

## پیچش توزیع‌های نرمال چندمتغیره و نمایی استاندارد: نظریه و کاربرد

موسی عبدی، محسن مددی و احد جمالی‌زاده

گروه آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰

**چکیده:** در این مقاله، توزیع چندمتغیره آمیخته از توزیع نرمال چندمتغیره و توزیع نمایی استاندارد مورد بررسی قرار می‌گیرد. این توزیع میزان چولگی و کشیدگی بیشتری از توزیع چوله‌نرمال دارد و می‌تواند به عنوان یک پیشنهاد برای برازش داده‌های چندمتغیره با میزان چولگی و کشیدگی بیش از چوله‌نرمال به کار رود که برخلاف توزیع چوله‌نرمال دارای خاصیت بخش‌پذیری نامتناهی است. برخی خواص توزیع شامل تابع مشخصه، تابع مولد گشتاور، توزیع تبدیل‌های آفین و فرم کانونی توزیع، ضرایب چولگی، کشیدگی و مد توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم EM محاسبه شده است. برای بررسی مناسبت مدل، یک مطالعه شبیه‌سازی ارائه و در انتها با تحلیل داده‌های واقعی کارایی مدل مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** الگوریتم EM، پیچش توزیع‌های نرمال چندمتغیره و نمایی استاندارد، فرم کانونی.

## ۱ مقدمه

در میان توزیع‌های آماری، توزیع نرمال چندمتغیره نقش اساسی و پرکاربرد در روش‌های آماری دارد. یکی از برجسته‌ترین خواص توزیع نرمال که مورد توجه آماردانان قرار گرفته، ویژگی تقارن آن است. بسیاری از داده‌ها در علوم مختلف به طور کامل از توزیع نرمال پیروی نمی‌کنند، لذا همواره آماردانان به دنبال توزیع‌های جدید برای برازش به داده‌هایی با ویژگی‌های متفاوت از توزیع نرمال از جمله دم کلفتی، چند مدی و انحراف

از چولگی و کشیدگی بوده‌اند. در سه دهه اخیر توزیع‌های بسیاری معرفی شده‌اند که دارای چگالی احتمال غیر نرمال بوده‌اند و در حالت‌های خاص نیز توزیع نرمال را در بر داشته‌اند، یکی از معروف‌ترین آن‌ها در حالت یک متغیره توسط آزالینی (۱۹۸۵، ۱۹۸۶) معرفی شده و به نام توزیع چوله‌نرمال آزالینی معروف است. نسخه چندمتغیره توزیع چوله‌نرمال توسط آزالینی و دالا واله (۱۹۹۶) و آزالینی و کاپیتانو (۱۹۹۹) معرفی شد. مجموعه کاملی از خانواده توزیع‌های چوله‌نرمال چندمتغیره که در دو دهه اخیر ارائه شده‌اند را می‌توان در آزالینی (۲۰۰۵)، آرلانو واله و آزالینی (۲۰۰۶)، لی و مک لاجان (۲۰۱۳) و آزالینی و کاپیتانو (۲۰۱۴) یافت. بخشی شجاعی و کریمی (۱۳۹۵) یک الگوریتم کارآمد برای تولید نمونه از توزیع چوله‌نرمال بسته با بعد بالا را برای مدل‌بندی داده‌های نامتقارن و چوله در تحلیل بیزی مدل معکوس چوله گاوسی بسته ارائه کرده‌اند. در این مقاله  $\phi_p(\cdot; \mu, \Sigma)$  و  $\Phi_p(\cdot; \mu, \Sigma)$  به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی بردار تصادفی  $p$ -بعدی نرمال با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  است و همچنین  $\phi(\cdot)$  و  $\Phi(\cdot)$  تابع چگالی و تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی نرمال استاندارد یک متغیره هستند.

**نگارستانی و همکاران (۲۰۱۹)** بردار  $p$  متغیره  $\mathbf{Y}$  را دارای توزیع آمیخته میانگین از توزیع نرمال چندمتغیره<sup>۱</sup> (MMMN) می‌نامند، هرگاه از نمایش تصادفی

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\xi} + \delta U + \mathbf{Z}, \quad (۱)$$

پیروی کند، که در آن  $\stackrel{d}{=}$  نماد هم توزیعی،  $\mathbf{Z} \sim N_p(0, \boldsymbol{\Omega})$ ،  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p$  پارامتر مکان،  $U$  یک متغیر تصادفی دلخواه با تابع توزیع تجمعی  $H(\cdot; \nu)$  و مستقل از بردار تصادفی  $\mathbf{Z}$ ،  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)^\top$  بردار پارامتر مربوط به توزیع  $H$  و  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)^\top \in \mathbb{R}^p$  بردار پارامتر انحراف از چولگی و کشیدگی است. این خانواده با نماد  $\mathbf{Y} \sim \text{MMMN}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \delta; H)$  نمایش داده می‌شود. در این مقاله از نمایش تصادفی دیگری برای راحت‌تر شدن محاسبات استفاده می‌شود. تفاوت این دو مدل در توزیع نرمال پایه و نمایش تصادفی آن‌هاست. بردار  $p$  متغیره  $\mathbf{Y}$  دارای توزیع آمیخته میانگین از توزیع نرمال چندمتغیره نامیده می‌شود، هرگاه از نمایش تصادفی

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\xi} + \omega(\delta U + \mathbf{Z}), \quad (۲)$$

<sup>۱</sup>Multivariate Mean Mixture of Normal Distribution

پیروی کند، که در آن  $\mathbf{Z} \sim N_p(0, \bar{\Omega} - \delta\delta^T)$ ، متغیر تصادفی  $U$  دارای توزیع دلخواه مستقل از  $\mathbf{Z}$  همانند فوق تعریف می‌شود و بردار  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)^T$  پارامتر انحراف از چولگی و کشیدگی است که در آن خاصیت  $1 < \delta_i < \infty$  برای  $i = 1, \dots, p$  برقرار است. در نمایش‌های تصادفی فوق ماتریس کوواریانس  $\Omega$  و ماتریس همبستگی  $\bar{\Omega}$  معین مثبت هستند. ماتریس  $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_p)$  یعنی مقادیر انحراف  $\omega > 0$  یک ماتریس قطری تشکیل شده از جذر مقادیر قطر اصلی  $\Omega$  معیارها است که  $\Omega = \omega\bar{\Omega}\omega$ . در اینجا منظور از نماد  $\odot$  ضرب درایه به درایه دو ماتریس است. با توجه به نمایش تصادفی (۲)، نمایش سلسله مراتبی برای خانواده MMMN عبارت است از:

$$\mathbf{Y}|(U = u) \sim N_p(\xi + \omega\delta u, \Omega - \omega\delta\delta^T\omega), \quad U \sim H(\cdot; \nu). \quad (3)$$

در نمایش‌های تصادفی (۱) و (۲)، اگر متغیر تصادفی  $U$  یک متغیر تصادفی با چگالی چوله باشد، بردار تصادفی  $\mathbf{Y}$  نیز دارای چگالی چوله خواهد بود. در این خانواده با تغییر پارامتر  $\delta$  می‌توان چولگی و کشیدگی را تنظیم کرد. در نمایش تصادفی (۲)، اگر  $\delta = 0$  باشد، خانواده MMMN به توزیع نرمال چندمتغیره تقلیل می‌یابد، همچنین اگر  $U$  دارای توزیع نرمال بریده در بازه  $(0, \infty)$  باشد، به سادگی می‌توان نشان داد توزیع چوله نرمال آزالینی حاصل می‌شود. در اینجا فرض می‌شود  $U$  دارای توزیع نمایی استاندارد است و مدل را پیش از توزیع‌های نرمال چندمتغیره و نمایی استاندارد  $^1$   $(CMNE)$  نامیده و با نماد  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  نشان داده می‌شود. نگارستانی و همکاران (۲۰۱۹) توزیع  $CMNE$  را در حالت یک متغیره بیان و بسیاری از خواص آن را مورد بررسی قرار داده‌اند که دارای چگالی احتمال

$$f_Z(z; \xi, \omega^2, \lambda) = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\omega|\lambda|} e^{-\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}z + \frac{1}{\lambda^2}} \Phi\left(\frac{\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}z - 1}{|\lambda|}\right), \quad (4)$$

است، که در آن  $z = \frac{y - \xi}{\omega}$ ،  $y \in \mathbb{R}$ ،  $\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \neq 0$ ،  $\xi \in \mathbb{R}$  و  $\omega > 0$ .

