

## برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی در توزیع لوماکس

اکرم کهن‌سال<sup>۱</sup>، نفیسه آل محمد<sup>۲</sup>، فاطمه عزیززاده<sup>۳</sup>

گروه آمار، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)  
گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد  
گروه ریاضیات مالی، دانشگاه خوارزمی

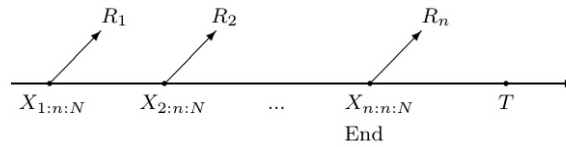
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۰۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۰۳

**چکیده:** برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت، در توزیع لوماکس، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی در سه حالت بررسی می‌شود. اول، با فرض اینکه تنش و مقاومت دو متغیر تصادفی با پارامترهای مقیاس مشترک و شکل متفاوت هستند، برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت با دو روش لیندلی و الگوریتم گیبز تقریب زده می‌شود. دوم، با فرض اینکه پارامتر مقیاس مشترک معلوم است، برآورد بیزی دقیق پارامتر تنش-مقاومت به دست آمده است. سوم، با فرض اینکه همه پارامترها متفاوت و نامعلوم هستند، برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت با الگوریتم گیبز به دست می‌آید. همچنین، برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی محاسبه و سودمندی برآوردگرهای بیز در مقایسه با آن‌ها، تأیید شده‌اند. در نهایت، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، روش‌های مختلف ارزیابی شده و یک مجموعه داده واقعی تحلیل می‌شود.

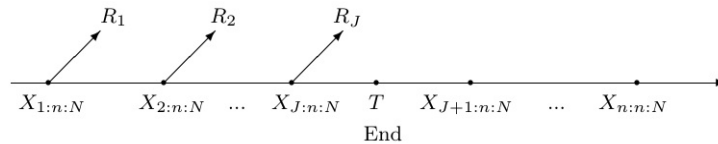
**واژه‌های کلیدی:** پارامتر تنش-مقاومت، تقریب لیندلی، توزیع لوماکس، سانسور فزاینده پیوندی

## ۱ مقدمه

یکی از مسائل در قابلیت اعتماد، استنباط آماری برای پارامتر تنش-مقاومت،  $R = P(X < Y)$  است، که در آن متغیرهای  $X$  و  $Y$  به ترتیب تنش و مقاومت را نشان می‌دهند. در یک سیستم اگر میزان تنش وارد شده از مقاومت بیشتر باشد، سیستم از کار می‌افتد. تاریخچه مناسبی از برآورد پارامتر  $R$  در محمود و همکاران (۲۰۱۶) بیان شده است. همچنین، برآوردهای E-بیزی و بیز سلسه مراتبی آن توسط شادرخ و یعقوب‌زاده (۱۳۹۸) بررسی شده‌اند. طرح‌های نوع I و II از اساسی‌ترین طرح‌های سانسور هستند. در طرح سانسور نوع I آزمایش طول عمر تا رسیدن به یک زمان از پیش تعیین شده  $T$  ادامه می‌یابد و در طرح سانسور نوع II آزمایش طول عمر تا رسیدن به یک تعداد از پیش تعیین شده شکست‌ها ادامه یافته و بعد از آن آزمایش متوقف می‌شود. از ترکیب این دو نوع طرح، طرح سانسور پیوندی به دست می‌آید، به طوری که آزمایش طول عمر در زمان  $T^* = \min\{X_{n:n}, T\}$  به پایان می‌رسد، که در آن  $X_{n:n}$ ،  $n$ امین زمان شکست در بین  $N$  واحد تحت آزمایش است و  $T$  یک زمان از پیش تعیین شده است. اگر آزمایش‌گر تصمیم داشته باشد که واحدهای آزمایشی سالم را در نقاطی غیر از نقاط پایانی آزمایش از ادامه بررسی کنار بگذارد، نمی‌تواند از هیچ‌یک از طرح‌های سانسور فوق استفاده کند. این دلیل، کسانی که در این زمینه کار می‌کنند را به سمت سانسور فزاینده متمایل می‌کند. فرض کنید  $N$  واحد تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته‌اند. بلافاصله بعد از اولین شکست،  $R_1$  واحد تحت بررسی از آزمایش خارج می‌شوند، بعد از دومین شکست،  $R_2$  واحد تحت بررسی از آزمایش خارج می‌شوند و به همین ترتیب، در زمان شکست  $m$ ام، همه  $R_n = N - n - R_1 - \dots - R_{n-1}$  واحد تحت بررسی، به‌طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند. در این حالت طرح سانسور با  $(R_1, \dots, R_n)$  و مقادیر مرتب شده این طرح با  $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$  نشان داده می‌شوند. طرح سانسور فزاینده پیوندی (HPC) از ترکیب طرح سانسور پیوندی و سانسور فزاینده حاصل می‌گردد که توسط کاندو و جودر (۲۰۰۶) معرفی شده است و به‌صورت زیر توصیف می‌شود. فرض کنید تعداد کل واحدهای تحت آزمایش برابر  $N$ ، طرح سانسور مورد نظر به‌صورت  $(R_1, \dots, R_n)$  و  $T^* = \min\{X_{n:n:N}, T\}$  باشد، بطوریکه  $X_{1:n:N} < \dots < X_{n:n:N}$  یک نمونه از طرح سانسور فزاینده و  $T$  یک مقدار ثابت است. اگر  $X_{n:n:N} < T$ ، آزمایش در زمان  $X_{n:n:N}$  به اتمام می‌رسد و نمونه در دسترس به‌صورت  $X_{1:n:N} < \dots < X_{n:n:N}$  است (شکل ۱). در غیر این‌صورت، اگر  $X_{J:n:N} < T < X_{J+1:n:N}$  باشد آزمایش در زمان  $T$  تمام می‌شود و نمونه در دسترس به‌صورت  $X_{1:n:N} < \dots < X_{J:n:N}$  خواهد بود (شکل ۲).



شکل ۱. آزمایش قبل از زمان  $T$  تمام می‌شود ( $X_{n:n:N} \leq T$ ).



شکل ۲. آزمایش در زمان  $T$  تمام می‌شود ( $X_{J:n:N} \leq T \leq X_{J+1:n:N}$ ).

قضیه ۱. (بالاکریشن و آگاروالا، ۲۰۰۰) فرض کنید  $U_{i:n:N}$ ،  $i = 1, \dots, n$  نمونه‌ای از سانسور فزاینده از توزیع یکنواخت  $U(0, 1)$  باشد که از نمونه‌ای به حجم  $n$  و با طرح سانسور  $(R_1, \dots, R_n)$  حاصل شده است. در این صورت متغیرهای تصادفی

$$V_1 = \frac{1 - U_{n:n:N}}{1 - U_{n-1:n:N}}, \quad V_2 = \frac{1 - U_{n-1:n:N}}{1 - U_{n-2:n:N}}, \dots, \quad V_n = 1 - U_{1:n:N}$$

مستقل و هم‌توزیع با توزیع  $Beta(i + \sum_{j=n-i+1}^n R_j, 1)$  که  $V_i$   $i = 1, \dots, n$  هستند.

الگوریتم ۱. تولید آماره‌های ترتیبی سانسور فزاینده:

گام ۱- مقدار تصادفی مستقل  $W_1, \dots, W_n$  از توزیع  $U(0, 1)$  تولید شوند.

گام ۲- به ازای  $i = 1, \dots, n$  مقادیر  $V_i = W_i \frac{1}{i + \sum_{j=n-i+1}^n R_j}$  محاسبه شوند.

گام ۳- به ازای  $i = 1, \dots, n$  مقادیر  $U_{i:n:N} = 1 - V_n V_{n-1} \dots V_{n-i+1}$  محاسبه شوند که یک نمونه سانسور فزاینده از توزیع یکنواخت استاندارد هستند.

گام ۴- به ازای  $i = 1, \dots, n$  قرار داده شود  $X_{i:n:N} = F^{-1}(U_{i:n:N})$ ، که آماره‌های ترتیبی سانسور فزاینده از توزیع دلخواه  $F(\cdot)$  هستند.

فرع ۱. روش تولید داده‌های سانسور فزاینده پیوندی به این صورت است که ابتدا برای  $n$ ،  $N$  و  $T$  و طرح

سانسور  $(R_1, \dots, R_n)$  با استفاده از الگوریتم بالا یک نمونه سانسور فزاینده  $X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}$  تولید می‌شود. اگر  $X_{n:n:N} < T$  پس نمونه مورد نظر عبارت است از  $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{n:n:N}\}$  و در غیر این صورت  $J$  ای در نظر گرفته می‌شود که  $X_{J+1:n:N} < T < X_{J:n:N}$  بنابراین در این حالت نمونه  $\{X_{1:n:N}, \dots, X_{J:n:N}\}$  مشاهده می‌شود. در ادامه، به‌طور نمادین، نمونه سانسور فزاینده پیوندی با  $\{X_1, \dots, X_J\}$  تحت طرح سانسور  $\{N, n, T, J, R_1, \dots, R_J\}$  نشان داده می‌شود.

بنابر بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰)، تابع درست‌نمایی نمونه‌های HPC به‌صورت

$$L(\theta, \beta) \propto \prod_{i=1}^J f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i} [1 - F(T)]^{R_J^*},$$

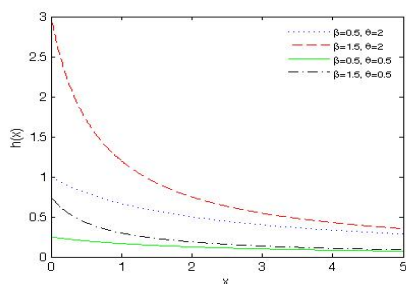
است، که در آن  $R_J^* = N - J - \sum_{i=1}^J R_i$  است. علی‌رغم اینکه مقالات بسیاری مدل‌های تنش-مقاومت را در داده‌های کامل مطالعه کرده‌اند، اما در نمونه‌های سانسور شده، توجه زیادی به برآورد این پارامتر نشده است. اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) آن را در توزیع وایبول تحت سانسور فزاینده و شعاعی و خرم (۲۰۱۵) آن را در توزیع وانی-شکل بررسی کردند، همچنین شعاعی و خرم (۲۰۱۶) برآورد این پارامتر را در توزیع وایبول تحت سانسور فزاینده پیوندی و کهن‌سال (۲۰۱۹) در توزیع کوماراسوامی مطالعه کردند. احمدی و غفوری (۲۰۱۹) به بررسی مدل تنش-مقاومت چند مولفه‌ای در توزیع نیمه-نرمال تعمیم‌یافته، ماوریا و تریپاتی (۲۰۱۹)، کهن‌سال و رضاخواه (۲۰۱۹) در توزیع رایلی دو پارامتری و ژا و همکاران (۲۰۲۰) در توزیع گومپرتز تحت سانسور فزاینده بررسی کردند. کهن‌سال (۲۰۲۰) پارامتر قابلیت اطمینان را در توزیع بور نوع ۷، تحت سانسور فزاینده پیوندی مطالعه کرد.

متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع لوماکس با پارامترهای مقیاس و شکل  $\beta$  و  $\theta$  است هرگاه دارای تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و تابع نرخ شکست به‌ترتیب به‌صورت

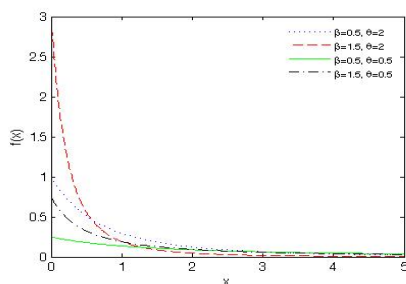
$$\begin{aligned} f(x) &= \beta\theta(1 + \beta x)^{-\theta-1}, x > 0, \\ F(x) &= 1 - (1 + \beta x)^{-\theta}, x > 0, \\ h(x) &= \beta\theta(1 + \beta x)^{-1}, x > 0. \end{aligned}$$

باشد، که با نماد  $X \sim Lo(\theta, \beta)$  نشان داده می‌شود. توابع چگالی و نرخ شکست این توزیع در شکل ۱ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، تابع نرخ شکست توزیع لوماکس نزولی است،

بنابراین اگر در یک مجموعه داده، با بررسی‌های تجربی، نتیجه گرفته شود که تابع نرخ شکست نزولی است، در این صورت توزیع لوماکس، می‌تواند گزینه مناسبی برای تحلیل داده‌ها باشد. علاوه بر این، تابع چگالی احتمال این توزیع، یک تابع چوله دم سنگین است و لذا نقش مهمی در مدل‌بندی داده‌های طول عمر دارد. همچنین، توزیع لوماکس، برای تحلیل داده‌های دم سنگین، نسبت به توزیع نمایی جایگزین مناسبی است.



(ب)



(الف)

شکل ۳. الف- نمودار تابع چگالی احتمال توزیع لوماکس، ب- نمودار تابع نرخ شکست توزیع لوماکس

هدف این مقاله برآورد پارامتر تنش-مقاومت تحت سانسور فزاینده پیوندی در توزیع لوماکس است. از آنجا که سانسور فزاینده پیوندی، در حالت‌هایی خاص تبدیل به سانسور فزاینده، سانسور نوع II و نیز داده کامل می‌شود، لذا مسئله فوق، یک مسئله کلی است و با بررسی این حالت، سه حالت دیگر نیز به‌طور خودکار بررسی خواهند شد. توزیع لوماکس به دلیل شکل خاص خود، برای تحلیل داده‌های طول عمر، جایگزین مناسبی نسبت به توزیع نمایی و بسیاری از توزیع‌های مهم در نظریه قابلیت اعتماد است.

در این مطالعه، مسئله در سه حالت مختلف بررسی می‌شود. در هر سه حالت فرض می‌شود که هر دو متغیر تصادفی دارای پارامترهای شکل متفاوت و نامعلوم هستند. علاوه بر این، در حالت اول با فرض مشترک و نامعلوم بودن پارامتر مقیاس مسئله بررسی می‌شود. همچنین در حالت دوم با فرض مشترک و معلوم بودن پارامتر مقیاس و در حالت سوم با فرض متفاوت و نامعلوم بودن پارامتر مقیاس هر دو متغیر تصادفی مسئله مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در هر سه حالت فوق، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی محاسبه شده تا بتوان سودمندی برآوردهای بیزی را از مقایسه آن‌ها و برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، نشان داد. در ادامه، مقاله به‌صورت زیر سازماندهی می‌گردد: در بخش ۲ برآورد بیز و برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر  $R$  با فرض پارامتر مقیاس مشترک و نامعلوم متغیرهای تنش و مقاومت محاسبه می‌شود. برآورد بیز و برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامتر  $R$  با فرض پارامتر مقیاس معلوم و مشترک متغیرهای تنش و

مقاومت در بخش ۳ حاصل می‌گردد. در بخش ۴ برآورد بیز و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر  $R$  تحت متفاوت و نامعلوم بودن کلیه پارامترهای متغیرهای تنش و مقاومت بررسی می‌شود. در بخش ۵ یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه روش‌های پیشنهادی و نیز تحلیل یک مجموعه داده واقعی در بخش ۶ انجام شده و در نهایت جمع‌بندی از این مقاله ارائه می‌گردد.

## ۲ استنباط پارامتر $R$ با پارامتر مشترک و نامعلوم $\beta$

اگر  $X \sim Lo(\theta, \beta)$  و  $Y \sim Lo(\alpha, \beta)$ ، آنگاه پارامتر تنش-مقاومت به صورت  $R = \frac{\theta}{\alpha + \theta}$  است. بنابراین، اگر  $\{X_1, \dots, X_{J_1}\}$  و  $\{Y_1, \dots, Y_{J_2}\}$  دو نمونه تصادفی HPC با طرح‌های به‌ترتیب  $\{N, n, T_1, J_1, R_1, \dots, R_{J_1}\}$  و  $\{M, m, T_2, J_2, S_1, \dots, S_{J_2}\}$  باشند، تابع درستنمایی به صورت

$$L(\theta, \alpha, \beta) \propto \left( \prod_{i=1}^{J_1} f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i} [1 - F(T_1)]^{R_{J_1}^*} \right) \times \left( \prod_{j=1}^{J_2} f(y_j) [1 - F(y_j)]^{S_j} [1 - F(T_2)]^{S_{J_2}^*} \right).$$

نوشته می‌شود. بنابراین تابع درستنمایی بر مبنای داده‌های مشاهده شده به صورت

$$\begin{aligned} L(\text{data}|\theta, \alpha, \beta) &\propto \theta^{J_1} \beta^{J_1} \left( \prod_{i=1}^{J_1} (1 + \beta x_i)^{-\theta(R_i+1)-1} \right) (1 + \beta T_1)^{-\theta R_{J_1}^*} \\ &\times \alpha^{J_2} \beta^{J_2} \left( \prod_{j=1}^{J_2} (1 + \beta y_j)^{-\theta(S_j+1)-1} \right) (1 + \beta T_2)^{-\theta S_{J_2}^*} \\ &\propto \left( \prod_{i=1}^{J_1} (1 + \beta x_i)^{-1} \right) e^{-\theta \left( \sum_{i=1}^{J_1} (R_i+1) \log(1 + \beta x_i) + R_{J_1}^* \log(1 + \beta T_1) \right)} \\ &\times \left( \prod_{j=1}^{J_2} (1 + \beta y_j)^{-1} \right) e^{-\theta \left( \sum_{j=1}^{J_2} (S_j+1) \log(1 + \beta y_j) + S_{J_2}^* \log(1 + \beta T_2) \right)} \\ &\times \theta^{J_1} \alpha^{J_2} \beta^{J_1+J_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

است. لذا برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$  و  $\alpha$  به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(\beta) &= J_1 \left\{ \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \log(1 + \beta x_i) + R_{J_1}^* \log(1 + \beta T_1) \right\}^{-1}, \\ \hat{\alpha}(\beta) &= J_2 \left\{ \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \log(1 + \beta y_j) + S_{J_2}^* \log(1 + \beta T_2) \right\}^{-1},\end{aligned}$$

هستند. همچنین  $\hat{\beta}$  از حل معادله غیر خطی

$$\begin{aligned}\frac{J_1 + J_2}{\beta} - \sum_{i=1}^{J_1} (\theta(R_i + 1) + 1) \frac{x_i}{1 + \beta x_i} - \theta R_{J_1}^* \frac{T_1}{1 + \beta T_1} \\ - \sum_{j=1}^{J_2} (\alpha(S_j + 1) + 1) \frac{y_j}{1 + \beta y_j} - \alpha S_{J_2}^* \frac{T_2}{1 + \beta T_2} = 0.\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. پس از محاسبه برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$ ،  $\alpha$  و  $\beta$ ، با استفاده از خاصیت پایایی، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی  $R$  برابر

$$\hat{R} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\alpha} + \hat{\theta}}. \quad (2)$$

است. اکنون استنباط بیزی پارامتر  $R$  تحت تابع زیان توان‌های دوم خطا، برای توابع چگالی پیشین

$$\begin{aligned}\pi_1(\theta) &\propto \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta}, & \theta > 0, & a_1, b_1 > 0, \\ \pi_2(\alpha) &\propto \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}, & \alpha > 0, & a_2, b_2 > 0, \\ \pi_3(\beta) &\propto \beta^{a_3-1} e^{-b_3\beta}, & \beta > 0, & a_3, b_3 > 0.\end{aligned}$$

بررسی می‌گردد. بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع چگالی پسین توام به صورت

$$\pi(\theta, \alpha, \beta | \text{data}) \propto L(\text{data} | \theta, \alpha, \beta) \pi_1(\theta) \pi_2(\alpha) \pi_3(\beta), \quad (3)$$

است، که در آن  $L(\text{data}|\theta, \alpha, \beta)$  در (۱) آمده است. با توجه به (۳) در این حالت برآورد بیز به فرم بسته‌ای قابل نمایش نیست. بنابراین مقدار آن به دو روش لیندلی و MCMC، تقریب زده می‌شود.

تقریب لیندلی (لیندلی، ۱۹۸۰): با فرض این‌که  $U(\gamma)$  تابعی از پارامتر  $\gamma$  باشد، برآورد بیز  $U(\gamma)$ ، تحت تابع زیان مربع خطا، به صورت

$$E(u(\gamma)|\text{data}) = \frac{\int u(\gamma)e^{\ell(\gamma)\rho(\gamma)}d\gamma}{\int e^{\ell(\gamma)\rho(\gamma)}d\gamma}$$

است، که در آن  $\ell(\gamma)$  لگاریتم تابع درست‌نمایی و  $\rho(\gamma)$  لگاریتم تابع چگالی پیشین  $\gamma$  است. بنابراین تقریب لیندلی به صورت

$$E(u(\gamma)|\text{data}) = u + \frac{1}{\gamma} \sum_i \sum_j (u_{ij} + \gamma u_i \rho_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{\gamma} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_p \ell_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kp} u_p |_{\gamma=\hat{\gamma}}, \quad (4)$$

است، که در آن  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m)$  برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ،  $i, j, k, p = 1, \dots, m$ ،  $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}$ ،  $u_i = \frac{\partial u}{\partial \gamma_i}$ ،  $u = u(\gamma)$ ،  $\rho_j = \frac{\partial \rho}{\partial \gamma_j}$ ،  $\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j \partial \gamma_k}$ ، همچنین،  $\sigma_{ij}$ ،  $(i, j)$  امین درایه ماتریس معکوس  $[-\ell_{ij}]$  است. در حالت سه پارامتری  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ، جمع‌ها، در رابطه (۴) به صورت ساده‌تر

$$E(u(\gamma)|\text{data}) = u + u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_3 d_3 + d_4 + d_5 + \frac{1}{\gamma} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12} + u_3 \sigma_{13}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22} + u_3 \sigma_{23}) + C(u_1 \sigma_{31} + u_2 \sigma_{32} + u_3 \sigma_{33})], \quad (5)$$

