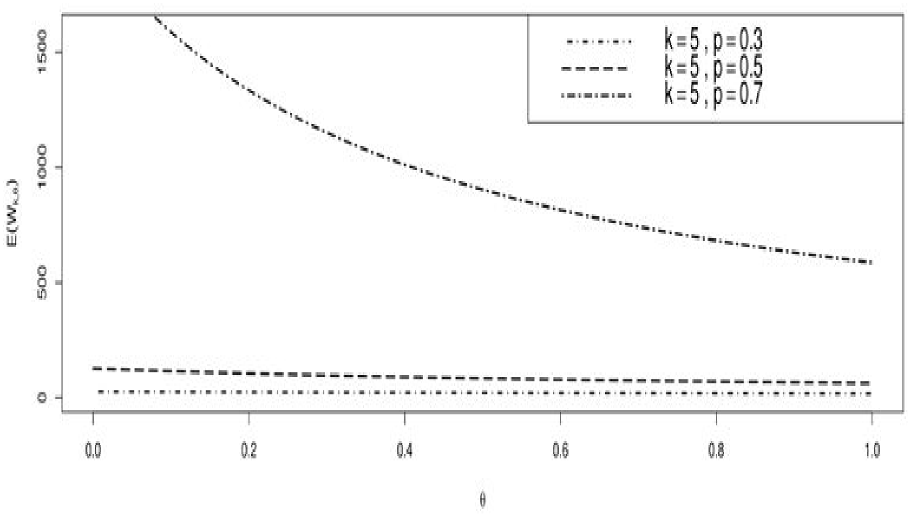
$$\begin{aligned} E(W_{k+r}) &= E(W_r) + \frac{E(W_k)}{p^r} \\ &= E(W_k) + \frac{E(W_r)}{p^k} \quad r, k = ۱, ۲, ... \\ E(W_k) &= \frac{p^r(۱-p^k)}{p^k(۱-p^r)} E(W_r), E(W_k - W_r) \\ &= E(\frac{W_k}{p^r} - \frac{W_r}{p^k}), \quad r, k = ۱, ۲, \ldots \end{aligned}$$



شکل ۱: عملکرد میانگین طول عمر سیستم به عنوان تابعی از p، هرگاه $k = ۲, ۵$ و $\theta = ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵$.



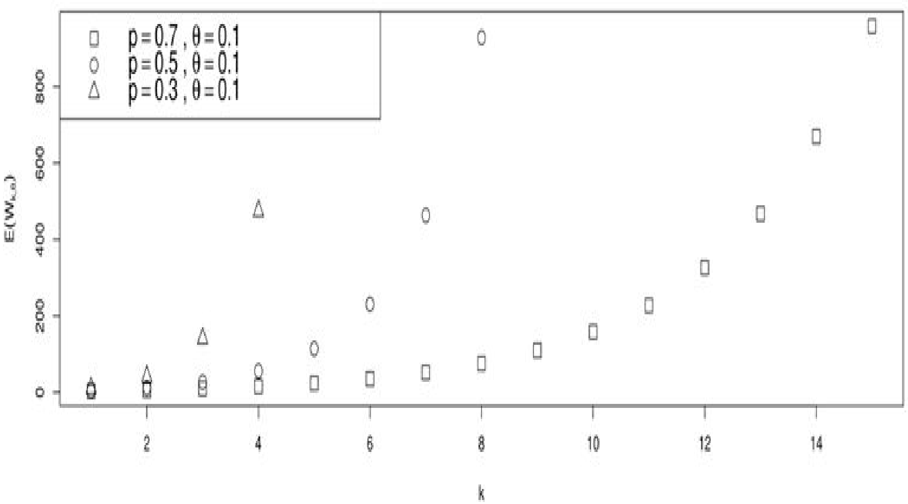
شکل ۲: عملکرد میانگین طول عمر سیستم به عنوان تابعی از θ ، هرگاه $k = ۲$ و $p = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$.