در این مقاله، مطالعه حالت چندمتغیره توزیع  $CMNE$  با انگیزه‌های زیر صورت می‌گیرد:  
 الف) دومینیکو-مولینا و روچا-آرتگا (۲۰۰۷) ثابت کردند که متغیر تصادفی چوله نرمال آزالینی بخش پذیر نامتناهی<sup>۲</sup> نیست، اما متغیر تصادفی  $CMNE$  بخش پذیر نامتناهی است (اثبات در قضیه ۱).  
 ب) توزیع چوله-t دارای کارایی بهتر از توزیع چوله نرمال آزالینی است که تابع مولد گشتاور ندارد و محاسبه

<sup>1</sup>Convolution of Multivariate Normal and Standard Exponential Distributions

<sup>2</sup>Infinite divisibility

تابع مشخصه آن دشوار بوده و دارای فرم بسته نیست (کیم و جنتون، ۲۰۰۱)، اما تابع مشخصه و تابع مولد گشتاور توزیع  $CMNE$  موجود و دارای فرم بسته است.

(ج) محاسبه گشتاورهای توزیع نمایی ساده‌تر از توزیع نرمال بریده است، لذا با توجه به نمایش تصادفی (۲)، محاسبه گشتاورهای توزیع  $CMNE$  نیز راحت‌تر خواهد بود.

(د) براساس لین و همکاران (۲۰۰۷) و لی و مک لاجان (۲۰۱۱، ۲۰۱۴)، در برآورد پارامترهای توزیع‌های چوله‌نرمال و چوله- $t$  با استفاده از الگوریتم  $EM$  فرم بسته برای روابط درستنمایی وجود ندارد، اما در توزیع  $CMNE$  روابط دارای فرم بسته هستند. تعداد پارامترهای توزیع  $CMNE$  نسبت به بسیاری از توزیع‌ها کمتر است، به عنوان مثال توزیع چوله- $t$  دارای تعداد پارامتر بیشتر از توزیع جدید و لذا نیاز به محاسبات پیچیده‌تری برای محاسبه برآوردگرها است. شایان ذکر است تعداد پارامترهای توزیع چوله‌نرمال و توزیع  $CMNE$  یکسان است اما برآورد پارامترها در توزیع جدید راحت‌تر است. (ه) مقادیر چولگی و کشیدگی توزیع  $CMNE$  بیش از توزیع چوله‌نرمال است و گستره وسیع‌تری از مقادیر چولگی و کشیدگی را شامل می‌شود. (قضیه ۸)

در ادامه، تابع چگالی احتمال توزیع  $CMNE$  و برخی خواص دیگر توزیع از جمله چهار گشتاور اول، توزیع تبدیل‌های آفین و فرم کانونی مدل که در نظریه توزیع‌های چندمتغیره کاربردهای فراوانی دارند، ارائه شده‌اند. با استفاده از فرم کانونی، ضرایب چولگی، کشیدگی و مد توزیع محاسبه می‌شوند. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل، با استفاده از الگوریتم  $EM$  محاسبه می‌شود. در انتها برای بررسی کارایی مدل و روش‌های ارائه شده یک مطالعه شبیه‌سازی ارائه و دو مثال واقعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

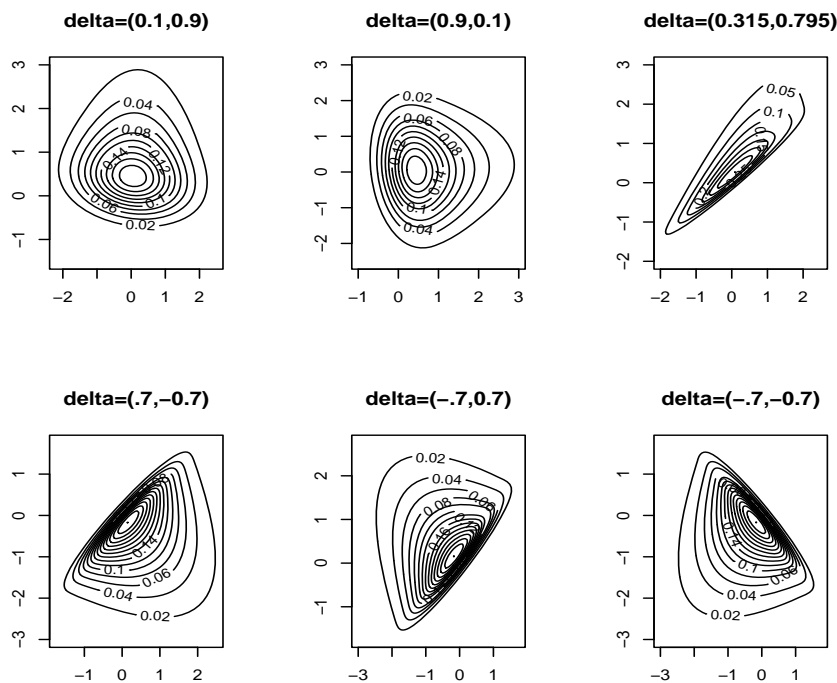
## ۲ پیچش توزیع نرمال چندمتغیره و نمایی استاندارد

در نمایش تصادفی (۲)، اگر  $U$  دارای توزیع نمایی استاندارد باشد، از نمایش سلسله مراتبی (۳)، با استفاده از انتگرال‌گیری روی متغیر  $u$  تابع چگالی توزیع  $CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  به صورت

$$f_{CMNE_p}(\mathbf{y}; \xi, \Omega, \delta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\eta} \exp\left(\frac{A^2}{\eta}\right) \phi_p(\mathbf{y}; \xi, \Sigma_Y) \Phi(A), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \quad (5)$$

است، که در آن  $\eta = \sqrt{\delta^T \omega \Sigma_Y^{-1} \omega \delta}$ ،  $A = \eta^{-1} [\delta^T \omega \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{y} - \xi) - 1]$ ،  $\Sigma_Y = \Omega - 1$ ، شکل ۱ منحنی کانتور برای توزیع  $CMNE$  در حالت دو بعدی با مقادیر مختلف برای  $\omega \delta \delta^T \omega$ .

پارامتر  $\delta$  و مقادیر  $\xi = (0, 0)^T$  و  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  را نمایش می‌دهد و نمایانگر گستره وسیعی از انواع مختلف انحراف از نرمال بودن چه از لحاظ چولگی و چه از لحاظ کشیدگی با مقادیر مختلف پارامتر  $\delta$  است. برای سادگی و استفاده‌های کاربردی در آینده حالت نرمالیزه شده توزیع  $CMNE$  معرفی می‌شود.



شکل ۱. منحنی کانتور برای توزیع  $CMNE$  در حالت دو بعدی با مقادیر مختلف برای  $\delta$ .

ملاحظه ۱. فرض کنید  $Y \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$ ، برای تبدیل  $X = \omega^{-1}(Y - \xi)$ ، به سادگی می‌توان نشان داد، نمایش تصادفی  $X \stackrel{d}{=} \delta U + Z$  دارای نمایش سلسله مراتبی  $U \sim EXP(1)$  و  $X|(U = u) \sim N_p(\delta u, \bar{\Omega} - \delta \delta^T)$  است. متغیر  $X$  دارای توزیع نرمالیزه شده  $CMNE$  نامیده و به صورت  $X \sim CMNE_p(0, \bar{\Omega}, \delta)$  نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱. بردار تصادفی  $Y$  بخش‌پذیر نامتناهی نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $n \geq 1$  بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع  $Y_1, \dots, Y_n$  موجود باشند بطوری که  $Y \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_n$ .

قضیه ۱. توزیع  $CMNE$  دارای خاصیت بخش‌پذیری نامتناهی است.

برهان: بدون از دست دادن کلیت موضوع، فرض کنید  $\mathbf{X} \sim CMNE_p(0, \bar{\Omega}, \delta)$ . در ادامه تعریف کنید  $\mathbf{Z}_i \sim N_p(0, \frac{1}{n}(\bar{\Omega} - U_i))$  و  $U_i \sim Gamma(\alpha = \frac{1}{n}, \beta = 1)$  که در آن  $\mathbf{X}_i \stackrel{d}{=} \delta U_i + \mathbf{Z}_i$  (که  $\delta \delta^T$  مستقل از هم هستند و لذا  $\sum_{i=1}^n U_i \sim EXP(1)$  و  $\sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \sim N_p(0, \bar{\Omega} - \delta \delta^T)$  در نتیجه  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n$  بنا بر این توزیع  $CMNE$  دارای خاصیت بخش پذیری نامتناهی است.