نتیجه می‌شوند. در حالت سه پارامتری باید (۵) را بوسیله برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3)$  به دست آورد، که در آن،

$$d_i = \rho_1 \sigma_{i1} + \rho_2 \sigma_{i2} + \rho_3 \sigma_{i3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$d_4 = u_{12} \sigma_{12} + u_{13} \sigma_{13} + u_{23} \sigma_{23},$$



$$\begin{aligned}
 d_{\delta} &= \frac{1}{\gamma} (u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33}), \\
 A &= l_{111}\sigma_{11} + 2l_{121}\sigma_{12} + 2l_{131}\sigma_{13} + 2l_{231}\sigma_{23} + l_{221}\sigma_{22} + l_{331}\sigma_{33}, \\
 B &= l_{112}\sigma_{11} + 2l_{122}\sigma_{12} + 2l_{132}\sigma_{13} + 2l_{232}\sigma_{23} + l_{222}\sigma_{22} + l_{332}\sigma_{33}, \\
 C &= l_{113}\sigma_{11} + 2l_{123}\sigma_{12} + 2l_{133}\sigma_{13} + 2l_{233}\sigma_{23} + l_{223}\sigma_{22} + l_{333}\sigma_{33}.
 \end{aligned}$$

حال با قرار دادن  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\theta, \alpha, \beta)$  و  $u = R = \frac{\theta}{\alpha + \theta}$  می‌توان روابط

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{a_1 - 1}{\theta} - b_1, \quad \rho_2 = \frac{a_2 - 1}{\alpha} - b_2, \quad \rho_3 = \frac{a_3 - 1}{\beta} - b_3, \\
 l_{11} &= -\frac{J_1}{\theta^2}, \quad l_{22} = -\frac{J_2}{\alpha^2}, \quad l_{12} = l_{21} = 0, \\
 l_{13} &= -\sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \frac{x_i}{1 + \beta x_i} - R_{J_1}^* \frac{T_1}{1 + \beta T_1}, \\
 l_{23} &= -\sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \frac{y_j}{1 + \beta y_j} - R_{J_2}^* \frac{T_2}{1 + \beta T_2}, \\
 l_{33} &= -\frac{J_1 + J_2}{\beta^2} + \theta \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \left(\frac{x_i}{1 + \beta x_i}\right)^2 + \theta R_{J_1}^* \left(\frac{T_1}{1 + \beta T_1}\right)^2 \\
 &\quad + \alpha \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \left(\frac{y_j}{1 + \beta y_j}\right)^2 + \alpha R_{J_2}^* \left(\frac{T_2}{1 + \beta T_2}\right)^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{J_1} \left(\frac{x_i}{1 + \beta x_i}\right)^2 + \sum_{j=1}^{J_2} \left(\frac{y_j}{1 + \beta y_j}\right)^2,
 \end{aligned}$$

را به دست آورد، که در آن  $\sigma_{ij}$  بوسیله  $l_{ij}$  به دست می‌آید. همچنین

$$\begin{aligned} l_{111} &= \frac{2J_1}{\theta^3}, & l_{222} &= \frac{2J_2}{\alpha^3}, \\ l_{122} &= \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \left( \frac{x_i}{1 + \beta x_i} \right)^2 + R_{J_1}^* \left( \frac{T_1}{1 + \beta T_1} \right)^2, \\ l_{211} &= \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \left( \frac{y_j}{1 + \beta y_j} \right)^2 + R_{J_2}^* \left( \frac{T_2}{1 + \beta T_2} \right)^2, \\ l_{222} &= \frac{2(J_1 + J_2)}{\beta^3} - 2\theta \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \left( \frac{x_i}{1 + \beta x_i} \right)^3 - 2\theta R_{J_1}^* \left( \frac{T_1}{1 + \beta T_1} \right)^3 \\ &- 2\alpha \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \left( \frac{y_j}{1 + \beta y_j} \right)^3 - 2\alpha R_{J_2}^* \left( \frac{T_2}{1 + \beta T_2} \right)^3 \\ &- 2 \sum_{i=1}^{J_1} \left( \frac{x_i}{1 + \beta x_i} \right)^3 - 2 \sum_{j=1}^{J_2} \left( \frac{y_j}{1 + \beta y_j} \right)^3, \end{aligned}$$

و نیز سایر  $l_{ijk} = 0$  هستند، بنابراین

$$\begin{aligned} d_i &= \rho_1 \sigma_{i1} + \rho_2 \sigma_{i2} + \rho_3 \sigma_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ d_4 &= u_{12} \sigma_{12}, \quad d_5 = \frac{1}{2} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22}), \\ A &= l_{111} \sigma_{11} + l_{222} \sigma_{22}, \quad B = l_{222} \sigma_{22} + l_{111} \sigma_{11}, \\ C &= 2l_{122} \sigma_{12} + 2l_{211} \sigma_{21} + l_{222} \sigma_{22}, \\ u_1 &= \frac{\alpha}{(\alpha + \theta)^2}, \quad u_2 = \frac{-\theta}{(\alpha + \theta)^2}, \quad u_3 = 0, \\ u_{11} &= \frac{-2\alpha}{(\alpha + \theta)^3}, \quad u_{22} = \frac{2\theta}{(\alpha + \theta)^3}, \quad u_{12} = \frac{\theta - \alpha}{(\alpha + \theta)^3}, \\ u_{i3} &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

در نتیجه، تحت تابع زیان توان‌های دوم خطا، برآورد بیز  $R$  ببه صورت

$$\begin{aligned} \widehat{R}^{Lin} = & u + u_1 d_1 + u_2 d_2 + d_4 + d_5 + \frac{1}{\psi} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12}) \\ & + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22}) + C(u_1 \sigma_{31} + u_2 \sigma_{32})]. \end{aligned} \quad (۶)$$

است. توجه شود که همه پارامترها در مقادیر برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $(\widehat{\theta}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$  محاسبه می‌شوند.

### ۲.۱ الگوریتم گیبز

با استفاده از (۳)، توابع چگالی احتمال پسین  $\theta$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت

$$\begin{aligned} \theta | \beta, \text{data} & \sim \Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\beta)), \\ \alpha | \beta, \text{data} & \sim \Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\beta)), \\ \pi(\beta | \theta, \alpha, \text{data}) & \propto \beta^{J_1 + J_2 + a_2 - 1} e^{-\theta V(\beta) - \alpha U(\beta) - b_2 \beta} \left( \prod_{i=1}^{J_1} \frac{1}{1 + \beta x_i} \right) \left( \prod_{j=1}^{J_2} \frac{1}{1 + \beta y_j} \right), \end{aligned}$$

به دست می‌آید، که در آن

$$V(\beta) = \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \log(1 + \beta x_i) + R_{J_1}^* \log(1 + \beta T_1), \quad (۷)$$

$$U(\beta) = \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \log(1 + \beta y_j) + S_{J_2}^* \log(1 + \beta T_2). \quad (۸)$$

ملاحظه می‌شود که تولید نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال پسین  $\pi(\beta | \theta, \alpha, \text{data})$  باید به روش متروپولیس-هستینگز انجام شود.

الگوریتم ۲. برآورد گیبز  $R$ :

گام ۱- با مقادیر اولیه  $(\theta_{(0)}, \alpha_{(0)}, \beta_{(0)})$  شروع شود.

گام ۲- قرار داده شود  $t = 1$ .

گام ۳- با روش متروپولیس-هستینگز  $\beta_{(t)}$  از تابع  $\pi(\beta | \theta_{(t-1)}, \alpha_{(t-1)}, \text{data})$  با توزیع پیشنهادی

$N(\beta_{(t-1)}, 1)$  به صورت زیر تولید شود:

الف-  $w_t$  از  $W(\cdot | \beta_{(t-1)}, 1) = N(\beta_{(t-1)}, 1)$  و نیز  $u$  از  $U(\cdot, 1)$  تولید شود.

ب- اگر  $u < \min(1, \delta)$  آنگاه قرار داده شود  $\beta_{(t)} = w(t)$ ، که در آن

$$\delta = \frac{\pi(w(t)|\text{data})W(\beta_{(t-1)}|w(t), 1)}{\pi(\beta_{t-1}|\text{data})W(w(t)|\beta_{(t-1)}, 1)},$$

در غیر این صورت به گام الف بازگردد.

گام ۴-  $\theta_{(t)}$  از  $\Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\beta_{(t-1)}))$  تولید شود.

گام ۵-  $\alpha_{(t)}$  از  $\Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\beta_{(t-1)}))$  تولید شود.

گام ۶- مقدار  $R_t = \frac{\theta_t}{\alpha_t + \theta_t}$  محاسبه شود.

گام ۷- قرار داده شود  $t = t + 1$ .

گام ۸- گام‌های ۳-۷ به تعداد  $T$  مرتبه تکرار شود.

برآورد بیزی پارامتر  $R$  تحت تابع زیان توان‌های دوم خطا به صورت

$$\hat{R}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t. \quad (9)$$

است. حال می‌توان با روش **چن و شائو (۱۹۹۹)** یک بازه اطمینان HPD در سطح  $100(1 - \eta)\%$  برای پارامتر  $R$  ساخت. برای این کار مقادیر  $R_1, \dots, R_T$  به صورت  $R_{(1)}, \dots, R_{(T)}$  مرتب شده و تمام بازه‌های اطمینان  $100(1 - \eta)\%$  پارامتر  $R$  به صورت  $(R_{(1)}, R_{([T(1-\eta)])}), \dots, (R_{([T\eta])}, R_{(T)})$  به دست می‌آیند، که در آن  $[T]$  بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا برابر با  $T$  است. بازه اطمینان HPD پارامتر  $R$  کوچکترین بازه بین بازه‌های اطمینان بالا است.

### ۳ استنباط $R$ با پارامتر مشترک و معلوم $\beta$

فرض کنید  $X \sim Lo(\theta, \beta)$ ،  $Y \sim Lo(\alpha, \beta)$  و پارامتر مشترک  $\beta$  معلوم است. اگر  $\{X_1, \dots, X_{J_1}\}$  و  $\{Y_1, \dots, Y_{J_2}\}$  دو نمونه تصادفی HPC با طرح‌های به ترتیب  $\{N, n, T_1, J_1, R_1, \dots, R_{J_1}\}$  و  $\{M, m, T_2, J_2, S_1, \dots, S_{J_2}\}$  باشند، وقتی پارامتر مشترک  $\beta$  معلوم باشد، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

$R$  به صورت

$$\widehat{R} = \left\{ 1 + \frac{J_1 \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \log(1 + \beta x_i) + R_{J_1}^* \log(1 + \beta T_1)}{J_1 \sum_{j=1}^{J_1} (S_j + 1) \log(1 + \beta y_j) + S_{J_1}^* \log(1 + \beta T_1)} \right\}^{-1}. \quad (10)$$

به دست می‌آید. در ادامه، برآورد بیزی پارامتر  $R$  تحت تابع زیان توان های دوم خطا، وقتی  $\theta$  و  $\alpha$  متغیرهای تصادفی گامای مستقل هستند، بررسی می‌شود. بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع درستنمایی به صورت

$$L(\text{data}, \beta | \theta, \alpha) \propto \theta^{J_1} \alpha^{J_1} e^{-\theta V(\beta) - \alpha U(\beta)}$$

است. بنابراین تابع چگالی پسین توام به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \alpha | \text{data}, \beta) &\propto L(\text{data}, \beta | \theta, \alpha) \pi_1(\theta) \pi_2(\alpha) \\ &\propto \theta^{J_1} \alpha^{J_1} e^{-\theta V(\beta) - \alpha U(\beta)} \theta^{a_1 - 1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2 - 1} e^{-b_2 \alpha} \\ &\propto \theta^{J_1 + a_1 - 1} \alpha^{J_1 + a_2 - 1} e^{-\theta(b_1 + V(\beta)) - \alpha(b_2 + U(\beta))} \\ &= \frac{(b_1 + V(\beta))^{J_1 + a_1} (b_2 + U(\beta))^{J_1 + a_2}}{\Gamma(J_1 + a_1) \Gamma(J_1 + a_2)} \\ &\times \theta^{J_1 + a_1 - 1} \alpha^{J_1 + a_2 - 1} e^{-\theta(b_1 + V(\beta)) - \alpha(b_2 + U(\beta))}, \quad (11) \end{aligned}$$

است، که در آن  $U(\beta)$  و  $V(\beta)$  به ترتیب در (۷) و (۸) بیان شده‌اند. حال برآورد بیزی پارامتر  $R$ ، تحت تابع زیان توان های دوم خطا از حل انتگرال

$$\widehat{R}^B = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta}{\alpha + \theta} \pi(\theta, \alpha | \text{data}, \beta) d\theta d\alpha.$$

به دست می‌آید. اکنون با در نظر گرفتن تبدیل های یک به یک  $u_1 = \frac{\theta}{\alpha + \theta}$  و  $u_2 = \alpha + \theta$ ، می‌توان نتیجه گرفت که  $0 < u_1 < 1$  و  $0 < u_2 < \infty$  است و ژاکوبین  $(u_1, u_2)$  برابر  $u_2$  می‌شود.