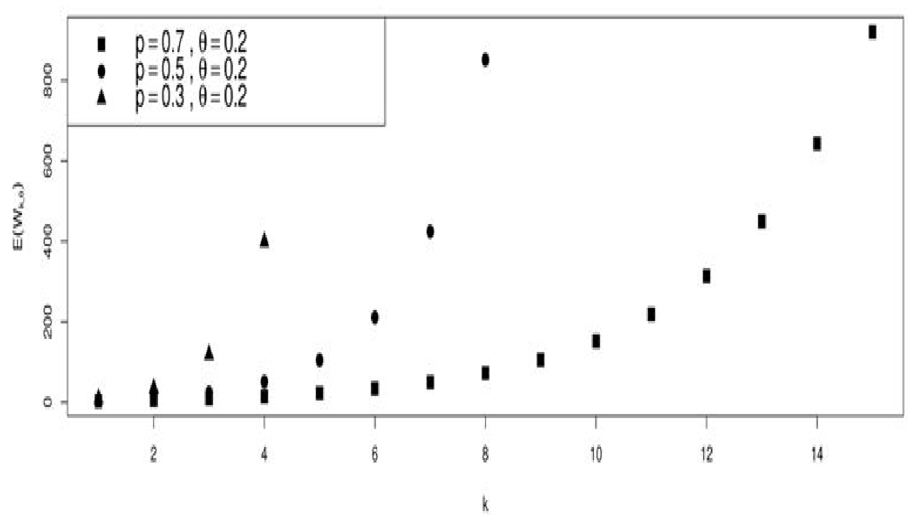
شکل ۳: عملکرد میانگین طول عمر سیستم به عنوان تابعی از θ، هرگاه $k = ۵$ و $p = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، مدلی از یک شوک گردشی، ویژگی‌های سیستم تحت آن و برآورد پارامترهای مجهول مربوطه بررسی شد. سیستم تحت مدل مزبور در مواجهه با k شوک متوالی، با احتمال θ از کار می‌افتد،

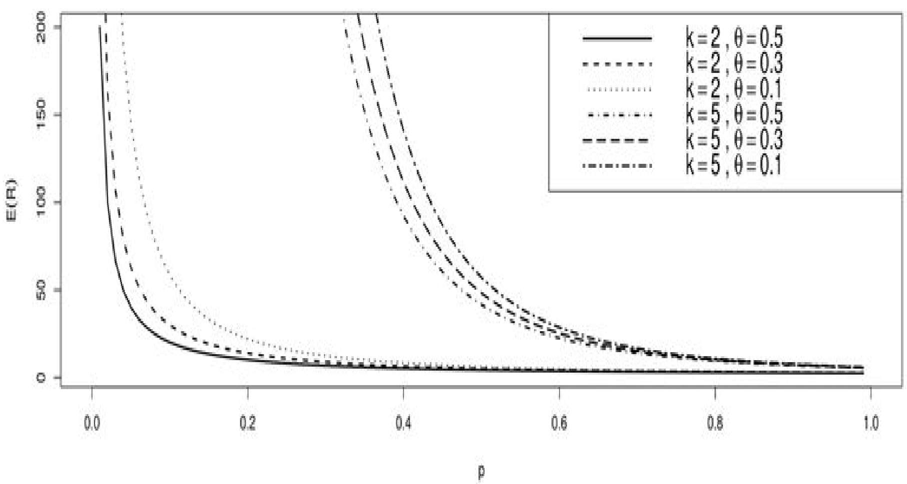


شکل ۴: عملکرد میانگین طول عمر سیستم به عنوان تابعی از k، هرگاه $\theta = ۰/۱$ و $p = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$.

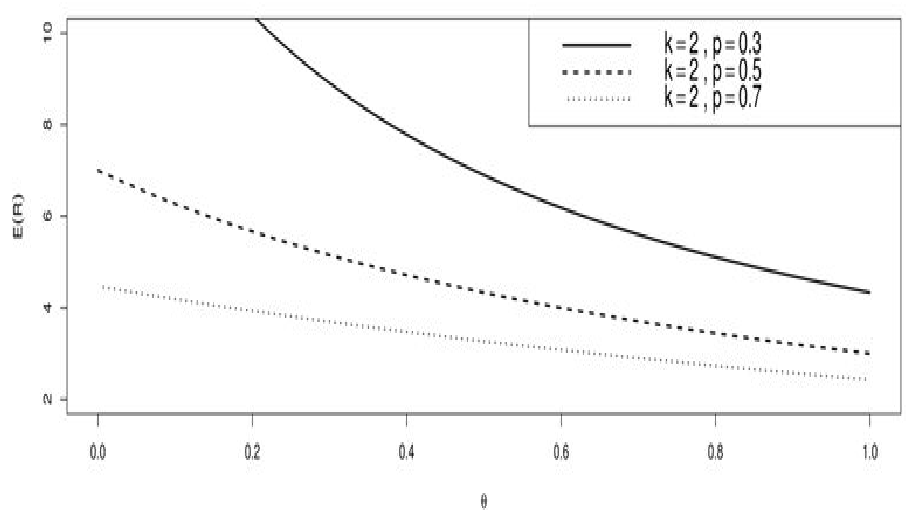


شکل ۵: عملکرد میانگین طول عمر سیستم به عنوان تابعی از k، هرگاه $\theta = ۰/۲$ و $p = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$.