لم ۱. اگر  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$ ، تابع مشخصه و تابع مولد گشتاور  $\mathbf{Y}$  به ترتیب عبارتند از:

$$C_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{i\mathbf{t}^T \xi + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma_{\mathbf{Y}} \mathbf{t}}}{1 - i\mathbf{t}^T \omega \delta}; \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p,$$

$$M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \frac{e^{\mathbf{t}^T \xi + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \Sigma_{\mathbf{Y}} \mathbf{t}}}{1 - \mathbf{t}^T \omega \delta}; \quad \mathbf{t}^T \omega \delta \neq 1.$$

برهان: برای محاسبه  $C_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = E[e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{Y}}]$  و  $M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = E[e^{\mathbf{t}^T \mathbf{Y}}]$  با داشتن تابع مشخصه و تابع مولد گشتاور توزیع نمایی استاندارد با استفاده از نمایش تصادفی (۲) به راحتی حاصل می‌شوند.

قضیه ۲. فرض کنید  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$ ، چهارگشتاور اول توزیع عبارتند از:

$$M_1(\mathbf{Y}) = \xi + \omega \delta,$$

$$M_2(\mathbf{Y}) = \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \delta^T \omega + \omega \delta \otimes \xi^T + (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega),$$

$$M_3(\mathbf{Y}) = \xi \xi^{\rightarrow} \otimes \xi + \xi \xi^T \otimes \omega \delta + \xi \delta^T \omega \otimes \xi + \omega \delta \otimes \xi \xi^T + (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) \otimes \xi$$

$$+ \xi \otimes (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) + \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) \otimes \xi^T + \omega \delta \otimes \Sigma_{\mathbf{Y}}$$

$$+ \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{Y}}) \delta^T \omega + (\mathbf{I}_p \otimes \omega \delta) [\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega],$$

$$M_4(\mathbf{Y}) = \xi \xi^T \otimes \xi \xi^T + \xi \xi^T \otimes \xi (\omega \delta)^T + \xi \xi^T \otimes (\omega \delta) \xi^T + \xi (\omega \delta)^T \otimes \xi \xi^T$$

$$+ \xi \xi^T \otimes (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) + (\xi \otimes \xi) (\text{vec}(\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega))^T$$

$$+ \xi \otimes (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) \otimes \xi^T + \xi \otimes \omega (M_3)^T (\omega \otimes \omega) + (\omega \delta) \xi^T \otimes \xi \xi^T$$

$$+ \xi^T \otimes (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) \otimes \xi + \xi^T \otimes \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) \otimes \xi^T$$

$$+ \xi^T \otimes (\omega \otimes \omega) M_3 \omega + (\Sigma_{\mathbf{Y}} + 2\omega \delta \delta^T \omega) \otimes \xi \xi^T + \omega (M_3)^T (\omega \otimes \omega) \otimes \xi$$

$$+ (\omega \otimes \omega) M_3 \omega \otimes \xi^T + (\omega \otimes \omega) M_4 (\omega \otimes \omega),$$

که در آن با فرض  $\Sigma_{\mathbf{X}} = \bar{\Omega} - \delta\delta^T$

$$\begin{aligned} M_{\Upsilon} &= \delta \otimes \Sigma_{\mathbf{X}} + \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{X}})\delta^T + (\mathbf{I}_p \otimes \delta)\Sigma_{\mathbf{X}} + \epsilon(\mathbf{I}_p \otimes \delta)(\delta \otimes \delta^T), \\ M_{\Upsilon} &= (\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{U}_{p,p})(\Sigma_{\mathbf{X}} \otimes \Sigma_{\mathbf{X}}) + \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{X}})(\text{vec}(\Sigma_{\mathbf{X}}))^T \\ &+ \Upsilon[\delta \otimes \delta^T \otimes \Sigma_{\mathbf{X}} + \delta \otimes \Sigma_{\mathbf{X}} \otimes \delta^T + \Sigma_{\mathbf{X}} \otimes \delta \otimes \delta^T + \delta^T \otimes \Sigma_{\mathbf{X}} \otimes \delta \\ &+ \delta^T \otimes \text{vec}(\Sigma_{\mathbf{X}}) \otimes \delta^T + (\delta \otimes \delta)(\text{vec}(\Sigma_{\mathbf{X}}))^T] + \Upsilon\delta\delta^T \otimes \delta\delta^T. \end{aligned}$$

برهان: از مشتق تابع مولد گشتاور و قرار دادن  $t = 0$ ، می‌توان چهار گشتاور اول حول مبدأ مدل  $CMNE$  را مشابه با جنتون و همکاران (۲۰۰۱) بدست آورد. در اینجا  $\otimes$  نماد ضرب کرونگر،  $\text{vec}(\mathbf{A}) = (\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_n^T)^T$  برای ماتریس  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) : m \times n$  به صورت  $\text{vec}(\mathbf{A}) = (\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_n^T)^T$  است (گراهام، ۱۹۸۱؛ کولو و وون روزن، ۲۰۰۵؛ اسکات، ۲۰۱۶).

فرع ۱. اگر  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  با استفاده از قضیه ۲، بردار میانگین و ماتریس کوواریانس بردار تصادفی  $\mathbf{Y}$  به صورت  $E(\mathbf{Y}) = \xi + \omega\delta$  و  $\text{Var}(\mathbf{Y}) = \Omega$  حاصل می‌شوند و اگر  $\mathbf{X} \sim CMNE_p(0, \bar{\Omega}, \delta)$ ، آنگاه  $E(\mathbf{X}) = \delta$  و  $\text{Var}(\mathbf{X}) = \bar{\Omega}$ .

قضیه ۳. فرض کنید  $\mathbf{Y}_1 \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  و  $\mathbf{Y}_2 \sim N_p(\mu, \Sigma)$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \sim CMNE_p(\xi_{\mathbf{Y}}, \Omega_{\mathbf{Y}}, \delta_{\mathbf{Y}})$  که در آن  $\xi_{\mathbf{Y}} = \xi + \mu$ ،  $\Omega_{\mathbf{Y}} = \Omega + \Sigma$  و  $\delta_{\mathbf{Y}} = \omega_{\mathbf{Y}}^{-1}\omega\delta$  و  $\omega_{\mathbf{Y}} = (\Omega_{\mathbf{Y}} \odot \mathbf{I}_p)^{1/2}$ .

برهان: از حاصل ضرب توابع مولد گشتاور توزیع نرمال چندمتغیره و مدل  $CMNE$  نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۴. اگر  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  و  $\mathbf{A}$  یک ماتریس  $p \times h$  رتبه کامل باشد که در آن  $h \leq p$  و  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^h$ ، آنگاه  $\mathbf{X} = \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \sim CMNE_h(\xi_{\mathbf{X}}, \Omega_{\mathbf{X}}, \delta_{\mathbf{X}})$  که در آن  $\xi_{\mathbf{X}} = \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \xi$ ،  $\Omega_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \Omega \mathbf{A}$  و  $\delta_{\mathbf{X}} = \omega_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{A}^T \omega \delta$ ،  $\omega_{\mathbf{X}} = (\Omega_{\mathbf{X}} \odot \mathbf{I}_h)^{1/2}$ .

<sup>1</sup>The Permutation Matrix

برهان: تابع مولد گشتاور بردار تصادفی  $\mathbf{X}$  را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= E[e^{\mathbf{t}^T(\mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{Y})}] = e^{\mathbf{t}^T \mathbf{c}} M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{A} \mathbf{t}) \\ &= e^{\mathbf{t}^T \mathbf{c}} \frac{e^{\mathbf{t}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{A}^T (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{A} \mathbf{t}}}{1 - \mathbf{t}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\delta}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{t}^T \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T (\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{X}}^T \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}) \mathbf{t}}}{1 - \mathbf{t}^T \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{X}}}. \end{aligned}$$

نوشت و اثبات کامل است.

در اینجا مشابه با آزالینی و کاپیتانو (۲۰۱۴) ثابت می‌شود، اگر  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(0, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$  و متغیر  $\mathbf{Y}$  به تعدادی بردار تصادفی افزاز شود، موقعی استقلال بین مؤلفه‌های آن برقرار می‌شود که حداکثر یک مؤلفه از توزیع  $CMNE$  پیروی و مابقی دارای توزیع نرمال باشند، به عبارت دیگر موقعی استقلال بین مؤلفه‌ها رخ می‌دهد که تنها یک مؤلفه از پارامتر چولگی  $\boldsymbol{\delta}$  غیر صفر و مابقی صفر باشند.