بنابراین رابطه  $\widehat{R}^B$  را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \widehat{R}^B &= \frac{(b_1 + V(\beta))^{J_1+a_1} (b_2 + U(\beta))^{J_2+a_2}}{\Gamma(J_1 + a_1)\Gamma(J_2 + a_2)} \\ &\times \int_0^1 \int_0^\infty u_1^{J_1+a_1} (1-u_1)^{J_2+a_2-1} u_2^{w-1} \\ &\times e^{-u_2 \{u_1(b_1+V(\beta)) + (1-u_1)(b_2+U(\beta))\}} du_2 du_1 \\ &= \frac{(1-z)^{J_1+a_1}}{B(J_1 + a_1, J_2 + a_2)} \int_0^1 u_1^{J_1+a_1} (1-u_1)^{J_2+a_2-1} (1-u_1 z)^{-w} du_1 \end{aligned}$$

است، که در آن  $w = J_1 + a_1 + J_2 + a_2$  و  $z = 1 - \frac{b_1+V(\beta)}{b_2+U(\beta)}$  انتگرال نمایش داده شده همان سری فوق هندسی است، که توسط بسیاری از نرم افزارها مانند متلب قابل محاسبه است:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt, \quad |z| < 1.$$

بنابراین با به کار بردن ایده کیزیلاسلان و نادر (۲۰۱۸)، برآورد بیز دقیق را می‌توان به صورت

$$\widehat{R}^B = \begin{cases} \frac{(1-z)^{J_1+a_1} (J_1+a_1)}{w} {}_2F_1(w, J_1 + a_1 + 1; w + 1, z) & |z| < 1, \\ \frac{(J_1+a_1)}{w(1-z)^{J_2+a_2}} {}_2F_1(w, J_2 + a_2; w + 1, \frac{z}{1-z}) & z < -1. \end{cases} \quad (12)$$

محاسبه نمود. علاوه بر این، یک بازه اطمینان بیزی در سطح  $\% (1 - \eta) 100$  به صورت  $(L, U)$  ساخته می‌شود که در آن  $L$  و  $U$  بایستی به ترتیب در روابط

$$\int_0^L f_R(r) dr = \frac{\eta}{\gamma}, \quad \int_0^U f_R(r) dr = 1 - \frac{\eta}{\gamma}, \quad (13)$$

صدق کنند، که در نهایت با استفاده از (۱۱) و روش تغییر متغیر  $f_R(r)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f_R(r) = \frac{(1-z)^{J_2+a_2} r^{J_2+a_2-1} (1-r)^{J_1+a_1-1} (1-rz)^{-w}}{B(J_1 + a_1, J_2 + a_2)}.$$

#### ۴ استنباط پارامتر $R$ در حالت کلی

اگر فرض شود  $X \sim Lo(\theta, \beta_1)$  و  $Y \sim Lo(\alpha, \beta_2)$  باشد، آنگاه پارامتر  $R$  به صورت انتگرالی

$$R = 1 - \alpha\beta_2 \int_0^\infty (1 + \beta_1 y)^{-\theta} (1 + \beta_2 y)^{-\alpha-1} dy.$$

محاسبه می‌شود. بر این مبنا، اگر  $\{X_1, \dots, X_{J_1}\}$  و  $\{Y_1, \dots, Y_{J_2}\}$  دو نمونه تصادفی HPC با طرح‌های به ترتیب  $\{N, n, T_1, J_1, R_1, \dots, R_{J_1}\}$  و  $\{M, m, T_2, J_2, S_1, \dots, S_{J_2}\}$  فرض شوند، تابع درستنمایی بر مبنای داده‌های مشاهده شده برابر است با:

$$\begin{aligned} L(\text{data}|\theta, \alpha, \beta_1, \beta_2) &\propto \theta^{J_1} \beta_1^{J_1} \left( \prod_{i=1}^{J_1} (1 + \beta_1 x_i)^{-1} \right) \alpha^{J_2} \beta_2^{J_2} \left( \prod_{j=1}^{J_2} (1 + \beta_2 y_j)^{-1} \right) \\ &\times e^{-\theta \left( \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \log(1 + \beta_1 x_i) + R_{J_1}^* \log(1 + \beta_1 T_1) \right)} \\ &\times e^{-\alpha \left( \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \log(1 + \beta_2 y_j) + S_{J_2}^* \log(1 + \beta_2 T_2) \right)}. \end{aligned}$$

بنابراین برآوردهای ماکسیم درستنمایی  $\theta$  و  $\alpha$  به ترتیب به فرم

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\beta_1) &= J_1 \left\{ \sum_{i=1}^{J_1} (R_i + 1) \log(1 + \beta_1 x_i) + R_{J_1}^* \log(1 + \beta_1 T_1) \right\}^{-1}, \\ \hat{\alpha}(\beta_2) &= J_2 \left\{ \sum_{j=1}^{J_2} (S_j + 1) \log(1 + \beta_2 y_j) + S_{J_2}^* \log(1 + \beta_2 T_2) \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند. همچنین  $\hat{\beta}_1$  و  $\hat{\beta}_2$  از حل معادلات غیر خطی

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{\beta_1} - \sum_{i=1}^{J_1} (\theta(R_i + 1) + 1) \frac{x_i}{1 + \beta_1 x_i} - \theta R_{J_1}^* \frac{T_1}{1 + \beta_1 T_1} &= 0, \\ \frac{J_2}{\beta_2} - \sum_{j=1}^{J_2} (\alpha(S_j + 1) + 1) \frac{y_j}{1 + \beta_2 y_j} - \alpha S_{J_2}^* \frac{T_2}{1 + \beta_2 T_2} &= 0. \end{aligned}$$

۵۲۰ ..... برآورد بیزی پارامتر  $R$  در توزیع لوماکس

حاصل می‌شوند. براساس برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta, \alpha, \beta_1$  و  $\beta_2$  و خاصیت پایایی آنها، برآورد  $R$  برابر است با

$$\hat{R} = 1 - \hat{\alpha}\hat{\beta}_2 \int_0^{\infty} (1 + \hat{\beta}_1 y)^{-\hat{\theta}} (1 + \hat{\beta}_2 y)^{-\hat{\alpha}-1} dy. \quad (14)$$

حال به برآورد استنباط بیزی پارامتر  $R$  تحت تابع زیان توان‌های دوم خطا، با توزیع‌های پیشین

$$\pi_1(\theta) \propto \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta}, \quad \theta, a_1, b_1 > 0,$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}, \quad \alpha, a_2, b_2 > 0,$$

$$\pi_3(\beta_1) \propto \beta_1^{a_3-1} e^{-b_3\beta_1}, \quad \beta_1, a_3, b_3 > 0,$$

$$\pi_4(\beta_2) \propto \beta_2^{a_4-1} e^{-b_4\beta_2}, \quad \beta_2, a_4, b_4 > 0,$$

پرداخته می‌شود. با توجه به تابع چگالی پسین توأم، توابع چگالی پسین به‌ترتیب به صورت

$$\theta | \beta_1, \text{ data} \sim \Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\beta_1)),$$

$$\alpha | \beta_2, \text{ data} \sim \Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\beta_2)),$$

$$\pi(\beta_1 | \theta, \text{ data}) \propto \beta_1^{J_1 + a_3 - 1} e^{-\theta(V(\beta_1) + b_3)} \prod_{i=1}^{J_1} \frac{1}{1 + \beta_1 x_i},$$

$$\pi(\beta_2 | \alpha, \text{ data}) \propto \beta_2^{J_2 + a_4 - 1} e^{-\alpha(U(\beta_2) + b_4)} \prod_{j=1}^{J_2} \frac{1}{1 + \beta_2 y_j}.$$

هستند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای تولید یک نمونه تصادفی از توابع چگالی احتمال پسین  $\pi(\beta_2 | \alpha, \text{ data})$  و  $\pi(\beta_1 | \theta, \text{ data})$  باید از روش متروپولیس-هستینگز استفاده شود.

الگوریتم ۳. برآورد گیبز  $R$ :

گام ۱- با مقادیر اولیه  $(\theta_{(0)}, \alpha_{(0)}, \beta_{1(0)}, \beta_{2(0)})$  شروع شود.

گام ۲- قرار داده شود  $t = 1$ .

گام ۳- با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز  $\beta_{1(t)}$  از تابع  $\pi(\beta_1 | \theta_{(t-1)}, \text{ data})$  با توزیع پیشنهادی

$N(\beta_{1(t-1)}, 1)$  تولید شود.



- گام ۴- با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز  $\beta_{\nu(t)}$  از تابع  $\pi(\beta_{\nu} | \alpha_{(t-1)}, \text{data})$  با توزیع پیشنهادی  $N(\beta_{\nu(t-1)}, 1)$  تولید شود.
- گام ۵-  $\theta_{(t)}$  از  $\Gamma(J_1 + a_1, b_1 + V(\beta_{\nu(t-1)}))$  تولید شود.
- گام ۶-  $\alpha_{(t)}$  از  $\Gamma(J_2 + a_2, b_2 + U(\beta_{\nu(t-1)}))$  تولید شود.
- گام ۷- مقدار  $R_t = 1 - \alpha_{(t)}\beta_{\nu(t)} \int_0^{\infty} (1 + \beta_{\nu(t)}y)^{-\theta_{(t)}} (1 + \beta_{\nu(t)}y)^{-\alpha_{(t)}-1} dy$  محاسبه شود.
- گام ۸- قرار داده شود  $t = t + 1$ .
- گام ۹- گام‌های ۳-۸ به تعداد  $T$  مرتبه تکرار شود.

