

تحلیل داده‌های طول عمر وایبول تحت تعمیر ناقص

هدی کامرانفر، جواد اطمینان و مجید چهکندی

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۲۹

چکیده: سیستم تعمیرپذیری با دو نوع خرابی مورد مطالعه قرار گرفته است. خرابی نوع یک با تعمیر مینیمال و خرابی نوع دو با تعویض سیستم برطرف می‌شود. طول عمر سیستم تا اولین شکست از توزیع وایبول پیروی می‌کند و دو سیاست برای تعمیر سیستم در نظر گرفته می‌شود. در سیاست اول، سیستم پس از گذشت زمان T یا در اولین خرابی نوع دو و در سیاست دوم، سیستم پس از گذشت زمان T یا در m مین خرابی نوع یک یا در اولین خرابی نوع دو، هر کدام زودتر رخ دهد، تعویض می‌شود. هدف این مقاله ارائه یک نمایش کلی از تابع درستنمایی برای مدل‌های مورد بررسی است. آماره آزمون نسبت درستنمایی، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و فواصل اطمینان مجانبی نیز برای پارامترهای مورد نظر به دست می‌آیند. در پایان، شبیه‌سازی مونت کارلو برای توضیح نتایج، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: استنباط آماری، تعمیر ناقص، سیستم تعمیرپذیر، شبیه‌سازی مونت کارلو

۱ مقدمه

نیاز مبرم به سیاستی برای تعمیر و نگهداری یک سیستم به گونه‌ای که هزینه‌های جانبی ناشی از خرابی ناگهانی آن را کاهش دهد، امروزه مسئله‌ای انکار ناپذیر است. در سال‌های اخیر برای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها، الگوهای مختلفی ارائه شده است که کاربردهای فراوانی در صنعت برای بهبود کارایی سیستم‌ها و

تجهیزات دارند. در مدل‌های اولیه مطرح شده، فرایندهای ساده‌ای برای توصیف رفتار سیستم‌های تعمیرپذیر در نظر گرفته شده است. در این مدل‌ها فرض می‌شود بعد از هر تعمیر، سیستم یا به وضعیت "به خوبی یک سیستم نو" یا به حالت "به بدی کهنه" باز می‌گردد. به ترتیب، اصطلاحاً گفته می‌شود تعمیر کامل و تعمیر مینیمال بر روی آن انجام شده است. در تعمیر کامل، سیستم پس از خرابی به گونه‌ای تعمیر می‌شود که عملکرد (تابع نرخ شکست) آن مانند وضعیت اولیه یعنی زمان شروع به کار است، در این حالت توزیع زمان‌های بین خرابی از فرایند تجدید پیروی می‌کند. چنانچه پس از تعمیر تابع نرخ شکست سیستم به وضعیتی بازگردد که سیستم دقیقاً قبل از شکست داشته، در این صورت یک تعمیر مینیمال رخ داده است که در آن توزیع زمان‌های بین دو تعمیر توسط فرایند پواسون ناهمگن مدل‌بندی می‌شود.

تعمیر ناقص^۱ یکی دیگر از مدل‌های مهم در تعمیر و نگهداری است که توسط **براون و پروشان (۱۹۸۳)** معرفی شد. در این مدل، خرابی سیستم با احتمال p از طریق تعمیر کامل و با احتمال $q = 1 - p$ با تعمیر مینیمال برطرف می‌شود. **بلاک و همکاران (۱۹۸۵)** مدل تعمیر ناقص براون و پروشان را گسترش داده و سن سیستم را نیز در سیاست تعمیر و نگهداری آن در نظر گرفتند. **شیو و گریفیث (۱۹۹۶)** نیز با تعمیم مدل براون و پروشان، سیستم تعمیرپذیری را تحت تاثیر شوک‌هایی منطبق بر فرایند پواسون ناهمگن در نظر گرفتند که در هر شوک امکان دو نوع خرابی برای سیستم وجود دارد. خرابی نوع یک با تعمیر مینیمال و خرابی نوع دو با جایگزینی سیستم برطرف می‌شود. این سیستم در m امین خرابی نوع یک یا اولین خرابی نوع دو، هر کدام زودتر رخ دهد، تعویض می‌شود. **شیو (۱۹۹۹)** سیاست تعویض سیستم در m امین خرابی نوع یک یا اولین خرابی نوع دو یا در زمان T ، هر کدام ابتدا رخ دهد، را ارائه داد. از جمله سایر تحقیقات در حوزه ارائه سیاست‌های بهینه برای حفظ و نگهداری سیستم‌ها می‌توان به **چنگ و لی (۲۰۱۲)**، **شیو و همکاران (۲۰۱۲، ۲۰۱۳، ۲۰۱۶)**، **صفایی و احمدی (۱۳۹۴)**، **تسای و همکاران (۲۰۱۷)** و **چپکندی (۱۳۹۸)** اشاره نمود.

در تحقیقات حوزه قابلیت اعتماد، اغلب سیستم‌ها از نقطه نظر مهندسی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این حوزه، فرایندی با پارامترهای معلوم برای زمان‌های شکست سیستم در نظر گرفته می‌شود و سیاست بهینه برای تعمیر و نگهداری سیستم اتخاذ می‌گردد. اما در عمل معمولاً تنها مشاهداتی از زمان‌های خرابی یا تعمیر سیستم‌های تعمیرپذیر در دسترس است. هدف اصلی این مقاله، استنباط آماری برای تعمیمی از مدل‌های مورد استفاده توسط **براون و پروشان (۱۹۸۳)** و **شیو (۱۹۹۹)** است. ابتدا شکلی کلی برای تابع درستنمایی مدل‌های مورد مطالعه ارائه می‌شود. با توجه به درستنمایی ارائه شده، با در نظر گرفتن هر توزیع

¹Imperfect repair

طول عمر اولیه دلخواه برای سیستم تعمیرپذیر می‌توان به استنباط آماری درباره پارامترهای مدل پرداخت و طول عمر سیستم را پیش‌بینی نمود. با توجه به انعطاف پذیری توزیع وایبول و کاربرد فراوان آن در داده‌های طول عمر، در این مقاله توزیع وایبول به عنوان توزیع طول عمر اولیه سیستم در نظر گرفته شده و به استنباط آماری پارامترهای مدل پرداخته شده است. این نتایج در پیش‌بینی زمان جایگزینی سیستمی که توسط مدل شیو (۱۹۹۹) و تعمیم‌های آن تحت تعمیر قرار می‌گیرد مفید است.

