مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۳۱۷ – ۳۲۸
DOI: 10.29252/jss.15.2.317
مقاله پژوهشی

کران‌های جدیدی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری

حمزه آگاهی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۲۵   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۴/۱۶

چکیده: در این مقاله، ابتدا کران‌های جدیدی برای انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری چپ و راست بر پایه فرآیندهای تصادفی محدب ارائه می‌شود. سپس محدوده‌ای پیشنهاد می‌شود که شامل ترکیبی خطی از انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری چپ و راست است. سرانجام، نتایج قبلی ارائه شده در این موضوع بهبود داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: فرایندهای تصادفی، انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری، فرایندهای تصادفی محدب، میانگین–مربع پیوسته.

۱ مقدمه

مفهوم فرایندهای تصادفی محدب اولین بار توسط نیکودم (۱۹۸۰) ارائه و سپس به یک تعریف بنیادی در فرایندهای تصادفی تبدیل شد. در این بخش مفاهیم مقدماتی در حوزه فرایندهای تصادفی محدب و انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی از منابع شاکد و همکاران (۱۹۸۸)، سوبسزیک (۱۹۹۱) و نیکودم (۱۹۸۰) بیان می‌شوند.

تعریف ۱. فرض کنید $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی باشد به طوری که برای هر $t \in I$، $E\left[X^۲(t,\cdot)\right] < \infty$، که در آن $E[X(t,\cdot)]$ امید ریاضی فرایند تصادفی $X(t,\cdot)$ است. متغیر تصادفی

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: حمزه آگاهی، h_agahi@nit.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15 60G05.

$Y:\Omega\to\mathbb{R}$ نسبت به X، میانگین مربع انتگرال‌پذیر تصادفی[1] روی $[a,b]\subset I$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله‌ای از دیوارک‌ها در بازه $[a,b]$ مانند $a=t_۰<t_۱<\cdots<t_n=b$ و برای هر $\Theta_k\in[t_{k-۱},t_k]$، $k=۱,...,n$،

$$\lim_{n\to\infty}E\Big[\Big(\sum_{k=۱}^{n}X(\Theta_k,\cdot)(t_k-t_{k-۱})-Y\Big)^۲\Big]=۰.$$

آنگاه قرار داده می‌شود

$$Y(\cdot)\overset{\text{a.e.}}{=}\int_a^b X(s,\cdot)ds. \tag{۱}$$

تعریف ۲. الف) فرایند تصادفی X میانگین مربع پیوسته[1] در بازه I نامیده می‌شود اگر برای هر $t_۰\in I$،

$$\lim_{t\to t_۰}E\Big[\Big(X(t,\cdot)-X(t_۰,\cdot)\Big)^۲\Big]=۰.$$

ب) فرایند تصادفی $X:I\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\gamma\in[۰,۱]$ و $a,b\in I$، نابرابری

$$X(\gamma u+(۱-\gamma)v,\cdot)\overset{\text{a.e.}}{\leqslant}\gamma X(u,\cdot)+(۱-\gamma)X(v,\cdot), \tag{۲}$$

برقرار باشد. اگر $\gamma=\frac{۱}{۲}$، آنگاه X جنسن-محدب[2] نامیده می‌شود.

تذکر ۱. (کوتریس ، ۲۰۱۲)
الف) اگر فرایند تصادفی X جنسن-محدب و میانگین-مربع پیوسته باشد، آنگاه X محدب است.
ب) اگر $X:I\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی محدب و $t_۰\in I$، آنگاه متغیر تصادفی $A:\Omega\to\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $X(t,\cdot)\overset{\text{a.e.}}{\geqslant}A(\cdot)\big(t-t_۰\big)+X\big(t_۰,\cdot\big)$

در قضیه زیر کوتریس (۲۰۱۲، ۲۰۱۳) کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ

[1] Mean-square stochastic integrable
[1] Mean-square continuous
[2] Jensen-convex

تصادفی (۱) را به کمک نابرابری هرمیت–هادامارد (۳) بر پایه فرایندهای تصادفی محدب ارائه داد. سپس آگاهی (۱۳۹۶) نشان داد که نابرابری (۳) با اعمال شرایط دیگری روی فرایند تصادفی نیز برقرار است.

قضیه ۱. (کوتریس ، ۲۰۱۲) فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن–محدب، میانگین–مربع پیوسته در بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $a, b \in I$، نابرابری هرمیت–هادامارد

$$X(\frac{a+b}{۲}, \cdot) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{۲}, \tag{۳}$$

برقرار است.