لم ۲. برای هر  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ،  $\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^p$ ،  $\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^q$ ، به طوری که  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \neq 0$  و ماتریس‌های متقارن معین مثبت  $\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2$ ، کمیت‌های  $a, c \in \mathbb{R}$ ،  $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{p+q}$  و ماتریس  $\boldsymbol{\Sigma}$  وجود ندارد که برای هر  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T$  و  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^q$ ،  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^p$  در تساوی زیر صدق کند

$$\begin{aligned} e^{(a_1 + \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_1)^T} \phi_p(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1; \boldsymbol{\Sigma}_1) \Phi(a_1 + \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_1) \times e^{(a_2 + \mathbf{b}_2^T \mathbf{x}_2)^T} \phi_q(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2; \boldsymbol{\Sigma}_2) \\ \Phi(a_2 + \mathbf{b}_2^T \mathbf{x}_2) = c e^{(a + \mathbf{b}^T \mathbf{x})^T} \phi_{p+q}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma}) \Phi(a + \mathbf{b}^T \mathbf{x}). \end{aligned}$$

برهان: با استفاده از روش ارائه شده در گزاره ۵.۵ از آزالینی و کاپیتانو (۲۰۱۴) نتیجه حاصل می‌شود. لم ۲ به این معنی است که با توجه به چگالی توزیع  $(\delta)$  حاصلضرب دو چگالی از توزیع  $CMNE$  را نمی‌توان به صورت یک توزیع از همین خانواده نوشت و این یعنی در حالت کلی استقلال بین مؤلفه‌های افزاز شده برقرار نیست. بنابراین اگر بردار تصادفی  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(0, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$  را به  $h$  بلوک به صورت  $\mathbf{Y}^T = (\mathbf{Y}_1^T, \dots, \mathbf{Y}_h^T)$  افزاز کنیم، آنگاه برای برقراری استقلال بین مؤلفه‌ها لازم است پارامترهای توزیع توأم این  $h$  مؤلفه ساختاری به صورت  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\boldsymbol{\Omega}_{11}, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{hh})$  و  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_h)^T$  داشته باشند. پس تابع چگالی توأم  $\mathbf{Y}$  می‌تواند به صورت حاصلضرب  $h$  چگالی حاشیه‌ای نوشته شود. بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض شده  $\boldsymbol{\xi} = 0$ .



**قضیه ۵.** فرض کنید  $Y \sim CMNE_p(0, \Omega, \delta)$  باشد. تبدیل خطی

$$X = A^T Y = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_h^T \end{bmatrix} Y,$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $A$  یک ماتریس ناویژه  $p \times p$ ،  $A = (A_1, \dots, A_h)$  و  $A_i$  ها افزایشهای  $A$  باشند. آنگاه  $X_1, \dots, X_h$  بردارهای تصادفی توأماً مستقل اند اگر و فقط اگر شرایط زیر همزمان رخ دهند:

- (الف) برای هر  $j = 1, \dots, h$  داشته باشیم  $A_i^T \Omega A_j = 0$ ،  $i \neq j$
- (ب) برای حداکثر یک  $i = 1, \dots, h$  داشته باشیم  $A_i^T \omega \delta \neq 0$ .

**برهان:** برای بررسی شرط کافی، فرض کنید شرط (الف) رخ دهد، با استفاده از قضیه ۴ داریم:

$$\Omega_X = \text{diag}(A_1^T \Omega A_1, \dots, A_h^T \Omega A_h),$$

$$\delta_X = \omega_X^{-1} A^T \omega \delta = \omega_X^{-1} \begin{bmatrix} A_1^T \omega \delta \\ \vdots \\ A_h^T \omega \delta \end{bmatrix}.$$

از رابطه دوم نتیجه می‌شود که اگر شرط (ب) رخ دهد تنها یک مؤلفه از بین  $h$  مؤلفه  $\delta_X$  غیر صفر خواهد بود. لذا  $X$  می‌تواند به  $h$  مؤلفه مستقل از هم افزایش شود که تنها یک مؤلفه آن انحراف از نرمالیتی دارد. برای اثبات شرط لازم، اگر شرط استقلال افزایشهای  $X_1, \dots, X_h$  برقرار باشد، آنگاه چگالی توأم  $X$  برابر با حاصلضرب  $h$  چگالی حاشیه‌ای است و لذا با توجه به لم ۲ و توضیحات بعد از آن تساوی موقعی برقرار است که تنها یک مؤلفه از  $\delta_X$  غیر صفر و  $\Omega_X$  یک ماتریس قطری بلوکی باشد. از این پس، بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌شود برای وقوع استقلال بین مؤلفه‌ها تنها درایه اول  $\delta$  غیر صفر باشد.

**قضیه ۶.** اگر  $Y \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$ ، تبدیل خطی  $Z^* = A_*(Y - \xi)$  برای بردار تصادفی  $Y$  وجود دارد به طوری که  $Z^* \sim CMNE_p(0, I_p, \delta_{Z^*})$ ، که در آن حداکثر یک مؤلفه از  $\delta_{Z^*}$  غیر صفر است و لذا  $\delta_{Z^*} = (\delta_*, 0, \dots, 0)^T$  که در آن  $\delta_{Z^*} = (\delta^T \Omega^{-1} \delta)^{1/2}$ .

برهان: در تعریف مدل  $CMNE$  فرض شد که  $\Omega$  و  $\bar{\Omega}$  ماتریس‌های معین مثبت هستند که  $\Omega = \omega \bar{\Omega} \omega$ . لذا با توجه به خواص ماتریس‌های معین مثبت، ماتریس  $\bar{\Omega}$  یک ماتریس معین مثبت ناویژه است اگر و تنها اگر برخی ماتریس‌های معکوس پذیر (ناویژه) مانند  $C$  وجود داشته باشد که  $\bar{\Omega} = C^T C$ . حال اگر  $\delta \neq 0$ ، یک ماتریس متعامد مانند  $P$  می‌توان پیدا کرد که ستون اول آن متناسب با  $C \bar{\Omega}^{-1} \delta$  باشد، در صورتیکه برای  $\delta = 0$  قرار می‌دهیم  $P = I_p$ . در نهایت با تعریف  $A_* = (C^{-1} P)^T \omega^{-1}$ ، با استفاده از قضیه ۴ ثابت می‌شود  $Z^* \sim CMNE_p(0, I_p, \delta_{Z^*})$  که در آن  $Z^* = A_*(Y - \xi)$  و  $\delta_{Z^*} = (\delta_*^T \bar{\Omega}^{-1} \delta)^{1/2}$  و  $\delta_* = (\delta_*, 0, \dots, 0)^T$ .

متغیر  $Z^*$  که متغیر کانونی نامیده می‌شود، شامل  $p$  مؤلفه مستقل است، لذا توزیع توأم مؤلفه‌های  $Z^*$  با ضرب  $p - 1$  چگالی نرمال استاندارد و حداکثر یک مؤلفه غیر نرمال  $CMNE_1(0, 1, \delta_*)$  حاصل می‌شود؛ یعنی چگالی  $Z^*$  به صورت

$$f_{Z^*}(\mathbf{z}) = f_{Z^*_1}(z_1) \prod_{i=2}^p \phi(z_i), \quad (6)$$

بدست می‌آید، که در آن  $Z^*_1 \sim CMNE_1(0, 1, \delta_*)$  با چگالی (۴) است. برای آشنایی با حالت یک متغیره توزیع  $CMNE$  به نگارستانی و همکاران (۲۰۱۹) مراجعه شود.

ملاحظه ۲. قضیه ۶ فقط وجود فرم کانونی را بیان می‌کند و نحوه انتخاب آن بیان نشده است. برای یافتن  $A_*$  مناسب در تبدیل  $Z^* = A_*(Y - \xi)$ ، کافی است  $A_*$  طوری انتخاب شود که در دو شرط  $A_*^T \Omega A_* = I_p$  و  $A_*^T \omega \delta = \delta_{Z^*} = (\delta_*^T \bar{\Omega}^{-1} \delta)^{1/2}$  صدق کند، که در آن  $\delta_* = (\delta_*^T \bar{\Omega}^{-1} \delta)^{1/2}$ .