در بخش ۲ مدل‌های استفاده شده معرفی می‌شوند. در بخش ۳ تابع درستنمایی کلی براساس مدل‌های معرفی شده به دست می‌آید. در بخش ۴ توزیع وایبول دو پارامتری به عنوان توزیع طول عمر اولیه سیستم در نظر گرفته شده و الگوریتمی به روش تکراری برای محاسبه برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل معرفی شده است. بخش ۵ به برآورد فاصله‌ای و آزمون نسبت درستنمایی اختصاص یافته است. بررسی عملکرد برآوردها براساس دو ملاک اربیبی و میانگین توان‌های دوم خطا، احتمال پوشش و توان آزمون در بخش ۶ با مطالعه شبیه‌سازی صورت پذیرفته است. در انتها بحث و نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲ معرفی مدل

سیستم تعمیرپذیری را در نظر بگیرید که از زمان صفر شروع به کار می‌کند و تحت تاثیر شوک‌هایی منطبق بر فرایند پواسون ناهمگن قرار می‌گیرد. در هر شوک ممکن است دو نوع خرابی رخ دهد که یا با تعمیر مینیمال (خرابی نوع یک) یا از طریق جایگزینی آن با یک سیستم نو (خرابی نوع دو) برطرف می‌شود. مدل‌های مورد استفاده در این مقاله به عبارتند از:

مدل ۱: تعویض در مینیمم زمان‌های رخداد اولین خرابی نوع دو و T ،

مدل ۲: تعویض در مینیمم زمان‌های رخداد m امین خرابی نوع یک، اولین خرابی نوع دو و T .



شکل ۱. نمونه‌ای از مسیر فرایند خرابی سیستم. علامت‌های ضربدر، مربع مشکی، مثلث مشکی و مثلث سفید به ترتیب بیانگر تعمیر مینیمال، تعویض به دلیل خرابی نوع دو، تعویض پس از گذشت زمان T و تعویض به دلیل رخداد m امین خرابی نوع یک است.

با توجه به اینکه مدل ۲ جامع‌تر است، در شکل ۱ نمونه‌ای از خرابی‌های متوالی تحت این مدل نمایش داده شده است. فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_m)$ بردار زمان‌های خرابی یک سیستم نو تا زمان اولین تعویض آن باشد. می‌توان گفت چنانچه تا زمان T یا رسیدن به m امین خرابی نوع یک، خرابی نوع دو رخ

ندهد با نوعی سانسور مواجه هستیم. قابل ذکر است که فرض شده سیستم به گونه‌ای طراحی شده است که خرابی‌ها بلافاصله شناسایی شده و همچنین زمان تعمیر قابل چشم‌پوشی است. بلاک و همکاران (۱۹۸۸) و شیو (۱۹۹۹) با معلوم فرض کردن پارامترهای مدل، سیاستی بهینه ارائه دادند که در آن هدف مینیم کردن تابع هزینه نسبت به T یا n و یافتن مقدار بهینه برای آن‌ها است. در این مقاله فرض می‌شود که T و n مقادیری ثابت و معلوم هستند و براساس نمونه‌ای از خرابی‌های مشاهده شده، به برآورد پارامترهای قابلیت اعتماد و اثر تعمیر پرداخته خواهد شد.

۳ تابع درستمایی

مدل ۱: ابتدا تابع درستمایی برای هر یک از حالت‌های رخداد خرابی نوع دو قبل و بعد از زمان T و سپس تابع درستمایی برای حالت کلی ارائه می‌شود.

۱. خرابی نوع دو قبل از زمان T رخ داده است. در این صورت

$$\begin{aligned} L(p, F|\mathbf{x}, m) &= q^{m-1} p \prod_{i=1}^m f(x_i|x_{i-1}) \\ &= q^{m-1} p \prod_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_{i-1})} \quad \circ = x_0 < x_1 < \dots < x_m, \\ &= q^{m-1} p \bar{F}(x_m) \prod_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)} \end{aligned}$$

که در آن $f(x_i|x_{i-1})$ تابع چگالی توزیع از چپ بریده شده در نقطه x_{i-1} و $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$ تابع بقا طول عمر اولیه سیستم است.

۲. تا زمان T خرابی نوع دو رخ نداده است. در این حالت

$$L(p, F|\mathbf{x}, m) = q^m \bar{F}(T) \prod_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)}, \quad \circ < x_1 < \dots < x_m,$$

با تعمیم دو حالت فوق، تابع درستنمایی در حالت کلی به صورت

$$L(p, F|\mathbf{x}, m) = q^m \bar{F}(T) \left(\frac{p \bar{F}(x_m)}{q \bar{F}(T)} \right)^{I(z=1)} \prod_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)},$$

است، که در آن $I(z = 1)$ تابع نشانگر رخداد خرابی نوع دو قبل از زمان T است. بنابراین تابع درستنمایی برای k سیستم یکسان (k تعویض) به صورت

$$L(p, F|\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{m}) = q^{M-N_1} p^{N_1} (\bar{F}(T))^{k-N_1} \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^{m_j} \frac{f(x_{j,i})}{\bar{F}(x_{j,i})} \right) (\bar{F}(x_{j,m_j}))^{I(z_j=1)}, \quad (1)$$

است، که در آن $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_k)$ و $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ و $M = \sum_{j=1}^k m_j$ و $N_1 = \sum_{j=1}^k I(z_j = 1)$

مدل ۲: سیستم مورد مطالعه در زمان T ، یا در n امین خرابی نوع یک یا در اولین خرابی نوع دو، هرکدام زودتر رخ دهد، تعویض می‌شود. با توجه به مدل ۱، تابع درستنمایی برای $k = 1$ به صورت

$$L(p, F|\mathbf{x}, m) = q^{m-1} \left(\prod_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)} \right) (\bar{F}(x_m))^{1-I(m < n)I(z=0)} p^{I(m < n)I(z=1)} \\ \times (q \bar{F}(T))^{I(m < n)I(z=0)},$$

است، که در آن $I(z = 1)$ مانند مدل ۱ تعریف می‌شود. برای k سیستم نیز

$$L(p, F|\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{m}) = q^{M-k+L-N_1} p^{N_1} (\bar{F}(T))^{L-N_1} \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^{m_j} \frac{f(x_{j,i})}{\bar{F}(x_{j,i})} \right) (\bar{F}(x_{j,m_j}))^{I_j}, \quad (2)$$

که در آن $N_1 = \sum_{j=1}^k I(m_j < n)I(z_j = 1)$ ، $M = \sum_{j=1}^k m_j$ ، $I_j = 1 - I(m_j < n)I(z_j = 0)$ و $L = \sum_{j=1}^k I(m_j < n)$ و سایر موارد مانند مدل ۱ تعریف می‌شوند.

۴ برآورد پارامترهای مدل تحت توزیع طول عمر وایبول

با توجه به (۱) و (۲) برآورد پارامتر p مستقل از توزیع زمان‌های خرابی است. با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به p ، به سادگی ملاحظه می‌شود $\frac{N_1}{M}$ و $\frac{N_2}{M-k+L}$ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی p به ترتیب در مدل‌های ۱ و ۲ هستند. نظر به کاربرد توزیع وایبول در نظریه قابلیت اعتماد و انعطاف پذیری تابع نرخ خطر این توزیع، فرض کنید توزیع طول عمر اولیه سیستم وایبول با تابع چگالی

$$f(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}, t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$$

باشد، در این صورت $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t^\alpha}$ تابع بقا، $\lambda(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1}$ تابع نرخ خطر و $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \lambda t^\alpha$ تابع نرخ خطر تجمعی هستند.