حافظ (۲۰۰۴) انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری [1] چپ و راست را به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{\alpha}_{a^+}\left[X\right]\left(z\right) &= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_a^z (z-s)^{\alpha-۱}X\left(s,\cdot\right)ds \quad z>a,\\
\mathbb{I}^{\alpha}_{b^-}\left[X\right]\left(z\right) &= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_z^b (s-z)^{\alpha-۱}X\left(s,\cdot\right)ds \quad z<b.
\end{aligned}$$

تعریف کرد. آگاهی و باباخانی (۲۰۱۶) سعی در ارائه یک محدوده و در واقع ارائه کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری داشتند. نتایج آن‌ها فقط درباره مجموع انتگرال‌های تصادفی کسری چپ و راست بود. آنها برای مجموع انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری چپ و راست کران‌هایی ارائه کردند.

قضیه ۲. (آگاهی و باباخانی ، ۲۰۱۶) فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن–محدب، میانگین–مربع پیوسته در بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $u, v \in I$، نابرابری زیر برقرار است، که در آن $\alpha > ۰$.

$$\begin{aligned}
X\big(\frac{u+v}{۲},\cdot\big) &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{۲(v-u)^{\alpha}}\Big(\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}\left[X\right]\left(v\right)+\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}\left[X\right]\left(u\right)\Big)\\
&\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{۲}.
\end{aligned} \tag{۴}$$

تذکر ۲. با قرار دادن $\alpha = ۱$ در قضیه ۲، قضیه ۱ به دست می‌آید.

---
[1] Fractional mean-square stochastic integral

به تازگی تعمیم‌های جدیدی از انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری توسط خان و خان (۲۰۲۱) و آگاهی و همکاران (۲۰۱۹) و سپس اثبات نابرابری هرمیت-هادامارد روی آن‌ها برای فرایندهای تصادفی محدب ارائه شده است. این نتایج نیز بر مجموع انتگرال‌های تصادفی کسری تعمیم یافته چپ و راست استوار است. در ادامه با شرایط قضیه ۲، برای $\lambda \in [۰, ۱]$، کران‌های بالایی و پائینی ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}\lambda X\Big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\Big) &+ (۱-\lambda)X\Big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\Big)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^{\alpha}}\Big(\lambda\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}[X](v)+(۱-\lambda)\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}[X](u)\Big)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha\lambda-\lambda+۱}{\alpha+۱}X(u,\cdot)+\frac{(\lambda+\alpha-\alpha\lambda)}{\alpha+۱}X(v,\cdot),\end{aligned}$$

در حالت‌های خاص داریم.

الف) با انتخاب $\lambda = \frac{۱}{۲}$، قضیه ۲ را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}X\Big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\Big)+\frac{۱}{۲}X\Big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\Big) &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{۲(v-u)^{\alpha}}\Big(\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}[X](v)+\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}[X](u)\Big)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{۲}\ .\end{aligned} \tag{۵}$$

بهبود داد. واضح است نابرابری (۵) کران پایین بهتری از نابرابری (۴) در قضیه ۲ است زیرا طبق تعریف فرایند تصادفی محدب و به کمک نابرابری (۲)، داریم:

$$\begin{aligned}X\Big(\frac{u+v}{۲},\cdot\Big) &= X\Big(\frac{۱}{۲}\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱}+\frac{۱}{۲}\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\Big)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{۱}{۲}X\Big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\Big)+\frac{۱}{۲}X\Big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\Big).\end{aligned}$$

ب) با انتخاب $\lambda = ۱$، کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری چپ به دست می‌آید:

$$X\Big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\Big) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}[X](v) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{\alpha+۱}.$$

ج) با انتخاب $\lambda = \circ$، کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری راست ارائه می‌شود:

$$X\big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+1},\cdot\big) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}\big[X\big](u) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha X\big(v,\cdot\big)+X\big(u,\cdot\big)}{\alpha+1}.$$

نابرابری‌های بالا به تنهایی نتایج و کران‌های جدیدی برای انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری بر پایه فرایند تصادفی محدب هستند. هم‌چنین تعمیم نتایج کوتریس (۲۰۱۲) به شمار می‌روند. در واقع این مقاله نه فقط نتایج و کران‌های جدیدی برای انتگرال میانگین مربعِ تصادفی کسری بر پایه فرایند تصادفی محدب ارائه می‌کند بلکه نتایج قبلی ارائه شده در این موضوع را بهبود می‌بخشد.