بنابراین برآورد بیزی پارامتر  $R$  تحت تابع زیان توان‌های دوم خطا به صورت

$$\hat{R}^{MC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t. \quad (15)$$

است. با استفاده از این ساختار می‌توان یک بازه اطمینان HPD در سطح  $(1 - \eta) \times 100\%$  با استفاده از روش چن و شائو (۱۹۹۹) ارائه نمود.

## ۵ مطالعات شبیه‌سازی

عملکرد برآوردگرهای مختلف بیزی، تحت طرح‌های HPC، با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی می‌شود. کلیه مراحل شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB انجام شده است. برآوردهای نقطه‌ای حاصل برحسب میانگین توان‌های دوم خطا (MSE) و برآوردهای بازه‌ای برحسب میانگین طول بازه‌ها و درصد همگرایی با هم مقایسه می‌شوند. تمامی نتایج با ۳۰۰۰ مرتبه تکرار حاصل شده‌اند. در این مطالعه، برای  $T_1, T_2$  دو مقدار ۰/۷ و ۰/۸ در نظر گرفته شده و ۳ طرح سانسور مختلف مورد بررسی قرار داده می‌شود:

$$\text{طرح ۱: } R_1 = \dots = R_{n-1} = 0, R_n = N - n$$

$$\text{طرح ۲: } R_1 = N - n, R_2 = \dots = R_n = 0$$

$$\text{طرح ۳: } R_1 = \dots = R_n = \frac{N-n}{n}$$

باید توجه کرد که در الگوریتم MCMC تعداد تکرارها برابر با  $T = 3000$  و تعداد نقاط سوخته برابر با ۱۵۰۰ است. همچنین مقادیر MLE پارامترهای نامعلوم به‌عنوان نقاط اولیه در این الگوریتم در نظر گرفته

شده است. علاوه بر آن، استنباط بیزی با استفاده از توزیع‌های پیشین متفاوتی به صورت

$$\text{پیشین ۱: } a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$$

$$\text{پیشین ۲: } a_1 = a_2 = a_3 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = 0.1$$

$$\text{پیشین ۳: } a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$$

$$\text{پیشین ۴: } a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = 0.1$$

$$\text{پیشین ۵: } a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = 0$$

$$\text{پیشین ۶: } a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.1$$

بررسی شده است.

حالت اول، با فرض پارامتر  $\beta$  مشترک و نامعلوم، مقادیر پارامتر  $(\theta, \alpha, \beta) = (2, 2.5, 1)$  برای به دست آوردن نتایج شبیه‌سازی به کار گرفته شده‌اند. مقادیر اریبی و MSE برآوردگر MLE با استفاده از (۲) و برآوردگرهای بیزی با استفاده از تقریب لیندلی و الگوریتم گیز از (۶) و (۹) به ترتیب به دست آمده‌اند. همچنین بازه‌های اطمینان HPD در سطح اطمینان ۹۵٪ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۱ گزارش شده است.

حالت دوم، با فرض پارامتر  $\beta$  مشترک و معلوم، مقادیر پارامتر  $(\theta, \alpha, \beta) = (3, 2.5, 2)$  برای به دست آوردن نتایج شبیه‌سازی فرض شده‌اند. تحت شرایط بالا، مقادیر اریبی و MSE برآوردگر MLE با استفاده از (۱۰) و برآوردگر بیزی و بازه اطمینان بیزی با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) به ترتیب به دست آمده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۲ ارائه شده است.

حالت سوم، با فرض  $\beta_1$  و  $\beta_2$  متفاوت و نامعلوم، مقادیر پارامتر  $(\theta, \alpha, \beta_1, \beta_2) = (3, 2.5, 2, 1)$  برای به دست آوردن نتایج شبیه‌سازی لحاظ شده‌اند. تحت شرایط بالا، مقادیر اریبی و MSE برآوردگر MLE با استفاده از (۱۴) و برآوردگر بیزی با استفاده از (۱۵) به دست آمده است. همچنین بازه‌های اطمینان HPD در سطح ۹۵٪ محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل شده، در جدول ۳ گزارش شده است.

از جدول ۱، ملاحظه می‌شود که برآوردگرهای بیزی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگر MLE دارند. همچنین در بین برآوردگرهای بیزی، بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است (تابع چگالی پیشین ۲). علاوه بر این، در حالت اول برآورد بیزی به دست آمده به روش گیز نسبت به روش لیندلی، در حالت کلی دارای عملکرد بهتری است. همچنین، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد در بین بازه‌های اطمینان مختلف، به بازه‌های HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است (تابع چگالی پیشین ۲).

از جدول ۲، ملاحظه می‌شود که برآوردگرهای بیزی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگر MLE دارند. در بین برآوردگرهای بیزی، بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است (تابع چگالی پیشین ۴). همچنین، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد در بین بازه‌های اطمینان مختلف، به بازه‌های HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است (تابع چگالی پیشین ۴).

از جدول ۳، ملاحظه می‌شود که برآوردگرهای بیزی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگر MLE دارند. در بین برآوردگرهای بیزی، بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است (تابع چگالی پیشین ۶). همچنین، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد در بین بازه‌های اطمینان مختلف، به بازه‌های HPD بر اساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است (تابع چگالی پیشین ۶).

برای بررسی همگرایی الگوریتم MCMC در حالت‌های اول و سوم نمودارهای اثربخشی در طرح‌های سانسور مختلف مطالعه شده‌اند. تعدادی از این نمودارها در شکل‌های ۳ تا ۷ آمده‌اند. ملاحظه می‌شود که در همه موارد، نمودارهای اثربخشی، همگرایی الگوریتم MCMC را نشان می‌دهند.

علاوه بر این، در روش متروپولیس-هستینگز، در حالت اول تابع چگالی پسین  $\beta$  و در حالت سوم توابع چگالی پسین  $\beta_1$  و  $\beta_2$ ، در طرح‌های سانسور مختلف و برای توابع چگالی پیشین متفاوت، در شکل‌های ۸ تا ۱۰ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، این توابع بسیار مشابه تابع چگالی نرمال هستند. بنابراین برای تولید نمونه تصادفی از  $\pi(\beta|\theta, \alpha, \text{data})$ ،  $\pi(\beta_1|\theta, \text{data})$  و  $\pi(\beta_2|\alpha, \text{data})$ ، روش متروپولیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال به‌کار برده شده است. از جداول ۱، ۲ و ۳ ملاحظه می‌شود که با افزایش  $n$  برای  $N$  و  $T$  ثابت، و همچنین با افزایش  $T$  برای  $N$  و  $n$  ثابت، مقادیر MSE و طول بازه‌های اطمینان کاهش یافته و مقادیر درصد پوشش افزایش می‌یابد.

جدول ۰.۱ نتایج شبیه‌سازی با پارامتر شکل مشترک و نامعلوم

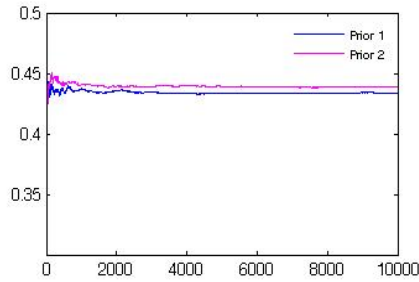
پیشین ۲						پیشین ۱						MLE		C.S	(N, n)
لیندلی			گیبز			لیندلی			گیبز			MSE	اریبی		
MSE	اریبی	C.P	طول	MSE	اریبی	MSE	اریبی	C.P	طول	MSE	اریبی	MSE	اریبی		
۰/۰۱۴	۰/۰۰۸	۰/۹۰۲	۰/۳۹۲	۰/۰۱۰	۰/۰۰۹	۰/۰۱۷	۰/۰۰۹	۰/۹۰۰	۰/۴۰۶	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	۰/۰۲۲	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۴۰, ۱۰)
۰/۰۱۵	۰/۰۰۸	۰/۹۰۷	۰/۳۹۳	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۲۱	۰/۰۰۷	۰/۹۰۲	۰/۴۰۴	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۲۶	۰/۰۰۸	(۲, ۲)	$T = ۰/۷$
۰/۰۱۲	۰/۰۰۹	۰/۹۰۸	۰/۳۹۶	۰/۰۰۹	۰/۰۰۷	۰/۰۱۴	۰/۰۱۰	۰/۹۰۳	۰/۴۰۲	۰/۰۱۰	۰/۰۰۸	۰/۰۲۱	۰/۰۱۱	(۳, ۳)	
۰/۰۳۶	۰/۰۱۱	۰/۹۰۴	۰/۳۷۹	۰/۰۲۱	۰/۰۱۱	۰/۰۴۴	۰/۰۱۰	۰/۹۰۱	۰/۳۸۹	۰/۰۳۱	۰/۰۰۹	۰/۰۵۹	۰/۰۱۳	(۱, ۲)	
۰/۰۱۲	۰/۰۰۸	۰/۹۱۵	۰/۳۸۶	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	۰/۰۱۵	۰/۰۰۹	۰/۹۱۵	۰/۴۰۲	۰/۰۰۹	۰/۰۱۱	۰/۰۲۲	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۴۰, ۱۰)
۰/۰۱۱	۰/۰۰۷	۰/۹۱۶	۰/۳۹۰	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۱	۰/۹۱۵	۰/۴۰۲	۰/۰۰۸	۰/۰۱۱	۰/۰۲۲	۰/۰۱۱	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۰۱۱	۰/۰۰۷	۰/۹۲۰	۰/۳۹۵	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	۰/۰۱۳	۰/۰۱۱	۰/۹۱۸	۰/۴۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	۰/۰۲۱	۰/۰۰۹	(۳, ۳)	
۰/۰۳۱	۰/۰۱۱	۰/۹۲۰	۰/۳۷۱	۰/۰۲۶	۰/۰۰۹	۰/۰۳۷	۰/۰۱۰	۰/۹۱۵	۰/۳۷۷	۰/۰۲۷	۰/۰۰۹	۰/۰۵۷	۰/۰۱۱	(۱, ۲)	
۰/۰۱۳	۰/۰۱۱	۰/۹۳۰	۰/۳۹۰	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	۰/۰۱۶	۰/۰۱۰	۰/۹۲۹	۰/۴۰۴	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	۰/۰۲۱	۰/۰۰۹	(۱, ۱)	(۶۰, ۱۰)
۰/۰۱۲	۰/۰۰۸	۰/۹۲۴	۰/۳۹۱	۰/۰۰۹	۰/۰۰۷	۰/۰۱۵	۰/۰۱۱	۰/۹۲۲	۰/۴۰۴	۰/۰۱۰	۰/۰۰۷	۰/۰۲۳	۰/۰۰۹	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۰۱۰	۰/۰۰۷	۰/۹۲۲	۰/۳۹۲	۰/۰۰۸	۰/۰۱۱	۰/۰۱۲	۰/۰۰۸	۰/۹۲۱	۰/۴۰۶	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۱۹	۰/۰۱۰	(۳, ۳)	
۰/۰۳۳	۰/۰۱۰	۰/۹۳۱	۰/۳۶۶	۰/۰۲۱	۰/۰۰۹	۰/۰۳۷	۰/۰۱۰	۰/۹۳۰	۰/۳۷۲	۰/۰۳۲	۰/۰۰۸	۰/۰۵۷	۰/۰۱۰	(۱, ۲)	
۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۹۲۲	۰/۲۹۲	۰/۰۰۵	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷	۰/۰۱۱	۰/۹۴۰	۰/۲۹۸	۰/۰۰۵	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۶۰, ۲۰)
۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۹۴۰	۰/۲۸۷	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	۰/۹۳۹	۰/۲۹۸	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰	۰/۰۰۹	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۰۰۶	۰/۰۱۰	۰/۹۴۴	۰/۲۹۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۹۴۲	۰/۲۹۷	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	(۳, ۳)	
۰/۰۲۸	۰/۰۰۷	۰/۹۴۰	۰/۲۵۶	۰/۰۲۴	۰/۰۰۹	۰/۰۳۵	۰/۰۱۰	۰/۹۳۹	۰/۲۶۰	۰/۰۲۴	۰/۰۰۷	۰/۰۵۵	۰/۰۰۹	(۱, ۲)	
۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۶۵	۰/۱۶۹	۰/۰۰۳	۰/۰۰۷	۰/۰۰۵	۰/۰۱۱	۰/۹۵۵	۰/۱۷۴	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۶۰, ۳۰)
۰/۰۰۴	۰/۰۱۱	۰/۹۶۰	۰/۱۷۷	۰/۰۰۳	۰/۰۱۱	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰	۰/۹۵۷	۰/۱۸۱	۰/۰۰۴	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	۰/۰۱۱	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۶۳	۰/۱۵۴	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	۰/۹۵۵	۰/۱۷۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	(۳, ۳)	
۰/۰۱۷	۰/۰۰۹	۰/۹۶۵	۰/۱۳۳	۰/۰۱۴	۰/۰۰۹	۰/۰۲۵	۰/۰۱۰	۰/۹۵۷	۰/۱۴۸	۰/۰۲۰	۰/۰۱۱	۰/۰۵۰	۰/۰۱۰	(۱, ۲)	
۰/۰۰۳	۰/۰۱۰	۰/۹۶۸	۰/۱۴۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۰/۰۰۴	۰/۰۰۷	۰/۹۶۳	۰/۱۵۱	۰/۰۰۳	۰/۰۱۱	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰	(۱, ۱)	(۸۰, ۴۰)
۰/۰۰۳	۰/۰۱۰	۰/۹۶۹	۰/۱۵۰	۰/۰۰۲	۰/۰۱۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۹۶۷	۰/۱۵۶	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۰۰۳	۰/۰۰۷	۰/۹۶۵	۰/۱۳۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۹	۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۶۲	۰/۱۳۹	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	(۳, ۳)	
۰/۰۱۴	۰/۰۱۰	۰/۹۶۷	۰/۱۳۲	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	۰/۰۱۶	۰/۰۰۹	۰/۹۶۳	۰/۱۴۳	۰/۰۱۲	۰/۰۰۹	۰/۰۴۴	۰/۰۱۱	(۱, ۲)	