مدل ۱: با جایگذاری کمیت‌های لازم در (۱) بر اساس توزیع وایبول لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \alpha) &= \log L(p, F|\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{m}) \\ &= (M - N_1) \log(q) + N_1 \log(p) + M(\log(\alpha\lambda)) - (k - N_1)\lambda T^\alpha \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) - \sum_{j=1}^k \lambda x_{j,m_j}^\alpha I(z_j = 1). \end{aligned} \quad (3)$$

است، که با مشتق‌گیری از آن نسبت به λ و α برآوردهای ماکسیمم درستنمایی

$$\hat{\lambda} = \frac{M}{(k - N_1)T^\alpha + \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^\alpha I(z_j = 1)}, \quad (4)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{M}{(k - N_1)\lambda T^\alpha \log(T) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) + \lambda \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^\alpha \log(x_{j,m_j}) I(z_j = 1)}. \quad (5)$$

حاصل می‌شوند. از آنجا که (۵) نسبت به α غیرخطی است، معمولاً برای حل این معادله‌ها از دستورهای بهینه‌سازی در نرم‌افزارهایی مانند R کمک گرفته می‌شود. در اینجا یک روش تکراری معرفی می‌شود که نتایج شبیه‌سازی بیانگر کارآمدی آن است. در (۴) و (۵) دو عبارت $\sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^\alpha$ و T^α ظاهر شده است

که در ارتباط با نمونه‌هایی هستند که به ترتیب در آنها خرابی نوع دو ($z_j = 1$) و رسیدن به زمان T ($z_j = 0$) عامل تعویض بوده است. با توجه به این عوامل، برآوردهای اولیه پارامترها به دست می‌آیند. فرض کنید در سیستم j ام خرابی نوع دو قبل از زمان T رخ داده باشد، با قرار دادن $k = 1$ و $z_j = 1$ در (۴) و (۵)، برآورد α که فقط از مشاهدات این سیستم حاصل می‌شود، عبارت است از

$$\hat{\alpha}_{\circ,j} = \frac{m_j}{m_j \log(x_{j,m_j}) - \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i})}. \quad (6)$$

از طرف دیگر برآورد پارامترها بر اساس مشاهدات نمونه‌هایی که در آنها خرابی نوع دو قبل از زمان T رخ نداده است ($z_j = 0$)، نیز به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{\circ}^* &= \frac{\sum_{j=1}^k I(z_j = 0)m_j}{(k - N_1)T^\alpha} = \frac{M_1^*}{(k - N_1)T^\alpha}, \\ \hat{\alpha}_{\circ}^* &= \frac{M_1^*}{M_1^* \log(T) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i})I(z_j = 0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

به دست می‌آید. حال می‌توان مقادیر اولیه پارامترها را به صورت

$$\hat{\lambda}_{\circ} = \frac{M}{(k - N_1)T^{\hat{\alpha}_{\circ}^*} + \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}_{\circ,j}} I(z_j = 1)}, \quad (8)$$

$$\hat{\alpha}_{\circ} = \frac{M}{(k - N_1)\hat{\lambda}_{\circ} T^{\hat{\alpha}_{\circ}^*} \log(T) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) + \hat{\lambda}_{\circ} \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}_{\circ,j}} \log(x_{j,m_j}) I(z_j = 1)} \quad (9)$$

در نظر گرفته و برای برآورد پارامترهای مدل ۱، الگوریتمی ارائه نمود.

الگوریتم ۱. الگوریتم تکراری برای برآورد پارامترهای مدل ۱ :

گام ۱- برآوردهای اولیه α و λ به دست آورده شود. برای این منظور:

الف- اگر خرابی نوع دو قبل از زمان T رخ داده باشد ($z_j = 1$)، $\hat{\alpha}_{\circ j}$ از طریق (۶) محاسبه شود.

ب- اگر خرابی نوع دو قبل از زمان T رخ نداده باشد ($z_j = 0$)، $\hat{\alpha}_{\circ j}^*$ از طریق (۷) محاسبه شود.

ج- از طریق (۸) و (۹)، مقادیر اولیه $\hat{\lambda}_{\circ}$ و $\hat{\alpha}_{\circ}$ محاسبه شوند.

گام ۲- در مرحله l ام برآورد α و λ به صورت زیر به روز شوند.

$$\hat{\lambda}_l = \frac{M}{(k - N_1)T^{\hat{\alpha}_{l-1}} + \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}_{l-1}} I(z_j = 1)},$$

$$\hat{\alpha}_l = \frac{M}{(k - N_1)\hat{\lambda}_l T^{\hat{\alpha}_{l-1}} \log(T) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) + \hat{\lambda}_l \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}_{l-1}} \log(x_{j,m_j}) I(z_j = 1)}.$$

گام ۳- گام‌های ۱ و ۲ تا رسیدن به همگرایی تکرار شوند. برای این منظور به ازای عدد دلخواه و کوچک ε ، گام‌های الگوریتم تا زمانی تکرار شوند که $\varepsilon < \max\{|\hat{\lambda}_{l+1} - \hat{\lambda}_l|, |\hat{\alpha}_{l+1} - \hat{\alpha}_l|\}$.

مدل ۲: لگاریتم تابع درست‌نمایی مدل ۲ براساس (۲) و توزیع وایبول به صورت

$$\ell(\lambda, \alpha) = (M - k + L - N_2) \log(q) + N_2 \log(p) + M \log(\alpha \lambda) + (\alpha - 1) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) - (L - N_2) \lambda T^\alpha - \sum_{j=1}^k I_j \lambda x_{j,m_j}^\alpha. \quad (10)$$

است، که با گرفتن مشتق از آن نسبت به α و λ ، نتیجه می‌شود:

$$\hat{\lambda} = \frac{M}{(L - N_2)T^\alpha + \sum_{j=1}^k I_j x_{j,m_j}^\alpha},$$

$$\hat{\alpha} = \frac{M}{(L - N_2)\hat{\lambda}T^\alpha \log(T) + \hat{\lambda} \sum_{j=1}^k I_j x_{j,m_j}^\alpha \log(x_{j,m_j}) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i})}. \quad (11)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود (۱۱) نسبت به α غیرخطی است. بنابراین مشابه مدل ۱، از روشی تکراری برای برآورد پارامترها استفاده می‌شود فقط باید عامل سوم یعنی تعویض در n امین خرابی نوع یک نیز به آن اضافه شود. برای این منظور، سیستم‌هایی که در آنها رخداد n امین خرابی نوع یک یا اولین خرابی نوع دو عامل تعویض بوده را در نظر گرفته و برای هر کدام از آنها باید جداگانه α به صورت

$$\hat{\alpha}_{\cdot j} = \frac{m_j}{m_j \log(x_{j,m_j}) - \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i})} I_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