قضیه ۷. فرض کنید  $Y \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$ ، مد توزیع که یکتاست به صورت

$$M_* = \xi + \frac{m_*^*}{\delta_*} \omega \delta,$$

است، که در آن  $\delta_* = (\delta_*^T \bar{\Omega}^{-1} \delta)^{1/2}$  و  $m_*^*$  مد توزیع یک متغیره  $CMNE_1(0, 1, \delta_*)$  است.

برهان: ابتدا برای فرم کانونی  $Z^* \sim CMNE_p(0, I_p, \delta_{Z^*})$  مد توزیع محاسبه می‌شود. با مساوی

صفر قرار دادن گرادیان چگالی  $f_{Z^*}(\mathbf{z})$  در (۶) می‌توان مد توزیع را بدست آورد، به عبارتی با حل معادلات

$$\frac{\partial f_{Z^*}(z_1)}{\partial z_1} = 0, \quad z_i f_{Z^*}(z_1) = 0, \quad i = 2, \dots, p.$$

نسبت به  $z_1, \dots, z_p$  مد توزیع در فرم کانونی بدست آورده می‌شود.  $p - 1$  معادله آخر هنگامی برقرار است که  $z_i = 0$ ، اما معادله اول منجر به یک جواب یکتا می‌شود که با  $m_0^*$  نشان داده می‌شود که مد توزیع در حالت یک متغیره  $CMNE_1(0, 1, \delta_*)$  است. بنابراین برای بردار تصادفی  $\mathbf{Z}^*$  مد عبارت است از:

$$\mathbf{M}_0^* = (m_0^*, 0, \dots, 0)^\top = \frac{m_0^*}{\delta_*} \delta_{Z^*}.$$

با توجه به قضیه ۶، می‌توان نوشت  $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\xi} + \omega \mathbf{C}^\top \mathbf{P} \mathbf{Z}_*$  و  $\delta_{Z^*} = \mathbf{P}^\top \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \delta$ . حال چون مد نسبت به تبدیل‌های آفین پایاست، مد برای بردار تصادفی  $\mathbf{Y}$  عبارت است از:

$$\mathbf{M}_0 = \boldsymbol{\xi} + \omega \mathbf{C}^\top \mathbf{P} \frac{m_0^*}{\delta_*} \delta_{Z^*} = \boldsymbol{\xi} + \frac{m_0^*}{\delta_*} \omega \mathbf{C}^\top \mathbf{P} \mathbf{P}^\top \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \delta = \boldsymbol{\xi} + \frac{m_0^*}{\delta_*} \omega \delta.$$

دقت شود که مشتق تابع چگالی احتمال یک متغیره (۴)، عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{Z^*}(z; \xi, \omega^\top, \lambda)}{\partial z} &= \frac{\sqrt{1 + \lambda^\top}}{\omega |\lambda|} e^{-\frac{\sqrt{1 + \lambda^\top}}{\lambda} z + \frac{1}{\lambda^\top}} \left[ -\frac{\sqrt{1 + \lambda^\top}}{\lambda} \Phi\left(\frac{\lambda \sqrt{1 + \lambda^\top} z - 1}{|\lambda|}\right) \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda \sqrt{1 + \lambda^\top}}{|\lambda|} \phi\left(\frac{\lambda \sqrt{1 + \lambda^\top} z - 1}{|\lambda|}\right) \right]. \end{aligned}$$

یکتایی مد توزیع در حالت یک متغیره در گزاره ۱۰۳ از نگارستانی و همکاران (۲۰۱۹) بررسی شده است.

قضیه ۸. اگر  $\mathbf{Y} \sim CMNE_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \delta)$ ، آنگاه ضرایب چولگی و کشیدگی چندمتغیره تعریف شده توسط **ماریا** (۱۹۷۰)، بترتیب  $\beta_{1,p} = 4\delta_*^\epsilon$  و  $\beta_{2,p} = 6\delta_*^\epsilon + 3$  هستند، که در آن‌ها  $\delta_* = (\delta^\top \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \delta)^{1/2}$ . همچنین  $0 < \beta_{1,p} < 4$  و  $0 < \gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - 3 < 6$ .

برهان: اگر  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{Y}$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین  $\boldsymbol{\mu}$  و واریانس  $\boldsymbol{\Delta}$  باشند، آنگاه

ضرایب چولگی و کشیدگی چندمتغیره ماردیا به ترتیب به صورت

$$\beta_{1,p} = E\{[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})]^3\}, \quad (7)$$

$$\beta_{2,p} = E\{[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})]^2\}. \quad (8)$$

هستند که نسبت به تبدیل‌های مکان و مقیاس پایا نیز هستند. همان‌طور که در قضیه‌های ۴ و ۶ اثبات شد، توزیع  $CMNE$  نسبت به تبدیل آفین و لذا تبدیل خطی پایاست و دارای خاصیت کانونی است. بنابراین برای محاسبه ضرایب (۷) و (۸) می‌توان از فرم کانونی توزیع استفاده کرد. بنابراین اگر  $\mathbf{X}^*$  و  $\mathbf{Y}^*$  دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع از  $CMNE_p(0, \mathbf{I}_p, \delta_{Z^*})$  باشند، با قرار دادن  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}^*) = E(\mathbf{Y}^*) = \delta_{Z^*}$  و  $\boldsymbol{\Delta} = \text{Var}(\mathbf{X}^*) = \text{Var}(\mathbf{Y}^*) = \mathbf{I}_p$  با مقداری محاسبات ماتریسی داریم:

$$\begin{aligned} \beta_{1,p} &= E\{[(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mathbf{Y}^* - \boldsymbol{\mu})]^3\} \\ &= \left(E\left[\frac{Z_1^* - \delta_*}{\sqrt{\text{Var}(Z_1^*)}}\right]^3\right)^2 \\ &= (\gamma_1^*)^2 = 4\delta_*^6, \end{aligned}$$

به همین شیوه با مقداری محاسبات ماتریسی ضریب کشیدگی ماردیا نیز به صورت

$$\begin{aligned} \beta_{2,p} &= E\{[(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu})]^2\} \\ &= E\left[\frac{Z_1^* - \delta_*}{\sqrt{\text{Var}(Z_1^*)}}\right]^4 \\ &= 6\delta_*^4 + 3 \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. بنابراین ضریب کشیدگی به صورت  $\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - 3 = \gamma_2^* = 6\delta_*^4$  بدست می‌آید، که در آن  $Z_1^*$  متغیر تصادفی یک بعدی از توزیع  $CMNE_1(0, 1, \delta_*)$  با ضریب چولگی  $\gamma_1^* = 4\delta_*^3$  و ضریب کشیدگی  $\gamma_2^* = 6\delta_*^4$  و  $\text{Var}(Z_1^*) = 1$  است و حدود ضرایب در حالت یک متغیره به صورت  $2 < \gamma_1^* < 6$  و  $-2 < \gamma_2^* < 6$  هستند (نگارستانی و همکاران، ۲۰۱۹).

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضرایب چولگی و کشیدگی توزیع  $CMNE$  نسبت به توزیع چوله‌نرمال چندمتغیره آزالینی که به ترتیب مقادیری در بازه‌های  $(0, 0/990)$  و  $(0, 0/869)$  را اختیار می‌کند، دارای

عرض بیشتری است (آزالینی و کاپیتانو، ۲۰۱۴). این به معنای انعطاف پذیری بیشتر توزیع جدید نسبت به توزیع چوله‌نرمال در برازش داده‌های با مقادیر چولگی و کشیدگی بیشتر است.

قضیه ۹. اگر  $Y \sim CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  و  $U$  دارای توزیع نمایی استاندارد باشد، آنگاه

$$U|Y = y \sim TN(\eta^{-1}A, \eta^{-\nu}, (\circ, \infty)),$$

که در آن  $TN(a, b, (\circ, \infty))$  توزیع نرمال بریده در بازه  $(\circ, \infty)$  است. بعلاوه برای  $k = 1, 2, \dots$  داریم

$$\begin{aligned} E[U|Y = y] &= \eta^{-1} \left( A + \frac{\phi(A)}{\Phi(A)} \right), \\ E[U^k|Y = y] &= A\eta^{-1} E[U^{k-1}|Y = y] + (k-1)\eta^{-\nu} E[U^{k-2}|Y = y] \end{aligned}$$

برهان: این قضیه با استفاده از قضیه بیز به سادگی اثبات می‌شود.