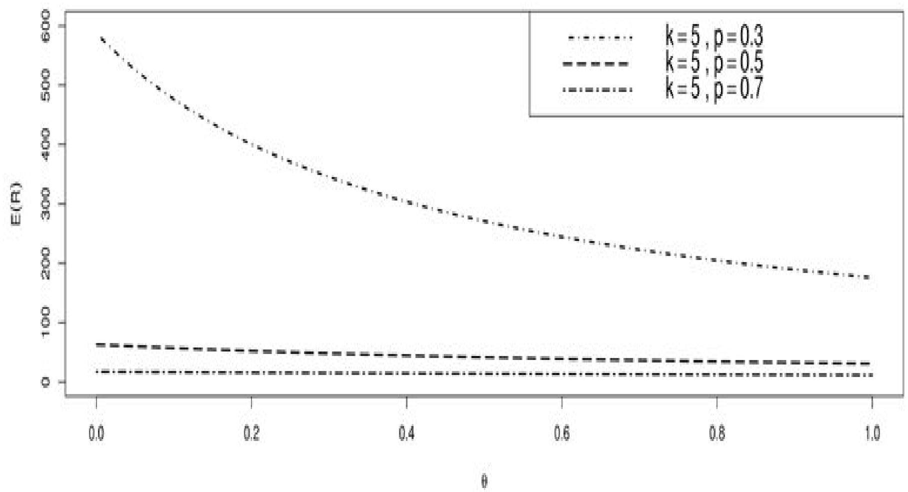
بنابراین دارای عملکردی غیرقطعی و غیرتعینی است. به ازای مقادیر خاص $(\theta = ۰, ۱)$، مدل جدید را می‌توان معادل با مدل شوک گردشی معمولی در حالت گسسته دانست و مدل جدید می‌تواند تعمیمی از



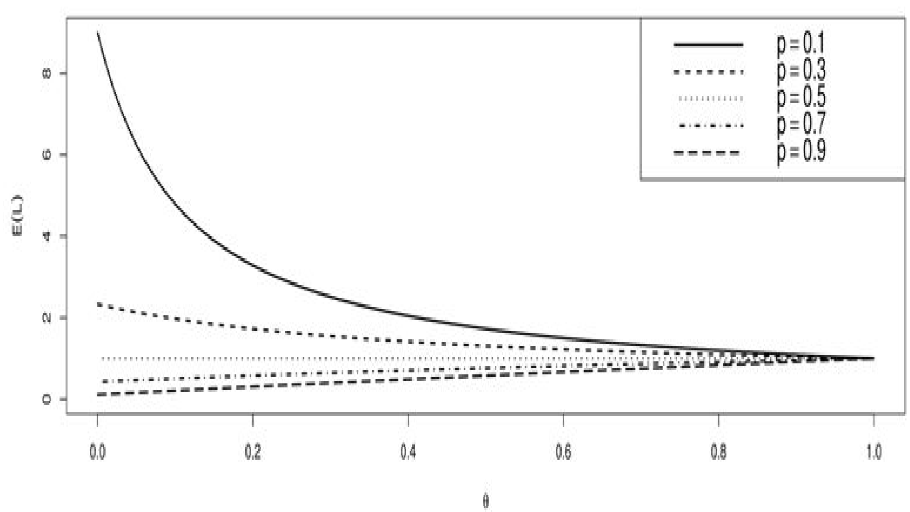
شکل ۶: عملکرد میانگین تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی، به عنوان تابعی از p، هرگاه $k = ۲, ۵$ و $\theta = ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵$.