برآورد شود. حال بر اساس سیستم‌هایی که رسیدن به زمان T عامل تعویض بوده است،

$$\hat{\lambda} = \frac{M_{\uparrow}^*}{(L - N_{\uparrow})\lambda T^{\alpha}},$$

نتیجه می‌شود، که در آن $M_{\uparrow}^* = \sum_{j=1}^k I(m_j < n)I(z_j = \circ)m_j$ و با توجه به معادله

$$\frac{\partial \ell(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{M_{\uparrow}^*}{\alpha} - (L - N_{\uparrow})\lambda T^{\alpha} \log(T) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} (1 - I_j) \log(x_{j,i}) = \circ,$$

مقدار اولیه برآورد α بر اساس این سیستم‌ها به صورت

$$\hat{\alpha}_{\circ}^* = \frac{M_{\uparrow}^*}{M_{\uparrow}^* \log(T) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} (1 - I_j) \log(x_{j,i})}.$$

به دست می‌آید. با مقادیر اولیه به دست آمده برای پارامترها، ادامه کار دقیقاً مشابه الگوریتم ۱ است.

۵ آزمون فرضیه و فاصله اطمینان

در مدل‌های ۱ و ۲، بردار پارامتر $\theta = (p, \lambda, \alpha)'$ است. برای آزمون فرضیه $\theta = \theta_0$: H_0 در مقابل $\theta \neq \theta_0$: H_1 با استفاده از (۳) و (۱۰) لگاریتم آماره آزمون نسبت درستنمایی به ترتیب در مدل‌های ۱

و ۲ به صورت

$$T_{LR_1} = M \log\left(\frac{q_0}{\hat{q}}\right) + 1 + N_1 \log\left(\frac{p_0 \hat{q}}{q_0 \hat{p}}\right) + M \log\left(\frac{\alpha_0 \lambda_0}{\hat{\alpha} \hat{\lambda}}\right) \quad (12)$$

$$+ (\alpha_0 - \hat{\alpha}) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) - \lambda_0 [(k - N_1) T^{\alpha_0} + \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\alpha_0} I(z_j = 1)],$$

$$T_{LR_2} = M \log\left(\frac{q_0}{\hat{q}}\right) + 1 - N_2 \log\left(\frac{q_0 \hat{p}}{p_0 \hat{q}}\right) + (L - k) \log\left(\frac{q_0}{\hat{q}}\right) + M \log\left(\frac{\alpha_0 \lambda_0}{\hat{\alpha} \hat{\lambda}}\right)$$

$$+ (\alpha_0 - \hat{\alpha}) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{m_j} \log(x_{j,i}) - \lambda_0 [(L - N_2) T^{\alpha_0} + \sum_{j=1}^k I_j x_{j,m_j}^{\alpha_0}], \quad (13)$$

است. آزمون فرضیه p می‌تواند در بررسی مینیمال یا کامل بودن تعمیر انجام شده راهگشا باشد. فواصل اطمینان مجانبی پارامترها براساس توزیع مجانبی برآوردگرها قابل محاسبه است. برآوردگرهای ماکسیم درست‌نمایی تحت شرایط نظم به طور مجانبی نارایب و دارای توزیع نرمال هستند. یعنی $\hat{\theta} \xrightarrow{d} N(\theta, \Sigma)$ که در آن Σ ، معکوس ماتریس اطلاع فیشر است. با توجه به اینکه در اکثر مواقع محاسبه مقدار دقیق ماتریس اطلاع فیشر امکان پذیر نیست، از برآورد آن، یعنی $\hat{\Sigma} = J^{-1}(\hat{\theta}) = (-\nabla \nabla^T \ell(\theta | \mathbf{x}))^{-1} |_{\theta = \hat{\theta}}$ استفاده می‌شود. با توجه به استقلال \hat{p} و $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ ، اگر برآورد ماتریس کواریانس برآوردگرهای $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ با

$$\hat{\Sigma}_{(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{V}(\hat{p}) = \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2}\right)^{-1} |_{p=\hat{p}} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{M - 2N_1},$$

$$a_{11} = \frac{M}{\hat{\alpha}^2} + (k - N_1) \hat{\lambda} T^{\hat{\alpha}} (\log(T))^2 + \hat{\lambda} \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}} (\log(x_{j,m_j}))^2 I(z_j = 1),$$

$$a_{12} = a_{21} = -(k - N_1) T^{\hat{\alpha}} \log(T) - \sum_{j=1}^k x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}} \log(x_{j,m_j}) I(z_j = 1),$$

$$a_{22} = \frac{M}{\hat{\lambda}^2}.$$

حاصل می‌شوند. به طور مشابه برای مدل ۲ نیز داریم

$$\begin{aligned}\widehat{V}(\hat{p}) &= \left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2}\right)^{-1} \Big|_{p=\hat{p}} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{M-k+L-2N_{\checkmark}}, \\ a_{11} &= \frac{M}{\hat{\alpha}^2} + (L-N_{\checkmark})\hat{\lambda}T^{\hat{\alpha}}(\log(T))^2 + \hat{\lambda} \sum_{j=1}^k I_j x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}} (\log(x_{j,m_j}))^2, \\ a_{12} &= a_{21} = -(L-N_{\checkmark})T^{\hat{\alpha}} \log(T) - \sum_{j=1}^k I_j x_{j,m_j}^{\hat{\alpha}} \log(x_{j,m_j}), \\ a_{22} &= \frac{M}{\hat{\lambda}^2}.\end{aligned}$$

اکنون می‌توان فواصل اطمینان تقریبی $1-\alpha$ را برای پارامترها به صورت کلی $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{V}(\hat{\theta})}$ محاسبه نمود، که در آن $z_{\alpha/2}$ چندک $1-\frac{\alpha}{2}$ توزیع نرمال استاندارد است.

۶ مطالعات شبیه‌سازی

برای بررسی نتایج نظری، با در نظر گرفتن $\alpha = (0.5, 1, 2)$ ، $\lambda = (1, 2, 3)$ ، $p = (0.1, 0.2, 0.3)$ ، $n = 5$ و $k = 10$ ($T = 3$ مانند مقادیر انتخاب شده در بلاک و همکاران (۱۹۸۸) و شیو (۱۹۹۹)) داده‌های مربوط به هر مدل در نرم افزار آماری R تولید شده و عملکرد برآوردهای درست‌نمایی بر اساس ۱۰۰,۰۰۰ تکرار مونت کارلو با استفاده از شاخص‌های اریبی، میانگین توان‌های دوم خطا بررسی و توان آماره آزمون نسبت درست‌نمایی و درصد پوشش فواصل اطمینان مجانبی برآورد می‌شود.