### ۳ برآورد پارامترها با الگوریتم EM

فرض کنید  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  باشد. با در نظر گرفتن نمایش تصادفی (۲) برای بردارهای تصادفی  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )، برای استفاده از الگوریتم EM، اگر  $(Y_i, U_i)$  داده کامل فرض شود که  $Y_i$  داده مشاهده شده و  $U_i$  داده گم شده باشد، آنگاه توزیع  $Y_i$  به صورت سلسله مراتبی به صورت

$$Y_i|U_i = u_i \stackrel{iid}{\sim} N_p(\xi + \omega\delta u_i, \Sigma_Y) \quad \text{و} \quad U_i \stackrel{iid}{\sim} EXP(1), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

است، که در آن نماد  $\stackrel{iid}{\sim}$  استقلال متغیرها را نشان می‌دهد. حال فرض کنید  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  تحقق نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $CMNE_p(\xi, \Omega, \delta)$  باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f(y_i, u_i) = f(y_i|u_i)f(u_i).$$

با توجه به (۹)، اگر قرار داده شود  $\theta = (\xi, \Omega, \delta)$ ، تابع درستنمایی نمونه کامل بدون در نظر گرفتن بخش‌های ثابت به صورت

$$\begin{aligned} \ell_c(\theta) &= -\frac{n}{\nu} \log |\Sigma_Y| - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \xi)^\top \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{y}_i - \xi) \\ &+ \alpha^\top \Sigma_Y^{-1} \sum_{i=1}^n u_i (\mathbf{y}_i - \xi) - \frac{1}{\nu} \alpha^\top \Sigma_Y^{-1} \alpha \sum_{i=1}^n u_i^2, \end{aligned}$$

است، که در آن  $\alpha = \omega \delta$  با توجه به قضیه ۹ فرض کنید

$$\widehat{E}_{i^*}^{(k)} = E[U_i | \mathbf{Y}_i = \mathbf{y}_i, \widehat{\theta}^{(k)}] = \frac{1}{\widehat{\eta}^{(k)}} \left( \widehat{A}_i^{(k)} + \frac{\phi(\widehat{A}_i^{(k)})}{\Phi(\widehat{A}_i^{(k)})} \right), \quad (10)$$

$$\widehat{E}_{i^*}^{(k)} = E[U_i^2 | \mathbf{Y}_i = \mathbf{y}_i, \widehat{\theta}^{(k)}] = \frac{1}{\widehat{\eta}^{(k)^2}} \left[ \widehat{A}_i^{(k)^2} + \widehat{A}_i^{(k)} \frac{\phi(\widehat{A}_i^{(k)})}{\Phi(\widehat{A}_i^{(k)})} + 1 \right], \quad (11)$$

که  $\widehat{A}_i^{(k)} = \widehat{\eta}^{(k)^{-1}} [ \widehat{\alpha}^{(k)\top} \widehat{\Sigma}_Y^{(k)^{-1} } (\mathbf{y}_i - \widehat{\xi}^{(k)}) - 1 ]$  و  $\widehat{\eta}^{(k)} = \sqrt{\widehat{\alpha}^{(k)\top} \widehat{\Sigma}_Y^{(k)^{-1} } \widehat{\alpha}^{(k)}}$  با استفاده از (۱۰) و (۱۱)، امیدریاضی شرطی  $u$  به شرط  $\mathbf{y}$  برای تابع درستنمایی نمونه کامل به صورت

$$\begin{aligned} Q(\theta | \widehat{\theta}^{(k)}) &= \frac{n}{\nu} \log |\Sigma_Y^{-1}| - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \xi)^\top \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{y}_i - \xi) \\ &+ \sum_{i=1}^n \text{tr} [\Sigma_Y^{-1} (\mathbf{y}_i - \xi) \alpha^\top] \widehat{E}_{i^*}^{(k)} - \frac{1}{\nu} \text{tr} [\Sigma_Y^{-1} \alpha \alpha^\top] \sum_{i=1}^n \widehat{E}_{i^*}^{(k)}, \quad (12) \end{aligned}$$

است. در نتیجه مراحل الگوریتم EM برای محاسبه برآورد پارامترهای مدل به شرح زیر خواهد بود:  
مرحله E: برای مقدار معلوم  $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}^{(k)}$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، مقادیر  $\widehat{E}_{i^*}^{(k)}$  و  $\widehat{E}_{i^*}^{(k)}$  محاسبه می‌شود.

مرحله M: با ماکسیم کردن (۱۲) برای  $\theta = (\xi, \Omega, \delta)$  داریم:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{(k+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \hat{E}_{i1}^{(k)} - \bar{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^n \hat{E}_{i1}^{(k)}}{\sum_{i=1}^n \hat{E}_{i1}^{(k)} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \hat{E}_{i1}^{(k)} \right)^2}, \\ \hat{\xi}^{(k+1)} &= \bar{\mathbf{y}} - \frac{\hat{\alpha}^{(k+1)}}{n} \sum_{i=1}^n \hat{E}_{i1}^{(k)}, \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{(k+1)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \hat{\xi}^{(k+1)})(\mathbf{y}_i - \hat{\xi}^{(k+1)})^T - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{E}_{i1}^{(k)} (\mathbf{y}_i - \hat{\xi}^{(k+1)}) \hat{\alpha}^{(k+1)T} \\ &\quad + \frac{1}{n} \hat{\alpha}^{(k+1)} \hat{\alpha}^{(k+1)T} \sum_{i=1}^n \hat{E}_{i1}^{(k)}.\end{aligned}$$

بنابراین به سادگی می‌توان نتیجه گرفت

$$\hat{\Omega}^{(k+1)} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{(k+1)} + \hat{\alpha}^{(k+1)} \hat{\alpha}^{(k+1)T}, \quad \hat{\delta}^{(k+1)} = \hat{\omega}^{(k+1)-1} \hat{\alpha}^{(k+1)},$$

که در آن  $\hat{\omega} = (\hat{\Omega} \odot \mathbf{I}_p)^{1/2}$ . الگوریتم تا رسیدن به قاعده همگرایی مناسب تکرار می‌شود. در این حالت، با قرار دادن  $\ell(\theta|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \log f_{CMNE_p}(\mathbf{y}_i; \theta)$  معیار همگرایی برای  $\varepsilon > 0$  بسیار کوچک می‌تواند به صورت زیر باشد

$$\left| \frac{\ell(\theta^{(k+1)}|\mathbf{y})}{\ell(\hat{\theta}^{(k)}|\mathbf{y})} - 1 \right| < \varepsilon.$$

## ۴ مطالعه شبیه‌سازی

برای بررسی مناسبیت مدل ارائه شده و روش برآورد مورد استفاده برای برآورد پارامترها یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است. برای مقادیر مختلف حجم نمونه  $n = 50, 100, 500, 1000, 2000$  با مقادیر اولیه  $\xi = (5, 10, 15)^T$ ،  $\delta = (0.3, 0.7, 0.4)^T$ ،  $\Omega = \text{diag}(0.4, 0.6, 1.0)$  و  $k = 1000$  نمونه از توزیع  $CMNE$  شبیه‌سازی شده است. با الگوریتم EM به تعداد شبیه‌سازی مورد نظر، برآورد پارامترهای مدل محاسبه شده‌اند. جدول ۱، مقادیر میانگین و انحراف استاندارد این ۱۰۰۰ برآورد را برای مؤلفه‌های پارامترهای  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ ،  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$  و  $\Omega = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$  نشان

می‌دهد و همچنین در این جدول مقادیر متوسط اریبی برآوردها و میانگین توان‌های دوم خطا به ترتیب به صورت

$$\text{Bias} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{\theta}_j - \theta), \quad \text{MSE} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{\theta}_j - \theta)^2.$$

محاسبه شده‌اند، که در آن مقدار واقعی اولیه پارامترها و  $\hat{\theta}_j$  برای  $j = 1, 1000, 10000$  پارامترهای برآورد شده در هر مرحله شبیه‌سازی از روش الگوریتم EM است. همان‌طور که انتظار می‌رفت، نتایج جدول ۱ نشان دهنده نااریبی و سازگاری مجانبی برآوردهای ارائه شده است، بدین معنی که هر چه حجم نمونه افزایش یابد مقادیر اریبی و میانگین توان‌های دوم خطای برآوردهای بدست آمده از الگوریتم EM کاهش می‌یابد و به صفر نزدیک می‌شود. دقت شود که مقادیر میانگین برآوردها نزدیک به مقدارهای اولیه واقعی بوده و با افزایش حجم نمونه دقیقتر می‌شود، همچنین انحراف استاندارد این برآوردها نیز نزدیک به صفر و با افزایش حجم نمونه کوچک می‌شوند لذا می‌توان ادعا کرد که دقت روش برآورد ارائه شده در حد مطلوبی قرار دارد.