جدول ۰۲. نتایج شبیه‌سازی با پارامتر شکل مشترک و معلوم

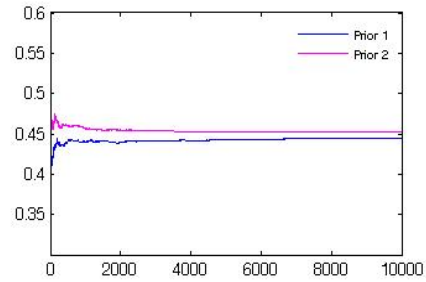
پیشین ۴				پیشین ۳				MLE		C.S	(N, n)
C.P	طول	MSE	اریبی	C.P	طول	MSE	اریبی	MSE	اریبی		
۰/۹۲۴	۰/۳۹۵	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰	۰/۹۲۳	۰/۴۰۷	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۱۶	۰/۰۰۹	(۱, ۱)	(۴۰, ۱۰)
۰/۹۲۵	۰/۳۹۴	۰/۰۰۶	۰/۰۱۰	۰/۹۱۹	۰/۴۰۵	۰/۰۱۱	۰/۰۱۰	۰/۰۱۶	۰/۰۰۷	(۲, ۲)	$T = ۰/۷$
۰/۹۰۵	۰/۳۹۶	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۹۰۲	۰/۴۰۷	۰/۰۱۲	۰/۰۰۹	۰/۰۱۷	۰/۰۱۰	(۳, ۳)	
۰/۹۰۳	۰/۳۷۶	۰/۰۲۵	۰/۰۰۹	۰/۹۰۱	۰/۳۷۶	۰/۰۳۲	۰/۰۰۹	۰/۰۵۲	۰/۰۰۹	(۱, ۲)	
۰/۹۱۹	۰/۳۹۴	۰/۰۰۶	۰/۰۱۰	۰/۹۱۵	۰/۴۰۴	۰/۰۱۲	۰/۰۱۰	۰/۰۱۶	۰/۰۱۰	(۱, ۱)	(۴۰, ۱۰)
۰/۹۲۵	۰/۳۹۴	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	۰/۹۲۴	۰/۴۰۴	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	۰/۰۱۵	۰/۰۱۰	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۳۵	۰/۳۹۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۹۳۴	۰/۴۰۶	۰/۰۱۱	۰/۰۱۰	۰/۰۱۶	۰/۰۱۰	(۳, ۳)	
۰/۹۲۹	۰/۳۷۳	۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۹۲۵	۰/۳۷۴	۰/۰۳۰	۰/۰۱۰	۰/۰۴۸	۰/۰۰۹	(۱, ۲)	
۰/۹۲۶	۰/۳۹۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	۰/۹۲۴	۰/۴۰۶	۰/۰۱۱	۰/۰۰۹	۰/۰۱۶	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۶۰, ۱۰)
۰/۹۲۵	۰/۳۹۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	۰/۹۲۴	۰/۴۰۴	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۱۶	۰/۰۰۸	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۲۴	۰/۳۹۴	۰/۰۰۶	۰/۰۱۰	۰/۹۲۳	۰/۴۰۵	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۱۵	۰/۰۰۹	(۳, ۳)	
۰/۹۳۴	۰/۳۷۰	۰/۰۳۰	۰/۰۰۹	۰/۹۳۳	۰/۳۷۱	۰/۰۳۸	۰/۰۰۸	۰/۰۵۱	۰/۰۰۹	(۱, ۲)	
۰/۹۴۷	۰/۲۹۲	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰	۰/۹۴۴	۰/۲۹۷	۰/۰۰۶	۰/۰۱۰	۰/۰۱۱	۰/۰۰۹	(۱, ۱)	(۶۰, ۲۰)
۰/۹۴۸	۰/۲۹۲	۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۴۴	۰/۲۹۷	۰/۰۰۶	۰/۰۱۱	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۴۶	۰/۲۹۲	۰/۰۰۴	۰/۰۱۱	۰/۹۴۳	۰/۲۹۷	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۹	۰/۰۱۰	(۳, ۳)	
۰/۹۴۶	۰/۲۶۱	۰/۰۲۱	۰/۰۰۷	۰/۹۴۶	۰/۲۶۱	۰/۰۳۲	۰/۰۱۰	۰/۰۴۲	۰/۰۰۹	(۱, ۲)	
۰/۹۶۴	۰/۱۷۰	۰/۰۰۴	۰/۰۱۱	۰/۹۵۹	۰/۱۷۵	۰/۰۰۴	۰/۰۱۰	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۶۰, ۳۰)
۰/۹۶۹	۰/۱۶۹	۰/۰۰۳	۰/۰۱۰	۰/۹۶۴	۰/۱۷۲	۰/۰۰۴	۰/۰۱۰	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۶۵	۰/۱۷۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۹۶۰	۰/۱۷۹	۰/۰۰۵	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷	(۳, ۳)	
۰/۹۶۹	۰/۱۵۵	۰/۰۱۵	۰/۰۱۰	۰/۹۶۶	۰/۱۶۴	۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۰۳۶	۰/۰۱۰	(۱, ۲)	
۰/۹۶۹	۰/۱۴۹	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۰/۹۶۸	۰/۱۵۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۱۱	(۱, ۱)	(۸۰, ۴۰)
۰/۹۷۱	۰/۱۳۹	۰/۰۰۲	۰/۰۱۱	۰/۹۶۹	۰/۱۵۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۶	۰/۰۱۰	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۷۰	۰/۱۴۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۰/۹۶۸	۰/۱۴۵	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۱۱	(۳, ۳)	
۰/۹۷۰	۰/۱۳۷	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	۰/۹۶۸	۰/۱۴۰	۰/۰۱۶	۰/۰۱۱	۰/۰۲۳	۰/۰۱۱	(۱, ۲)	

جدول ۰۳. نتایج شبیه‌سازی در حالت کلی

پیشین ۶				پیشین ۵				MLE		C.S	(N, n)
C.P	طول	MSE	اریبی	C.P	طول	MSE	اریبی	MSE	اریبی		
۰/۹۰۶	۰/۳۷۷	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	۰/۹۰	۰/۳۹۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۱۲	۰/۰۱۰	(۱, ۱)	(۴۰, ۱۰)
۰/۹۱۹	۰/۳۸۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۹۱۷	۰/۳۹۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۰۱۲	۰/۰۰۸	(۲, ۲)	$T = ۰/۷$
۰/۹۱۰	۰/۳۸۱	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۹۰۶	۰/۳۹۴	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۱۳	۰/۰۰۹	(۳, ۳)	
۰/۹۱۸	۰/۳۶۳	۰/۰۲۵	۰/۰۱۰	۰/۹۱۳	۰/۳۷۳	۰/۰۲۸	۰/۰۰۹	۰/۰۳۹	۰/۰۱۹	(۱, ۲)	
۰/۹۲۹	۰/۳۷۱	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	۰/۹۲۴	۰/۳۹۲	۰/۰۰۷	۰/۰۰۹	۰/۰۱۰	۰/۰۰۹	(۱, ۱)	(۴۰, ۱۰)
۰/۹۲۹	۰/۳۸۲	۰/۰۰۵	۰/۰۰۸	۰/۹۱۹	۰/۳۹۴	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	۰/۰۱۰	۰/۰۱۰	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۲۹	۰/۳۸۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	۰/۹۲۲	۰/۳۹۴	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰	۰/۰۱۱	۰/۰۱۰	(۳, ۳)	
۰/۹۳۹	۰/۳۴۶	۰/۰۱۷	۰/۰۰۹	۰/۹۳۵	۰/۳۵۳	۰/۰۲۱	۰/۰۰۹	۰/۰۳۰	۰/۰۱۰	(۱, ۲)	
۰/۹۳۹	۰/۳۸۱	۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۳۷	۰/۳۹۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	۰/۰۱۱	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۶۰, ۱۰)
۰/۹۳۶	۰/۳۷۸	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰	۰/۹۳۶	۰/۳۹۳	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰	۰/۰۱۲	۰/۰۱۰	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۲۸	۰/۳۷۷	۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۲۶	۰/۳۸۱	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	(۳, ۳)	
۰/۹۳۹	۰/۳۶۰	۰/۰۲۰	۰/۰۰۹	۰/۹۱۷	۰/۳۶۷	۰/۰۲۵	۰/۰۰۹	۰/۰۳۶	۰/۰۱۲	(۱, ۲)	
۰/۹۴۵	۰/۲۸۵	۰/۰۰۴	۰/۰۰۹	۰/۹۴۳	۰/۲۹۲	۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	(۱, ۱)	(۶۰, ۲۰)
۰/۹۴۷	۰/۲۸۴	۰/۰۰۴	۰/۰۰۸	۰/۹۴۵	۰/۲۸۹	۰/۰۰۴	۰/۰۱۰	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۴۶	۰/۲۸۷	۰/۰۰۴	۰/۰۰۹	۰/۹۴۳	۰/۲۹۲	۰/۰۰۴	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	(۳, ۳)	
۰/۹۵۲	۰/۲۵۷	۰/۰۱۶	۰/۰۰۹	۰/۹۴۴	۰/۲۵۸	۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۰۲۸	۰/۰۱۱	(۱, ۲)	
۰/۹۶۵	۰/۱۸۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۹۵۷	۰/۲۰۹	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	(۱, ۱)	(۶۰, ۳۰)
۰/۹۶۹	۰/۱۷۹	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۹۶۰	۰/۲۱۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۹	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۶۶	۰/۱۸۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۹	۰/۹۵۵	۰/۲۰۲	۰/۰۰۴	۰/۰۰۹	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	(۳, ۳)	
۰/۹۶۷	۰/۱۷۱	۰/۰۱۳	۰/۰۱۰	۰/۹۵۸	۰/۱۹۳	۰/۰۱۶	۰/۰۰۸	۰/۰۲۰	۰/۰۱۱	(۱, ۲)	
۰/۹۶۸	۰/۱۳۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۹	۰/۹۶۶	۰/۱۵۵	۰/۰۰۳	۰/۰۱۰	۰/۰۰۴	۰/۰۰۹	(۱, ۱)	(۸۰, ۴۰)
۰/۹۷۰	۰/۱۳۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۹	۰/۹۶۷	۰/۱۵۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۰/۰۰۴	۰/۰۱۰	(۲, ۲)	$T = ۰/۹$
۰/۹۶۹	۰/۱۴۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۸	۰/۹۶۸	۰/۱۶۵	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۵	۰/۰۰۸	(۳, ۳)	
۰/۹۶۹	۰/۱۳۰	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	۰/۹۶۶	۰/۱۵۰	۰/۰۱۱	۰/۰۱۰	۰/۰۱۵	۰/۰۱۳	(۱, ۲)	