اریبی و میانگین توان‌های دوم خطای برآوردها برای مدل‌های ۱ و ۲ به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ گزارش شده است. علیرغم حجم نمونه کوچک، نتایج بیانگر عملکرد مناسب برآوردهای به‌دست آمده است. با توجه به اعمال سانسور نوع II (تعویض در m امین خرابی نوع یک) در مدل ۲ و در نتیجه انتظار داشتن مشاهدات کمتری نسبت به مدل ۱، در اکثر موارد برآوردها در مدل ۱ عملکرد بهتری دارند. با تغییر مقادیر پارامترها، لزوماً رفتار خاصی در عملکرد برآوردها مشاهده نمی‌شود که این امر می‌تواند به دلیل تاثیر پارامترهای وایبول در شکل توزیع آن باشد. روند حائز اهمیت که در جدول‌های ۱ و ۲ دیده می‌شود، افزایش میانگین توان‌های دوم خطا با افزایش p است. به ازای مقادیر ثابت از α و λ (به عنوان مثال $\alpha = 0.5$ و $\lambda = 1$) با افزایش p ، میانگین توان‌های دوم خطای برآورد هر سه پارامتر افزایش می‌یابد. دلیل این

جدول ۰۱. آریبی و میانگین توان‌های دوم خطای پارامترهای مدل ۰۱.

میانگین توان‌های دوم خطا			آریبی			λ	α	p
\hat{p}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	\hat{p}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$			
۰/۰۰۵۲	۰/۱۱۷۸	۰/۰۱۷۵	۰/۰۰۳۹	۰/۲۱۴۰	۰/۰۳۳۲	۱		
۰/۰۰۳۴	۰/۱۶۲۷	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۵۳	۰/۰۶۰۵	۰/۰۱۸۳	۲	۰/۵	
۰/۰۰۲۶	۰/۲۵۹۷	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۳	۰/۰۱۲۹	۰/۰۱۲۷	۳		
۰/۰۰۳۸	۰/۰۷۶۹	۰/۰۴۲۹	۰/۰۰۵۳	۰/۰۴۲۵	۰/۰۴۲۹	۱		۰/۱
۰/۰۰۲۴	۰/۱۵۸۶	۰/۰۲۲۰	۰/۰۰۵۹	-۰/۰۰۵۳	۰/۰۲۲۲	۲	۱	
۰/۰۰۱۹	۰/۲۵۱۰	۰/۰۱۵۵	۰/۰۰۶۳	-۰/۰۰۵۷	۰/۰۱۶۲	۳		
۰/۰۰۱۹	۰/۰۶۹۱	۰/۰۶۱۵	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۸	۰/۰۳۴۴	۱		
۰/۰۰۱۵	۰/۱۵۳۰	۰/۰۴۳۲	۰/۰۰۷۶	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۲۷۶	۲	۲	
۰/۰۰۱۴	۰/۲۶۵۱	۰/۰۶۹۶	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۱۶	۰/۰۳۴۳	۳		
۰/۰۱۰۰	۰/۱۳۷۱	۰/۰۱۹۴	۰/۰۰۷۶	۰/۲۴۰۳	۰/۰۴۲۲	۱		
۰/۰۰۷۳	۰/۱۸۹۸	۰/۰۱۰۵	۰/۰۱۰۴	۰/۰۸۴۵	۰/۰۲۳۷	۲	۰/۵	
۰/۰۰۶۰	۰/۳۲۷۰	۰/۰۰۷۵	۰/۰۱۱۲	۰/۰۴۸۶	۰/۰۱۶۵	۳		
۰/۰۰۷۸	۰/۰۸۲۴	۰/۰۴۸۰	۰/۰۰۹۳	۰/۰۵۱۲	۰/۰۵۳۵	۱		۰/۲
۰/۰۰۵۷	۰/۱۷۸۷	۰/۰۲۷۲	۰/۰۱۱۷	۰/۰۰۸۴	۰/۰۳۰۶	۲	۱	
۰/۰۰۵۰	۰/۳۰۷۹	۰/۰۲۳۰	۰/۰۱۳۱	۰/۰۲۰۴	۰/۰۲۸۱	۳		
۰/۰۰۵۰	۰/۰۷۶۲	۰/۰۹۰۰	۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۰۱	۰/۰۵۵۲	۱		
۰/۰۰۴۶	۰/۲۰۰۱	۰/۱۶۵۹	۰/۰۱۵۹	-۰/۰۰۱۰	۰/۰۷۵۱	۲	۲	
۰/۰۰۴۵	۰/۳۸۳۸	۰/۴۰۷۷	۰/۰۱۷۰	۰/۰۲۵۱	۰/۱۱۷۰	۳		
۰/۰۱۴۱	۰/۱۶۴۳	۰/۰۲۵۸	۰/۰۱۰۳	۰/۲۷۳۳	۰/۰۵۱۹	۱		
۰/۰۱۱۰	۰/۲۳۱۸	۰/۰۱۲۳	۰/۰۱۴۳	۰/۱۲۱۷	۰/۰۳۰۱	۲	۰/۵	
۰/۰۰۹۶	۰/۴۵۴۲	۰/۰۰۹۲	۰/۰۱۶۴	۰/۱۰۳۷	۰/۰۲۱۹	۳		
۰/۰۱۱۵	۰/۰۸۹۷	۰/۰۵۴۷	۰/۰۱۳۴	۰/۰۶۱۷	۰/۰۶۶۱	۱		۰/۳
۰/۰۰۹۳	۰/۲۱۱۸	۰/۰۴۳۰	۰/۰۱۷۱	۰/۰۲۷۸	۰/۰۴۳۶	۲	۱	
۰/۰۰۸۷	۰/۴۴۱۲	۰/۰۴۳۸	۰/۰۱۹۸	۰/۰۷۶۲	۰/۰۴۷۲	۳		
۰/۰۰۸۶	۰/۰۸۵۳	۰/۱۴۱۱	۰/۰۱۹۳	-۰/۰۰۳۱	۰/۰۹۰۳	۱		
۰/۰۰۸۲	۰/۲۴۹۲	۰/۳۴۸۱	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۰۹	۰/۱۳۳۶	۲	۲	
۰/۰۰۸۳	۰/۴۸۰۱	۰/۵۶۴۴	۰/۰۲۱۸	۰/۰۸۶۱	۰/۱۶۹۹	۳		

امر ارتباط مستقیم حجم نمونه با مقدار p است. با افزایش مقدار p ، شانس برطرف شدن خرابی با تعمیر

مینیمال کاهش یافته و لذا تعداد خرابی‌های کمتری مشاهده می‌شود. برای بررسی توان آماره‌های آزمون

جدول ۰۲. اریبی و میانگین توان‌های دوم خطای پارامترهای مدل ۰۲.