## ۵ تحلیل داده واقعی

مجموعه داده ۱: این داده‌ها مربوط به مؤسسه ورزش استرالیا (AIS) است (کوک و وایزبرگ، ۱۹۹۴)، که شامل ۱۱ اندازه‌گیری زیست پزشکی روی ۲۰۲ قهرمان استرالیایی (۱۰۰ زن و ۱۰۲ مرد) است. از این مجموعه، ۱۰۰ نمونه اول و بردار سه متغیره (BMI, SSF, Bfat)<sup>۱</sup> از بین متغیرها را مورد بررسی قرار می‌گیرند. این مجموعه داده در نرم افزار R بسته sn قابل دسترس است.

مجموعه داده ۲: این داده‌ها درصد ترکیب هشت اسید چرب هستند که با جداسازی چربی‌های ۵۷۲ نوع روغن زیتون ایتالیایی بدست آمده‌اند. این داده‌ها از سه ناحیه جمع آوری شده‌اند و هر ناحیه نیز از تعدادی منطقه تشکیل شده است که در مجموع ۹ منطقه هستند. مجموعه داده شامل ۵۷۲ مشاهده (سطر) و ۱۰ ستون است. ستون اول نام نواحی (یکی از جنوب ایتالیا، ساردینیا و یکی شمال ایتالیا)، ستون دوم شامل نام مناطق مورد بررسی و ۸ ستون باقیمانده متغیرها هستند. این مجموعه داده در نرم افزار R بسته sn قابل دسترس است. در این مقاله، ۳۲۳ مورد از ناحیه جنوب ایتالیا و ستون‌های ۸ و ۹ یعنی به ترتیب

<sup>۱</sup>Body Mass Index, Sum of Skin Folds, and Body Fat Percentage



جدول ۰۱. میانگین، انحراف معیار، اریبی و میانگین توان‌های دوم خطا برآوردهای پارامترها

$\sigma_{33}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{11}$	$\delta_3$	$\delta_2$	$\delta_1$	$\xi_3$	$\xi_2$	$\xi_1$		n
۰٫۸۹۱	۰٫۶۱۱	۰٫۳۹۶	۰٫۲۶۱	۰٫۵۵۳	۰٫۱۷۵	۱۵٫۱۳۳	۱۰٫۱۰۹	۵٫۰۸۰	Mean	۵۰
۰٫۲۱۷	۰٫۱۷۸	۰٫۰۸۳	۰٫۳۶۹	۰٫۳۴۷	۰٫۳۸۲	۰٫۳۹۰	۰٫۲۹۱	۰٫۲۶۰	Std	
-۰٫۰۰۹	۰٫۰۱۱	-۰٫۰۰۴	-۰٫۱۳۹	-۰٫۱۴۷	-۰٫۱۲۵	۰٫۱۳۳	۰٫۱۰۹	۰٫۰۸۰	Bias	
۰٫۰۴۷	۰٫۰۳۲	۰٫۰۰۷	۰٫۱۵۵	۰٫۱۴۲	۰٫۱۶۱	۰٫۱۷۰	۰٫۰۹۶	۰٫۰۷۴	MSE	
۰٫۸۹۸	۰٫۵۹۸	۰٫۴۰۰	۰٫۳۲۵	۰٫۶۲۵	۰٫۲۲۴	۱۵٫۰۷۷	۱۰٫۰۵۷	۵٫۰۴۳	Mean	۱۰۰
۰٫۱۴۹	۰٫۱۱۱	۰٫۰۵۹	۰٫۲۵۴	۰٫۲۴۲	۰٫۲۷۹	۰٫۲۷۱	۰٫۲۰۰	۰٫۱۸۹۶	Std	
-۰٫۰۰۲	-۰٫۰۰۳	-۰٫۰۰۱	-۰٫۰۷۵	-۰٫۰۷۴	-۰٫۰۷۶	۰٫۰۷۷	۰٫۰۵۷	۰٫۰۴۳	Bias	
۰٫۰۲۲	۰٫۰۱۲	۰٫۰۰۳	۰٫۰۷۰	۰٫۰۶۴	۰٫۰۸۳	۰٫۰۷۹	۰٫۰۴۳	۰٫۰۳۸	MSE	
۰٫۸۹۸	۰٫۵۹۷	۰٫۴۰۱	۰٫۳۹۸	۰٫۶۹۷	۰٫۳۰۰	۱۵٫۰۰۳	۱۰٫۰۰۴	۵٫۰۰۱	Mean	۵۰۰
۰٫۰۶۷	۰٫۰۴۷	۰٫۰۲۷	۰٫۰۵۹	۰٫۰۴۶	۰٫۰۶۵	۰٫۰۷۲	۰٫۰۵۰	۰٫۰۴۹	Std	
-۰٫۰۰۲	-۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۱	-۰٫۰۰۲	-۰٫۰۰۳	-۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۳	۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۲	Bias	
۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۳	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۵	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۲	MSE	
۰٫۸۹۸	۰٫۶۰۱	۰٫۳۹۹	۰٫۳۹۷	۰٫۶۹۹	۰٫۳۰۰	۱۵٫۰۰۴	۹٫۹۹۸	۴٫۹۹۹	Mean	۱۰۰۰
۰٫۰۴۶	۰٫۰۳۳	۰٫۰۱۸	۰٫۰۴۳	۰٫۰۳۳	۰٫۰۴۳	۰٫۰۵۳	۰٫۰۳۶	۰٫۰۳۳	Std	
-۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۸	-۰٫۰۰۰۷	-۰٫۰۰۲۲	-۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۰۴۲	-۰٫۰۰۱۲	-۰٫۰۰۱۴	Bias	
۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۳	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۱	MSE	
۰٫۸۹۹	۰٫۵۹۹	۰٫۳۹۹	۰٫۴۰۰	۰٫۶۹۹	۰٫۳۰۰	۱۴٫۹۹۹	۰٫۰۰۱	۵٫۰۰۱	Mean	۲۰۰۰
۰٫۰۳۳	۰٫۰۲۴	۰٫۰۱۲	۰٫۰۲۹	۰٫۰۲۳	۰٫۰۳۰	۰٫۰۳۵	۰٫۰۲۵	۰٫۰۲۴	Std	
-۰٫۰۰۰۷	-۰٫۰۰۰۸	-۰٫۰۰۰۱	-۰٫۰۰۰۲	-۰٫۰۰۱۰	-۰٫۰۰۰۴	-۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۹	Bias	
۰٫۰۱۱	۰٫۰۰۶	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۸	۰٫۰۰۵	۰٫۰۰۹	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۶	۰٫۰۰۶	MSE	

جدول ۰۲. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل از روش EM برای ۲ مجموعه داده

$\delta$	$\Omega$	$\xi$	مجموعه داده
$\begin{bmatrix} ۰٫۶۹۶۳ \\ ۰٫۸۷۴۷ \\ ۰٫۷۴۷۱ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۷٫۲۸۷۰ & ۶۶٫۳۶۵۰ \\ ۶۶٫۳۶۵۰ & ۱۲۳٫۸۱۸۵۸ \\ ۱۰٫۲۷۴۵ & ۱۹۱٫۲۷۴۸ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱۰٫۲۷۴۵ \\ ۱۹۱٫۲۷۴۸ \\ ۳۱٫۳۵۳۵ \end{bmatrix}$	AIS
$\begin{bmatrix} ۰٫۱۵۴۶ \\ ۰٫۶۹۷۷ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۶۳٫۳۶۲۳ & ۴۰٫۹۴۸۱ \\ ۴۰٫۹۴۸۱ & ۱۲۴٫۰۵۷۵ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۳۶٫۸۳۴۴ \\ ۵۵٫۳۴۶۲ \end{bmatrix}$	روغن زیتون