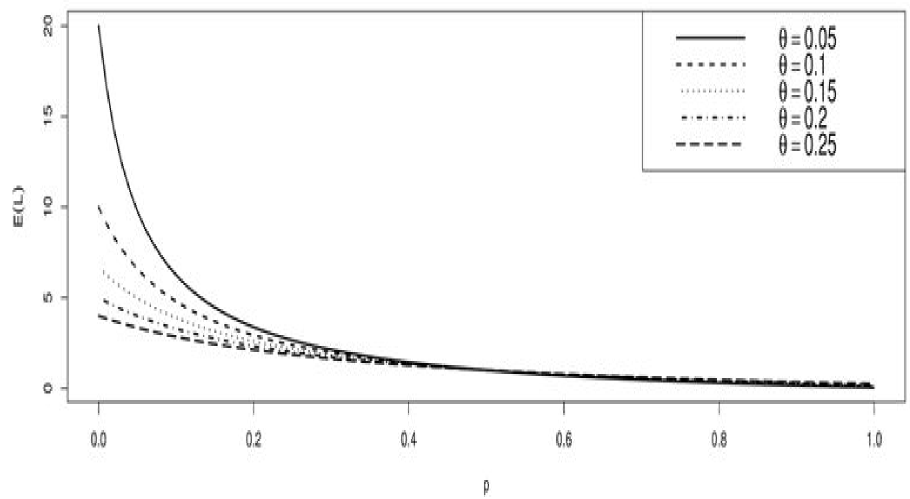
شکل ۷: عملکرد میانگین تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی، به عنوان تابعی از θ، هرگاه $k = ۲$ و $p = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$.



شکل ۸: عملکرد میانگین تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی به عنوان تابعی از θ، هرگاه $k = ۵$ و $p = ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷$.



شکل ۹: عملکرد میانگین تعداد دفعاتی که سیستم تا زمان خرابی با k شوک متوالی مواجه می‌شود، به عنوان تابعی از θ، هرگاه $p = ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹$.



شکل ۱۰: عملکرد میانگین تعداد دفعاتی که سیستم تا زمان خرابی با k شوک متوالی مواجه می‌شود، به عنوان تابعی از p، هرگاه $\theta = ۰/۰۵, ۰/۱, ۰/۱۵, ۰/۲, ۰/۲۵$.

مدل‌های پیشین محسوب شود. همچنین روشی برای محاسبه میانگین توزیع هندسی تعمیم‌یافته مرتبه k ارائه شد که با استفاده از آن می‌توان رابطه بین میانگین‌های دو توزیع هندسی تعمیم‌یافته با مراتب مختلف را، محاسبه نمود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر، ویراستار و داوران محترم مجله برای ارزیابی و ویرایش مقاله، کمال تشکر و سپاس را دارند.

مراجع

Balakrishnan, N. and Koutras, M. V. (2002), *Runs and Scans with Applications.* Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, New York.

Eryılmaz, S. (2012), Generalized δ-shock Model via Runs, *Statistics and Probability Letters, **82**,* 326-331.

Eryilmaz, S. (2013), On the Lifetime Behavior of a Discrete Time Shock Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **237**, 384–388

Eryilmaz, S. (2015), Discrete Time Shock Models Involving Runs. *Statistics and Probability Letters*, **107**, 93–100.

Eryilmaz, S. and Bayromoglu, K. (2014), Life Behavior of δ-shock Models for Uniformly Distributed Interarrival Times, *Statistical Papers*, **55**, 841-852.

Eryilmaz, S. and Demir, S. (2007), Success Runs in a Sequence of Exchangeable Binary Trials. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2954–2963.

Gut, A. (1990), Cumulative Shock Models. *Advances in Applied Probability*, **22**, 504-507.

Li, Z. and Kong, X. (2007), Life Behavior of δ-shock Model. *Statistics and Probability Letters*, **77**, 577–587.

Li, Z. and Zhao, P. (2007), Reliability Analysis on the δ-shock Model of Complex Systems. *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 340–348.

Lorvand, H., Nematollahi, A. and Poursaeed, M. H. (2019), Life Distribution Properties of a New δ-shock Model, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2019.1584316.

Mallor, F. and Omey, E. (2001), Shocks, Runs and Random Sums. *Journal of Applied Probability*, **38**, 438–448.

Parvardeh, A. and Balakrishnan, N. (2015), On Mixed δ-shock Models, *Statistics and Probability Letters*,**102**, 51-60.

Philippou, A. N., Georghiou, C. and Philippou, G. N. (1983), A Generalized Geometric Distribution and Some of its Properties. *Statistics and Probability Letters*, **1**, 171–175.

Poursaeed, M. H. (2019), On δ-shock Model in a Multi-state System. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2019.1565784.

Sumita, U. and Shanthikumar, J. G. (1985), A Class of Correlated Cumulative Shock Models. *Advances in Applied Probability*, **17**, 347–366.