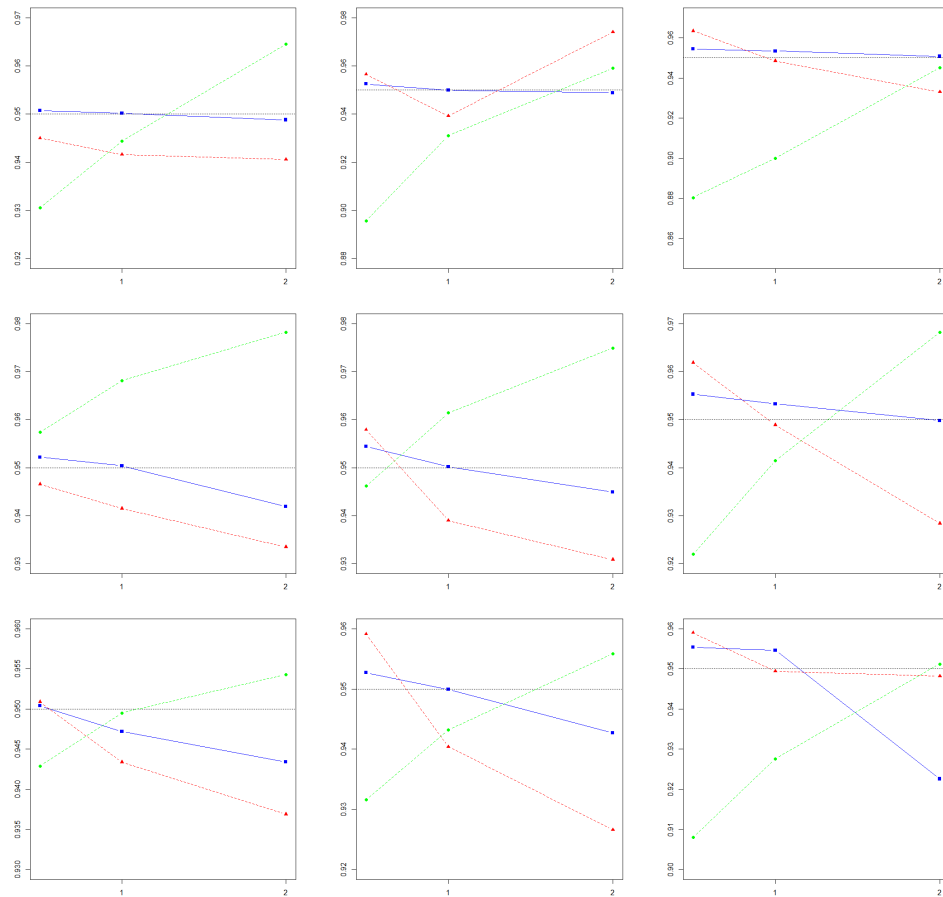
میانگین توان‌های دوم خطا			اریبی			λ	α	p
\hat{p}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	\hat{p}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$			
۰/۰۰۵۲	۰/۱۱۹۳	۰/۰۱۷۶	۰/۰۰۳۶	۰/۲۱۵۵	۰/۰۳۴۱	۱		
۰/۰۰۳۷	۰/۱۷۲۳	۰/۰۰۹۸	۰/۰۰۴۴	۰/۰۷۰۹	۰/۰۲۱۶	۲	۰/۵	
۰/۰۰۳۲	۰/۳۰۱۵	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۴۰	۰/۰۴۵۷	۰/۰۱۸۸	۳		
۰/۰۰۴۰	۰/۰۷۷۸	۰/۰۴۴۶	۰/۰۰۴۵	۰/۰۴۳۵	۰/۰۴۸۱	۱		۰/۱
۰/۰۰۳۱	۰/۱۶۸۶	۰/۰۲۷۷	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۴۰	۰/۰۳۷۱	۲	۱	
۰/۰۰۲۹	۰/۳۰۰۶	۰/۰۲۵۵	۰/۰۰۴۳	۰/۰۳۳۰	۰/۰۴۰۵	۳		
۰/۰۰۲۹	۰/۰۷۳۲	۰/۱۰۱۱	۰/۰۰۴۰	-۰/۰۱۱۴	۰/۰۸۱۸	۱		
۰/۰۰۲۹	۰/۱۶۹۸	۰/۰۹۹۸	۰/۰۰۴۲	-۰/۰۰۱۲	۰/۰۸۶۵	۲	۲	
۰/۰۰۲۹	۰/۳۰۱۶	۰/۰۹۹۸	۰/۰۰۴۵	۰/۰۳۶۱	۰/۰۸۷۵	۳		
۰/۰۱۰۱	۰/۱۳۸۴	۰/۰۱۹۵	۰/۰۰۷۳	۰/۲۴۱۴	۰/۰۴۲۸	۱		
۰/۰۰۷۶	۰/۲۰۱۱	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۸۹	۰/۰۹۴۳	۰/۰۲۶۴	۲	۰/۵	
۰/۰۰۶۷	۰/۳۸۱۸	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۸	۰/۰۸۱۹	۰/۰۲۱۸	۳		
۰/۰۰۸۰	۰/۰۸۳۴	۰/۰۴۹۵	۰/۰۰۸۲	۰/۰۵۲۲	۰/۰۵۷۵	۱		۰/۲
۰/۰۰۶۵	۰/۱۹۱۳	۰/۰۳۲۵	۰/۰۰۸۹	۰/۰۲۰۱	۰/۰۴۴۰	۲	۱	
۰/۰۰۶۳	۰/۳۷۲۵	۰/۰۳۰۷	۰/۰۰۸۸	۰/۰۶۵۵	۰/۰۴۸۸	۳		
۰/۰۰۶۳	۰/۰۷۹۱	۰/۱۲۲۲	۰/۰۰۹۰	-۰/۰۰۷۸	۰/۰۹۶۷	۱		
۰/۰۰۶۲	۰/۱۹۳۳	۰/۱۲۱۲	۰/۰۰۹۰	۰/۰۱۲۸	۰/۱۰۳۶	۲	۲	
۰/۰۰۶۲	۰/۳۷۳۷	۰/۱۲۱۶	۰/۰۰۹۲	۰/۰۶۶۱	۰/۱۰۲۲	۳		
۰/۰۱۴۱	۰/۱۶۵۴	۰/۰۲۵۹	۰/۰۱۰۰	۰/۲۷۴۱	۰/۰۵۲۳	۱		
۰/۰۱۱۳	۰/۲۴۳۷	۰/۰۱۲۸	۰/۰۱۲۷	۰/۱۳۰۰	۰/۰۳۲۲	۲	۰/۵	
۰/۰۱۰۲	۰/۵۱۳۶	۰/۰۱۰۱	۰/۰۱۳۵	۰/۱۳۳۵	۰/۰۲۶۱	۳		
۰/۰۱۱۸	۰/۰۹۰۵	۰/۰۵۵۹	۰/۰۱۲۲	۰/۰۶۲۶	۰/۰۶۹۱	۱		۰/۳
۰/۰۱۰۱	۰/۲۲۵۴	۰/۰۴۶۵	۰/۰۱۳۵	۰/۰۳۸۸	۰/۰۵۳۶	۲	۱	
۰/۰۰۹۸	۰/۵۱۲۷	۰/۰۳۹۳	۰/۰۱۴۲	۰/۱۱۷۲	۰/۰۵۸۲	۳		
۰/۰۰۹۷	۰/۰۸۵۸	۰/۱۵۴۹	۰/۰۱۳۵	-۰/۰۰۵۹	۰/۱۱۸۶	۱		
۰/۰۰۹۶	۰/۲۳۱۱	۰/۱۵۵۳	۰/۰۱۳۵	۰/۰۳۶۷	۰/۱۲۴۷	۲	۲	
۰/۰۰۹۷	۰/۵۰۵۲	۰/۱۵۷۶	۰/۰۱۳۴	۰/۱۲۰۲	۰/۱۲۳۶	۳		