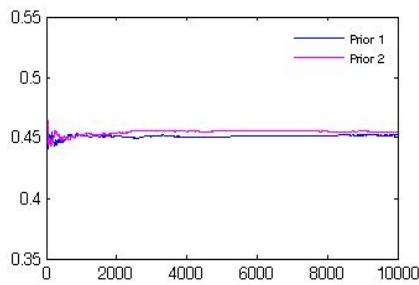


(ب)

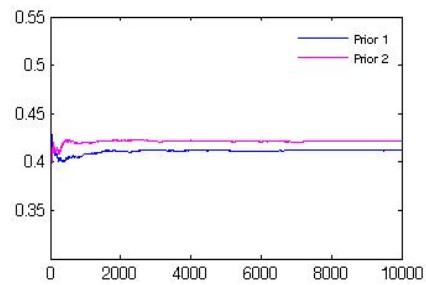


(الف)

شکل ۴. نمودار اثربخشی در حالت اول الف-  $(N, n, T) = (40, 10, 9)$  و طرح سانسور (۳, ۲) ، ب-  $(N, n, T) = (40, 10, 7)$  و طرح سانسور (۱, ۲)



(ب)

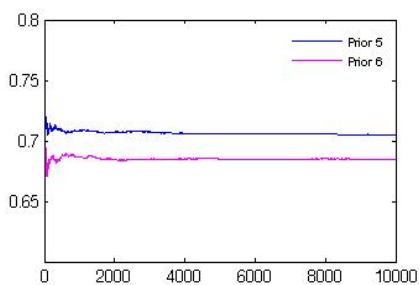


(الف)

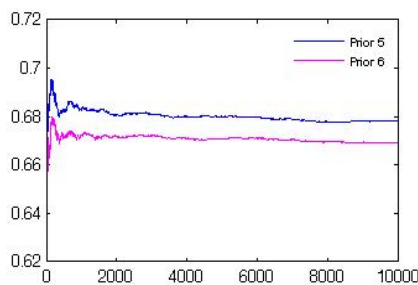
شکل ۵. نمودار اثربخشی در حالت اول الف-  $(N, n, T) = (60, 20, 9)$  و طرح سانسور (۲, ۲) ، ب-  $(N, n, T) = (60, 20, 7)$  و طرح سانسور (۱, ۲)

## ۶ تحلیل داده واقعی

داده‌های این بخش مربوط به دو گروه هستند که از بیماری سرطان رنج می‌برند و اولین بار در **افرون** (۱۹۸۸) بیان و اخیراً توسط **یاداو و همکاران** (۲۰۱۹) مطالعه شده‌اند. گروه اول زمان بقای ۵۱ بیمار است که با رادیوتراپی درمان می‌شوند و گروه دوم زمان بقای ۴۴ بیمار است که با ترکیبی از رادیوتراپی و شیمی درمانی مداوم می‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که  $R = P(X < Y)$  می‌تواند احتمال برتری هر یک از این دو روش درمان را نسبت به یکدیگر نشان دهد. داده‌ها در جدول ۴ گزارش شده‌اند. حال ابتدا

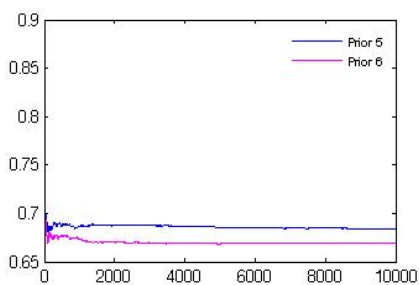


(ب)

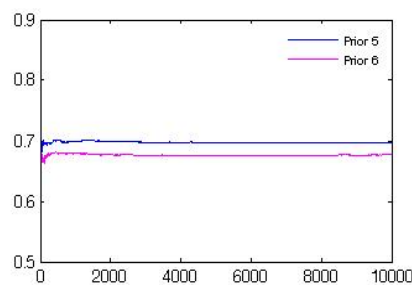


(الف)

شکل ۶. نمودار اثربخشی در حالت اول الف-  $(N, n, T) = (40, 10, 0/9)$  و طرح سانسور (۲, ۲) ، ب-  $(N, n, T) = (40, 20, 0/7)$  و طرح سانسور (۱, ۱)



(ب)



(الف)

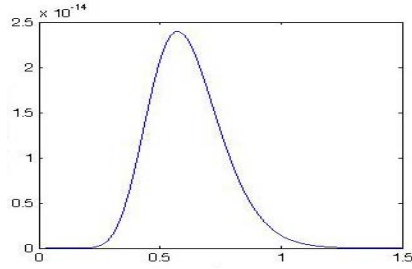
شکل ۷. نمودار اثربخشی در حالت اول الف-  $(N, n, T) = (60, 20, 0/7)$  و طرح سانسور (۳, ۳) ، ب-  $(N, n, T) = (60, 10, 0/9)$  و طرح سانسور (۲, ۳)

باید بررسی کرد که توزیع لوماکس برای تحلیل این داده‌ها مناسب است، که برای این منظور باید توزیع را به‌طور جداگانه به داده‌ها برازش داد. برای مجموعه داده‌های اول  $(X)$ ، آماره کلموگروف-اسمیرنوف و  $p$ -مقدار به‌ترتیب برابر است با  $0/0978$  و  $0/6775$ . همچنین برای مجموعه داده‌های دوم  $(Y)$ ، آماره کلموگروف-اسمیرنوف و  $p$ -مقدار به‌ترتیب برابر است با  $0/1232$  و  $0/3899$ . با توجه به  $p$ -مقدارها در هر دو حالت، ملاحظه می‌شود که توزیع لوماکس برازش مناسبی برای داده‌هاست. در شکل ۱۱، نمودار احتمال-احتمال برای هر دو مجموعه داده‌های  $X$  و  $Y$  آمده است.

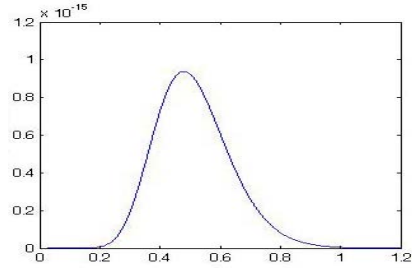
دو طرح سانسور فزاینده پیوندی برای داده‌های  $X$  و  $Y$  بررسی شده است:

طرح ۱، برای  $X$ :  $[1^{*21}, 0^9]$ ، برای  $Y$ :  $[1^{*14}, 0^{*16}]$  و  $T = 100$ .



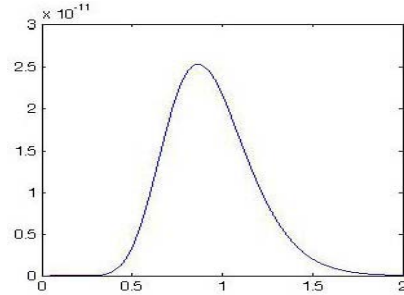


(ب)

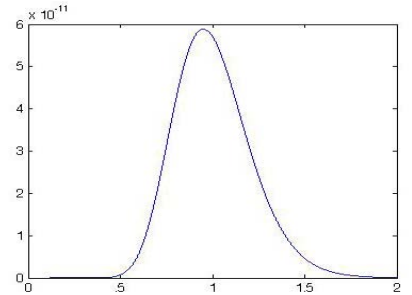


(الف)

شکل ۸. تابع چگالی پسین  $\beta$  برای  $(N, n, T) = (60, 10, 0/7)$  و طرح سانسور  $(1, 2)$  الف- پیشین ۲، ب- پیشین ۱

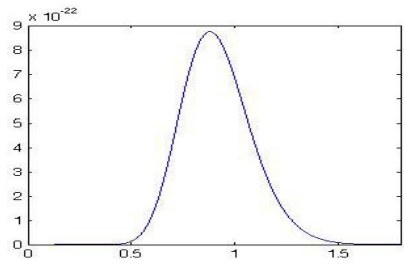


(ب)

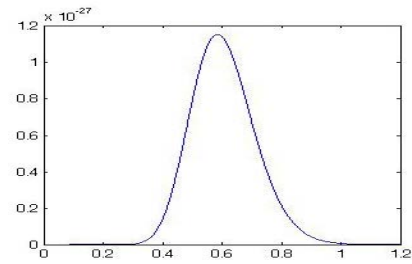


(الف)

شکل ۹. تابع چگالی پسین  $\beta_1$  برای  $(N, n, T) = (40, 20, 0/9)$  و طرح سانسور  $(2, 2)$  الف- پیشین ۵، ب- پیشین ۶



(ب)

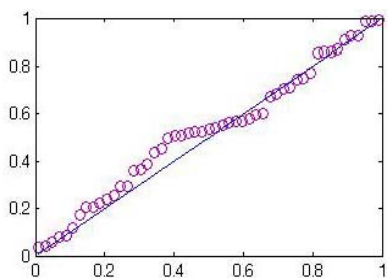


(الف)