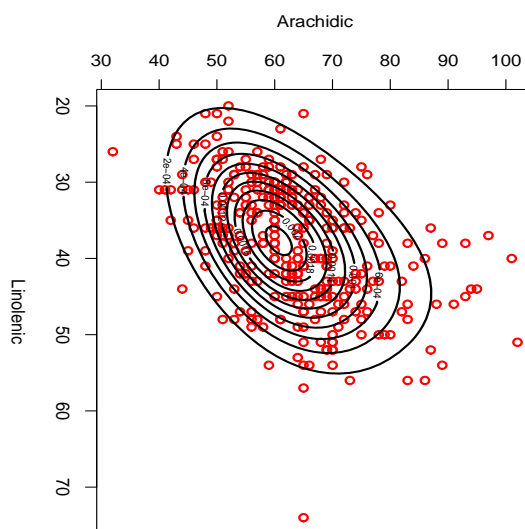
میزان اسیدهای چرب لینولنیک و آراشیدیک<sup>۱</sup> به عنوان بردار تصادفی دومتغیره بررسی می‌شود. جدول ۱، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل را در دو مجموعه داده نشان می‌دهد. برای ارزیابی توزیع جدید از سه معیار، لگاریتم درست‌نمایی  $\ell(\hat{\theta}|\mathbf{y}) = \ell(\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\delta}|\mathbf{y})$ ، اطلاع آکائیک (AIC) و اطلاع بیزی (BIC) استفاده و با توزیع‌های چوله‌نرمال و چوله-t مقایسه می‌شود. همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود معیار  $\ell(\hat{\theta}|\mathbf{y})$  برای مدل CMNE مقداری بزرگتر و دو معیار AIC و BIC مقادیری کوچکتر ارائه می‌دهند. بنابراین برای دو مجموعه داده، مدل جدید برازش بهتری نسبت به توزیع‌های چوله‌نرمال و چوله-t دارد. لذا مدل CMNE می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع‌های شناخته شده در ارائه برآورد بهتر چگالی و بهبود روش‌های آماری باشد. شکل ۲، نمودار پراکنش مجموعه داده روغن زیتون

<sup>1</sup>Linolenic and Arachidic fatty acids

جدول ۳. مقایسه ضرایب برازش توزیع‌های چوله‌نرمال، چوله-t و CMNE

مجموعه داده روغن زیتون			مجموعه داده AIS			توزیع
BIC	AIC	$\ell(\hat{\theta} \mathbf{y})$	BIC	AIC	$\ell(\hat{\theta} \mathbf{y})$	
۴۶۸۰۵۲۲	۴۶۵۴۰۷۹	-۲۳۲۰۰۳۹	۱۷۸۷۸۰۷	۱۷۵۶۵۴۵	-۸۶۶۲۷۲۵	چوله‌نرمال
۴۶۷۸۸۶۱	۴۶۴۸۶۴۰	-۲۳۱۶۳۲۰	۱۷۶۴۱۳۸	۱۷۳۰۲۷۱	-۸۵۲۱۳۵۴	چوله-t
۴۶۶۹۶۵۱	۴۶۴۳۲۰۷	-۲۳۱۴۶۰۴	۱۷۵۶۷۴۰	۱۷۲۵۴۷۸	-۸۵۰۷۳۸۸	CMNE

را به همراه منحنی کانتور دوبعدی توزیع CMNE را با مقادیر پارامترهای برازش شده نمایش می‌دهد.



شکل ۲. منحنی کانتور برای توزیع CMNE دو متغیره برای مجموعه داده روغن زیتون

## بحث و نتیجه‌گیری

توزیع چندمتغیره آمیخته از توزیع‌های نرمال و نمایی استاندارد مورد بررسی قرار گرفت و توابع مشخصه، مولد گشتاور، چهار گشتاور اول، توزیع تبدیل‌های آفین، فرم کانونی، ضرایب چولگی، کشیدگی و مد آن ارائه شد. برآورد پارامترهای مدل با الگوریتم EM محاسبه و در یک مطالعه شبیه‌سازی و دو مثال واقعی، مشاهده شد این توزیع برازش مناسبی به داده‌ها دارد. توزیع CMNE از چولگی و کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع چوله‌نرمال برخوردار است و برخلاف توزیع چوله‌نرمال، بخش‌پذیر نامتناهی است، که ویژگی

ارزشمندی در مباحث نظری و کاربردی است. توابع مشخصه و مولد گشتاور این توزیع به صورت صریح قابل محاسبه است و در برآورد پارامترها با الگوریتم EM نیز روابط درستی برای فرم بسته هستند.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم، داوران ارجمند و ویراستار نکته سنج مجله که نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان موجب بهبود مقاله گردید نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

## مراجع

بخشی شجایی، م. و کریمی، ا. (۱۳۹۵)، شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته برای مدل معکوس سائسیمیک بیزی، مجله علوم آماری، ۱۰، ۴۵-۶۵.

Arellano-Valle, R. B. and Azzalini, A. (2006), On the Unification of Families of Skew-Normal Distributions, *Scandinavian Journal of Statistics*, **33**, 561-574.

Azzalini, A. (1985), A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **2**, 171-178.

Azzalini, A. (1986), Further Results on a Class of Distributions Which Includes the Normal Ones, *Statistica*, **46**, 199-208.

Azzalini, A. (2005), The Skew-Normal Distribution and Related Multivariate Families, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 159-188.

Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999), Statistical Applications of the Multivariate Skew Normal Distribution, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **61**, 579-602.

Azzalini, A. and Capitanio, A. (2014), *The Skew-Normal and Related Families*, Cambridge University Press, Cambridge.

Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996), The Multivariate Skew-Normal Distribution, *Biometrika*, **83**, 715-726.

Cook, R. D. and Weisberg, S. (1994), *An Introduction to Regression Graphics*, Wiley, New York.

Dominguez-Molina, J. A. and Rocha-Artega, A. (2007), On the Infinite Divisibility of Some Skewed Symmetric Distributions, *Statistics & Probability Letters*, **77**, 644-648.

Genton, M. G., He, L. and Liu, X. (2001), Moments of Skew-Normal Random Vectors and Their Quadratic Forms, *Statistics & Probability Letters*, **51**, 319-325.

Graham, A. (1981), *Advanced Multivariate Statistics with Matrices*, Springer, Dordrecht.

Kim, H. M. and Genton, M. G. (2011), Characteristic Functions of Scale Mixtures of Multivariate Skew-Normal Distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **102**, 1105-1117.

Kollo, T. and von Rosen, D. (2005), *Advanced Multivariate Statistics with Matrices*, Springer, Dordrecht.

Lee, S. X. and McLachlan, G. J. (2011), On the Fitting of Mixtures of Multivariate Skew-t Distributions via the EM Algorithm, *arXiv:1109.4706 [statME]*.

Lee, S. X. and McLachlan, G. J. (2013), On Mixtures of Skew-Normal and Skew-t Distributions, *Advances in Data Analysis and Classification*, **7**, 241-266.

- Lee, S. X. and McLachlan, G. J. (2014), Finite Mixtures of Multivariate Skew-t Distributions: Some Recent and New Results, *Statistics and Computing*, **24**, 181-202.
- Lin, T. I., Lee, J. C. and Yen, S. Y. ( 2007), Finite Mixture Modelling Using the Skew Normal Distribution, *Statistica Sinica*, **17**, 909-927.
- Mardia, K. V. (1970), Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications, *Biometrika*, **36**, 519-530.
- Negarestani, H., Jamalizadeh, A., Shafiei, S. and Balakrishnan, N. (2019), Mean Mixtures of Normal Distributions: Properties, Inference and Application, *Metrika*, **82**, 501-528.
- Schott, J. R. (2016), *Matrix Analysis for Statistics*, Third edition, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2020  
Vol. 14, No. 2, pp 449-469  
DOI: 10.29252/jss.14.2.449

## **The Convolution of Multivariate Normal and Standard Exponential Distributions: Theory and Application**

Abdi, M., Madadi, M., and Jamalizadeh, A.  
Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer,  
Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

**Abstract:** In this article, a mixture of multivariate normal and standard exponential distributions is investigated. It is shown that the range of skewness and kurtosis coefficients for this distribution is wider than that of the skew-normal distribution. Some properties of this distribution, such as characteristic function, moment generating function, four first moments, skewness and kurtosis of distribution are presented. Also, the distribution of Affine transformations and canonical forms of distribution are derived. The maximum likelihood estimation of parameters of the model is computed by using an EM algorithm. To investigate the suitability and efficiency of the model, a simulation study is presented. Finally, two numerical examples with real data sets are studied.

**Keywords:** Convolution of multivariate normal and standard exponential distributions, EM algorithm, Affine transformations and canonical form.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 60E05, 62E10, 62E15, 62H05, 62H12.