معرفی شده در (۱۲) و (۱۳)، فرض صفر ساده، $(p, \lambda, \alpha) = (0.3, 1, 2)$: H_0 در نظر گرفته شده است. در جدول ۳ ملاحظه می‌شود با افزایش p ، در هر دو مدل مقدار توان در اکثر موارد کاهش داشته است که دلیل آن مجدداً کاهش حجم نمونه (تعداد خرابی‌های مشاهده شده) است. بار دیگر به سبب تاثیر همزمان پارامترهای توزیع وایبول در شکل آن، ملاحظه می‌شود آزمون‌ها برای برخی از مقادیر پارامترها دارای توان بالا و برای برخی از مقادیر (به ویژه $\alpha = 1$) اریب هستند. همچنین با ثابت گرفتن α و p ، توان آزمون با افزایش λ افزایش می‌یابد. احتمال پوشش فواصل اطمینان مجانبی برای مدل ۱ و ۲ در

جدول ۳. توان آزمون در سطح معنی داری ۰/۰۵

		p					
		۰/۳		۰/۲		۰/۱	
α	λ	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۱	مدل ۲
۰/۵	۱	۰/۱۴۹	۰/۴۶۸	۰/۱۲۹	۰/۳۷۷	۰/۳۵۱	۰/۳۲۵
	۲	۰/۲۵۱۷	۰/۴۴۷۵	۰/۲۲۰۳	۰/۳۸۰۷	۰/۳۳۹۴	۰/۳۳۹۴
	۳	۰/۷۸۱۰	۰/۹۰۸۱	۰/۷۲۲۷	۰/۸۶۶۲	۰/۸۲۰۷	۰/۸۲۰۷
۱	۱	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۴
	۲	۰/۰۰۸۰	۰/۰۵۴۴	۰/۰۰۱۵	۰/۰۱۷۱	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۷۰
	۳	۰/۴۹۲۶	۰/۶۶۸۹	۰/۱۹۶۰	۰/۳۷۸۳	۰/۱۹۵۹	۰/۱۹۵۹
۲	۱	۰/۶۶۴۳	۰/۴۱۷۳	۰/۲۰۱۴	۰/۱۴۰۸	*	*
	۲	۰/۹۱۶۷	۰/۶۸۱۷	۰/۴۹۷۹	۰/۱۷۴۰	۰/۰۸۱۸	۰/۰۲۲۹
	۳	۰/۹۹۲۱	۰/۹۰۵۵	۰/۷۱۷۴	۰/۴۴۹۷	۰/۲۱۲۵	۰/۱۰۹۸

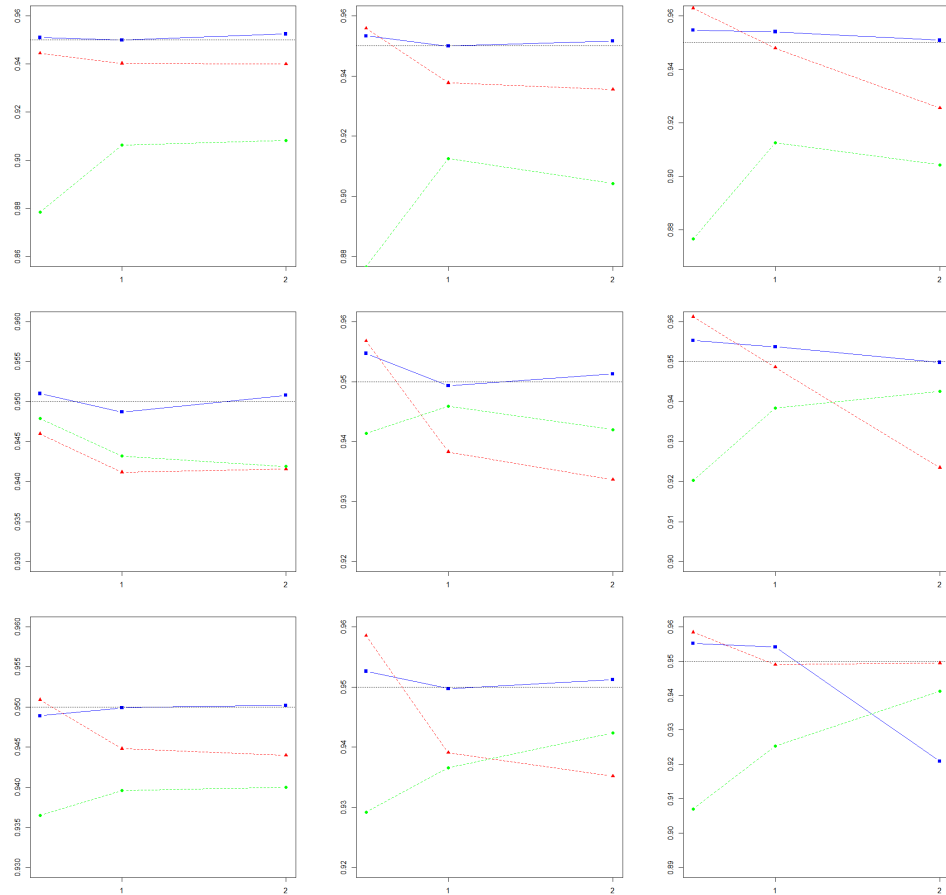
نمودارهای به ترتیب شکل‌های ۲ و ۳ به تصویر کشیده شده است. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که به طور متوسط در بیشتر موارد درصد پوشش فواصل اطمینان ارائه شده نزدیک به ۰/۹۵ است. همچنین مشاهده می‌شود که در اکثر موارد با ثابت در نظر گرفتن پارامترهای α و p در هر دو مدل با افزایش λ درصد پوشش فاصله اطمینان بیان شده برای α و λ کاهش می‌یابد. همچنین در اکثر موارد در مدل‌های ۱ و ۲ با افزایش مقادیر α روند نزولی در احتمال پوشش مقادیر λ ملاحظه می‌شود.