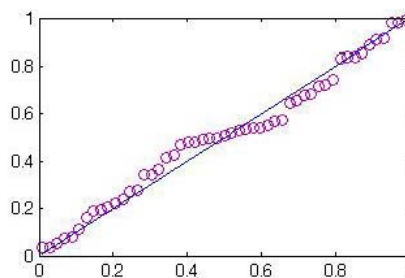
شکل ۱۰. تابع چگالی پسین  $\beta_2$  برای  $(N, n, T) = (40, 10, 0/7)$  و طرح سانسور  $(2, 3)$  الف- پیشین ۶، ب- پیشین ۵

جدول ۴. داده‌های واقعی

۴۲/۲۸	۴۲	۴۱/۵۵	۳۴	۲۲/۷	۱۶/۱	۱۴/۴۸	۱۰/۴۲	۷	۶/۵۳	X
۱۲۹	۱۱۲	۱۰۸	۹۱	۸۴	۸۳	۶۴	۶۳	۵۳/۶۲	۴۹/۹	
۱۶۰	۱۵۷	۱۵۴	۱۴۹	۱۴۶	۱۴۰	۱۴۰	۱۳۹	۱۳۳	۱۳۳	
۲۷۷	۲۷۳	۲۴۸	۲۴۱	۲۲۵	۲۱۸	۱۷۶	۱۷۳	۱۶۵	۱۶۰	
۱۱۴۶	۱۱۰۱	۵۹۴	۵۸۳	۵۲۳	۴۴۰	۴۲۰	۴۱۷	۴۰۵	۲۹۷	
									۱۴۱۷	
۵۸/۳۶	۵۵/۴۶	۴۷/۳۸	۴۱/۳۵	۳۷	۳۱/۹۸	۲۵/۸۷	۲۳/۷۴	۲۳/۵۶	۱۲/۲۰	Y
۱۱۰	۹۴	۹۲	۸۴	۴۳	۸۱	۷۴/۴۷	۷۸/۲۶	۶۸/۴۶	۶۳/۴۷	
۱۷۳	۱۵۹	۱۵۵	۱۴۶	۱۴۰	۱۳۳	۱۳۰	۱۲۷	۱۱۹	۱۱۲	
۵۱۹	۴۶۹	۴۳۲	۳۳۹	۳۱۹	۲۸۱	۲۴۹	۲۰۹	۱۹۴	۱۷۹	
						۱۷۷۹	۸۱۷	۷۳۵	۶۳۳	



(ب)



(الف)

شکل ۱۱. نمودار احتمال-احتمال برای الف- $X$ ، ب- $Y$

طرح ۲، برای  $X: [0.4, 1, 0.15, 2]$ ، برای  $Y: [0.8, 0, 0.12, 2]$  و  $T = 200$ .  
 در حالت اول، وقتی پارامتر  $\beta$  مشترک و نامعلوم است، برای داده‌های کامل، طرح سانسور ۱ و ۲، مقادیر  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$  یعنی توزیع پیشین ناآگاهنده، به روش لیندلی و MCMC محاسبه شده و بازه‌های اطمینان HPD به دست آمده‌اند. همچنین در حالت کلی، وقتی تمام پارامترها غیرمشترک و نامعلوم هستند، برای داده‌های کامل، طرح سانسور ۱ و ۲، مقادیر  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$  یعنی توزیع پیشین ناآگاهنده، به روش لیندلی و MCMC محاسبه شده و بازه‌های اطمینان HPD به دست آمده‌اند. نتایج در جدول ۵ گزارش شده است. از مقایسه دو طرح سانسور، ملاحظه می‌شود که بازه‌های اطمینان HPD در داده‌های کامل دارای کوچکترین طول و در طرح سانسور ۲ دارای بزرگترین طول می‌باشند.

جدول ۵. نتایج در داده‌های واقعی

حالت کلی			حالت اول			طرح
HPD	گیبز	MLE	HPD	لیندلی	گیبز	
(۰/۳۷۳, ۰/۶۵۲)	۰/۴۸۹	۰/۴۸۱	(۰/۴۰۶, ۰/۶۳۵)	۰/۵۲۳	۰/۵۱۶	کامل
(۰/۳۵۱, ۰/۶۸۸)	۰/۴۸۲	۰/۴۸۱	(۰/۳۸۳, ۰/۶۶۲)	۰/۵۲۱	۰/۵۱۳	۱
(۰/۳۲۸, ۰/۷۰۷)	۰/۵۱۳	۰/۵۱۸	(۰/۳۳۶, ۰/۷۲۲)	۰/۵۴۴	۰/۵۳۷	۲

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحت سانسور فزاینده پیوندی، زمانی که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع لوماکس هستند، برآورد بیزی پارامتر قابلیت اطمینان  $R$  به دست آمده است. در حقیقت مسئله در سه حالت مختلف بررسی شده است. اول، برآورد نقطه‌ای و بازه‌ای بیزی  $R$ ، وقتی که  $X \sim Lo(\theta, \beta)$  و  $Y \sim Lo(\alpha, \beta)$  است. در این حالت چون برآورد بیزی دارای فرم بسته نیست، این برآورد، به دو روش تقریبی لیندلی و گیبز محاسبه شده است. همچنین با استفاده از روش الگوریتم گیبز یک بازه اطمینان HPD در سطح ۹۵٪ برای پارامتر  $R$  به دست آمده است. در حالت دوم، وقتی که پارامتر مشترک  $\beta$  معلوم است، برآورد دقیق بیزی و همچنین بازه اطمینان بیزی به دست می‌آید. در حالت سوم، وقتی که  $X \sim Lo(\theta, \beta_1)$  و  $Y \sim Lo(\alpha, \beta_2)$  است، برآورد تقریبی بیزی و بازه اطمینان HPD با روش گیبز محاسبه شده است. نتایج شبیه‌سازی، بیانگر آن است که برآوردگرهای بیز عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای ماکسیم درست‌نمایی دارند. همچنین در بین برآوردگرهای بیز، بهترین عملکرد به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش متعلق است. علاوه بر این روش تقریبی گیبز نسبت به روش تقریبی لیندلی، عملکرد بهتری دارد. مقایسه بازه‌های اطمینان نیز نشان می‌دهد که بهترین عملکرد متعلق به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش است به طوری که بازه‌های محاسبه شده در این توابع چگالی پیشین، دارای طول کوتاه‌تر و درصد پوشش بیشتری هستند. همچنین، از نتایج شبیه‌سازی، مشاهده می‌شود که با کاهش تعداد داده‌های سانسور شده، مقادیر MSE و طول بازه‌های اطمینان کاهش یافته و مقادیر درصد پوشش در تمامی حالت‌ها افزایش می‌یابد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران مقاله، ویراستار و سردبیر محترم مجله که با نظرات ارزشمند خود در بهبود کیفیت مقاله نقش مهمی داشته‌اند، سپاسگزارند.

## مراجع

شادرخ، ع. و یعقوب زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۸)، برآوردهای E-بیزی و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس، *مجله علوم آماری*، ۱۳، ۴۸۳-۴۹۶.

Ahmadi, K. and Ghafouri, S. (2019), Reliability Estimation in a Multicomponent Stress-Strength Model under Generalized Half-Normal Distribution Based on Progressive type-II Censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **89**, 2505-2548.

Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011), Stress-Strength Reliability of Weibull Distribution Based on Progressively Censored Samples, *SORT*, **35**, 103-124.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*, Boston, MA, USA: Birkhauser.

Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.

Efron, B. (1988), Logistic Regression, Survival Analysis, and the Kaplan-Meier Curve, *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 414-425.

Jha, M. K., Dey, S., Alotaibi, R. M. and Tripathi, Y. M. (2020), Reliability Estimation of a Multicomponent Stress-Strength Model for Unit Gompertz Distribution under Progressive Type II Censoring, *Quality and Reliability Engineering International*, DOI: 10.1002/qre.2610.

Kizilaslan, F. and Nadar, M. (2018), Estimation of Reliability in a Mul-

ticomponent Stress-Strength Model Based on a Bivariate Kumaraswamy Distribution, *Statistical Papers*, **59**, 307-340.

Kohansal, A. (2020), Bayesian and Classical Estimation of  $R = P(Y < X)$  Based on Burr Type XII Distribution under Hybrid Progressive Censored Samples, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **49**, 1043-1081.

Kohansal, A. and Rezakhah, S. (2019), Inference of  $R = P(Y < X)$  For Two-Parameter Rayleigh Distribution Based on Progressively Censored Samples, *Statistics*, **53**, 81-100.

Kohansal, A. (2019), On Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model for a Kumaraswamy Distribution Based on Progressively Censored Sample, *Statistical Papers*, **60**, 2185-2224.

Kundu, D. and Joarder, A. (2006), Analysis of Type-II Progressively Hybrid Censored Data, *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 2509-2528.

Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística*, **3**, 281-288.

Mahmoud, M. A. W., El-Sagheer, R. M., Soliman, A. A. and Abd Allah, A. H. (2016), Bayesian Estimation of  $P[Y < X]$  Based on Record Values From the Lomax Distribution and MCMC Technique, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **15**, 488-510.

Maurya, R. K. and Tripathi, Y. M. (2019) Reliability Estimation in a Multicomponent Stress-Strength Model for Burr XII Distribution under Progressive Censoring, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Accepted.

Shoae, Sh. and Khorram, E. (2016), Statistical Inference of  $R = P(Y < X)$  For Weibull Distribution under Type-II Progressively Hybrid Censored Data, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86**, 3815-3834.

Shoae, Sh. and Khorram, E. (2015), Stress-Strength Reliability of a Two-Parameter Bathtub-Shaped Lifetime Distribution Based on Progressively Censored Samples, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **44**, 5306-5328.

Yadav, A. S., Singh, S. K. and Singh, U. (2019), Bayesian Estimation of Stress-Strength Reliability for Lomax Distribution under Type-II Hybrid Censored Data Using Asymmetric Loss Function, *Life Cycle Reliability and Safety Engineering*, **8**, 257-267.

## **Bayesian Estimation of Stress–Strength Parameter under Progressive Hybrid Censored Sample in Lomax Distribution**

**Kohansal, A.<sup>1</sup>, Alemohammad, N.<sup>2</sup>, Azizzadeh, F.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

<sup>2</sup>Department of Mathematics and Computer Sciences, Shahed University, Tehran, Iran.

<sup>3</sup>Department of Financial Mathematics, Kharazmi University, Teheran, Iran.

**Abstract:** The Bayesian estimation of the stress-strength parameter in Lomax distribution under the progressive hybrid censored sample is considered in three cases. First, assuming the stress and strength are two random variables with a common scale and different shape parameters. The Bayesian estimations of these parameters are approximated by Lindley method and the Gibbs algorithm. Second, assuming the scale parameter is known, the exact Bayes estimation of the stress-strength parameter is obtained. Third, assuming all parameters are unknown, the Bayesian estimation of the stress-strength parameter is derived via the Gibbs algorithm. Also, the maximum likelihood estimations are calculated, and the usefulness of the Bayesian estimations is confirmed, in comparison with them. Finally, the different methods are evaluated utilizing the Monte Carlo simulation and one real data set is analyzed.

**Keywords:** Stress-strength parameter, Lindley's approximation, Lomax distribution, Progressive hybrid censored.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62N01, 62N05, 62F15