شکل ۲. نمودارهای درصد پوشش پارامترهای مدل ۱ در مقابل مقادیر α ، از بالا به پایین به ترتیب $(0.1, 0.2, 0.3)$ ، p از راست به چپ به ترتیب $(1, 2, 3)$ ، نشان‌های مربع، مثلث و دایره به ترتیب مرتبط با α ، λ و p هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

سیستم تعمیرپذیری با امکان رخداد دو نوع خرابی در نظر گرفته شد. خرابی نوع یک با احتمال q رخ داده و با تعمیر مینیمال برطرف می‌شود، در حالی که احتمال رخداد خرابی نوع دو برابر با p بوده و در این حالت سیستم باید تعویض شود. برای چنین سیستمی دو مدل متفاوت براساس نتایج براون و پروشان (۱۹۸۳) و شیو (۱۹۹۹) در نظر گرفته شد. در مدل ۱، سیستم در زمان T یا در زمان اولین خرابی نوع ۲ هر کدام زودتر رخ دهد تعویض می‌شود. در مدل ۲ محدودیت حداکثر n تعداد تعمیر مینیمال



شکل ۳. نمودارهای درصد پوشش پارامترهای مدل ۲ در مقابل مقادیر α ، از بالا به پایین به ترتیب $(0.1, 0.2, 0.3)$ ، $p =$ از راست به چپ به ترتیب $(1, 2, 3)$ ، نشان‌های مربع، مثلث و دایره به ترتیب مرتبط با α ، λ و p هستند.

نیز اضافه می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع وایبول به عنوان توزیع طول عمر اولیه سیستم، الگوریتم‌هایی برای محاسبه برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل، شامل پارامترهای توزیع طول عمر وایبول (α) و پارامتر اثر تعمیر (p)، ارائه شد. بعلاوه آزمون نسبت درست‌نمایی و فواصل اطمینان مجانبی برای پارامترهای مدل مورد بحث قرار گرفت. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، آزمون نسبت درست‌نمایی و توان متناظر آن، فواصل اطمینان مجانبی و درصد پوشش مقادیر واقعی پارامترهای مورد نظر توسط داده‌های شبیه‌سازی شده برای هر دو مدل محک زده شدند. همان طور که به دلیل متوسط حجم نمونه بیشتر در مدل

۱ انتظار می‌رفت، نتایج نیز نشان دادند که به طور متوسط اریبی و میانگین توان‌های دوم خطای برآوردها در مدل ۱ نسبت به مدل ۲ کمتر و درصد پوشش مقادیر واقعی پارامترها نسبت به مدل ۲ بیشتر است. شایان ذکر است که توابع درست‌نمایی ارائه شده کلی هستند و بر اساس آنها می‌توان استنباط آماری برای هر توزیع اولیه دلخواه دیگری نیز انجام داد. همچنین روش مورد استفاده در این مقاله را می‌توان برای سایر مدل‌های تعمیر و نگهداری به کار برد و به استنباط آماری در آنها پرداخت.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم تقدیر و تشکر می‌شود که با صرف وقت، مطالعه دقیق و ارائه پیشنهادات ارزنده بر کیفیت مقاله افزودند. از رهنمودهای ارزنده و ویرایش ادبی سردبیر محترم و هیئت تحریریه مجله نیز تقدیر می‌شود.

مراجع

چهنکندی، م. (۱۳۹۸)، برخی از ویژگی‌های سیستم‌های k از n قابل تعمیر، *مجله علوم آماری*، ۱۳، ۳۸۵-۴۰۴.

صفائی، ف. و احمدی، ج. (۱۳۹۴)، مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر براساس توابع نرخ خرابی و احتمال تعمیر مینیمال، *مجله علوم آماری*، ۹، ۶۱-۷۶.

Block, H. W., Borges, W. S. and Savits, T. H. (1985), Age-Dependent Minimal Repair, *Journal of Applied Probability*, **22**, 370-385.

Block, H. W., Borges, W. S. and Savits, T. H. (1988), A General Age Replacement Model with Minimal Repair, *Naval Research Logistics*, **35**, 365-372.

Brown, M. and Proschan, F. (1983), Imperfect Repair, *Journal of Applied Probability*, **20**, 851-859.

Cheng, G. Q. and Li, L. (2012), A Geometric Process Repair Model with Inspections and its Optimization, *International Journal of Systems Science*, **43**, 1650-1655.

Sheu, S. H. (1999), Extended Optimal Replacement Model for Deteriorating Systems, *European Journal of Operational Research*, **112**, 503-516.

Sheu, S. H., Chen, Y. L., Chang, C. C. and Zhang, Z. G. (2012), A Block Replacement Policy for Systems Subject to Non-Homogeneous Pure Birth Shocks, *IEEE Transactions on Reliability*, **61**, 741-748.

Sheu, S. H., Chen, Y. L., Chang, C. C. and Zhang, Z. G. (2013), Optimal Number of Repairs Before Replacement for a System Subject to Shocks of a Non-Homogeneous Pure Birth Process, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**, 73-81.

Sheu, S. H., Chen, Y. L., Chang, C. C. and Zhang, Z. G. (2016), A Note on a Two Variable Block Replacement Policy for a System Subject to Non-Homogeneous Pure Birth Shocks, *Applied Mathematical Modelling*, **40**, 3703-3712.

Sheu, S. H. and Griffith, W. S. (1996), Optimal Number of Minimal Repairs before Replacement of a System Subject to Shocks, *Naval Research Logistics (NRL)*, **43**, 319-333.

Tsai, H. N., Sheu, S. H. and Zhang, Z. G. (2017), A Trivariate Optimal Replacement Policy for a Deteriorating System Based on Cumulative Damage and Inspections, *Reliability Engineering and System Safety*, **160**, 74-88.

The Analysis of Weibull Lifetime Data Subject to Imperfect Repair

Kamranfar. H., Etminan. J. and Chahkandi. M.

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Abstract: A repairable system with two types of failures is studied. Type I failure (minor failure) is removed by a minimal repair, whereas type II failure (catastrophic failure) is modified by an unplanned replacement. The first failure of the system follows a Weibull probability distribution and two maintenance policies are considered. In the first policy, the system is replaced at time T or the first type II failure, and in the second policy, the system is replaced at the n th type I failure, the first type II failure or at time T , whichever takes place first. This paper aims to derive a general representation for the likelihood function of the proposed models. The likelihood-ratio test statistic, maximum likelihood estimators and asymptotic confidence intervals for the parameters are also found. Finally, a Monte Carlo simulation is conducted to illustrate the results.

Keywords: Statistical inference, Imperfect repair, Repairable system, Monte Carlo simulation.

Mathematics Subject Classification (2010): 90B25, 62N02.