۲ نتایج اصلی

لم ۱. فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته در بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $u, v \in I$، نابرابری‌های زیر برقراراند، که در آن $\alpha > \circ$.

$$X\big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+1},\cdot\big) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}\big[X\big](v) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha X\big(u,\cdot\big)+X\big(v,\cdot\big)}{\alpha+1}\quad, \qquad (۶)$$

$$X\big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+1},\cdot\big) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}\big[X\big](u) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha X\big(v,\cdot\big)+X\big(u,\cdot\big)}{\alpha+1}. \qquad (۷)$$

برهان. برای اثبات سمت چپ نابرابری (۶)، اگر X یک فرایند تصادفی جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته در بازه I باشد، آنگاه طبق تذکر ۱ قسمت الف X یک فرایند تصادفی محدب است. حال طبق تذکر ۱ قسمت ب با انتخاب $t_\circ = \frac{\alpha u+v}{\alpha+1} \in I$، متغیر تصادفی $A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$X(t,\cdot) \overset{\text{a.e.}}{\geqslant} A(\cdot)\big(t-\frac{\alpha u+v}{\alpha+1}\big)+X\big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+1},\cdot\big).$$

سپس طبق خواص اولیه انتگرال میانگین مربعِ تصادفی نابرابری زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}_{u^+}^{\alpha}\big[X\big](v) &= \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}\int_u^v (v-t)^{\alpha-۱}X(t,\cdot)dt\\ &\overset{\text{a.e.}}{\geqslant} \frac{\alpha A(\cdot)}{(v-u)^{\alpha}}\int_u^v (v-t)^{\alpha-۱}tdt - \frac{\alpha A(\cdot)}{(v-u)^{\alpha}}\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱}\int_u^v (v-t)^{\alpha-۱}dt\\ &+ \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}X\big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\big)\int_u^v (v-t)^{\alpha-۱}dt\\ &= \frac{\alpha A(\cdot)}{(v-u)^{\alpha}}\frac{(v-u)^{\alpha}\big(\alpha u+v\big)}{\alpha\big(\alpha+۱\big)} - \frac{\alpha A(\cdot)}{(v-u)^{\alpha}}\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱}\frac{(v-u)^{\alpha}}{\alpha}\\ &+ \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}X\big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\big)\frac{(v-u)^{\alpha}}{\alpha}\\ &= X\big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\big).\end{aligned}$$

بنابراین

$$X\big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\big) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}_{u^+}^{\alpha}\big[X\big](v),$$

که سمت چپ نابرابری (۶) را اثبات می‌کند. برای اثبات سمت راست نابرابری (۶) ، کافی است در نابرابری (۲)، $t=\gamma u+(۱-\gamma)v$ و $\gamma=\frac{t-v}{u-v}$ قرار داده شود. لذا طبق شرط تحدب فرایند تصادفی X نابرابری

$$X\big(t,\cdot\big) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{X\big(v,\cdot\big)-X\big(u,\cdot\big)}{v-u}t+\frac{X\big(v,\cdot\big)u-X\big(u,\cdot\big)v}{u-v}. \qquad (۸)$$

برقرار است. بنابراین طبق خواص اولیه انتگرال میانگین مربعِ تصادفی، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}\big[X\big](v) &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha\big[X\big(v,\cdot\big)-X\big(u,\cdot\big)\big]}{(v-u)^{\alpha+1}}\int_u^v (v-t)^{\alpha-1}t\,dt\\ &+ \frac{\alpha\big[X\big(u,\cdot\big)v-X\big(v,\cdot\big)u\big]}{(v-u)^{\alpha+1}}\int_u^v (v-t)^{\alpha-1}dt\\ &= \frac{\alpha\big[X\big(v,\cdot\big)-X\big(u,\cdot\big)\big]}{(v-u)^{\alpha+1}}\frac{(v-u)^{\alpha}(v+\alpha u)}{\alpha\big(\alpha+1\big)}\\ &+ \frac{\alpha\big[X\big(u,\cdot\big)v-X\big(v,\cdot\big)u\big]}{(v-u)^{\alpha+1}}\frac{(v-u)^{\alpha}}{\alpha}\\ &= \frac{1}{\alpha+1}\big(X\big(v,\cdot\big)+\alpha X\big(u,\cdot\big)\big),\end{aligned}$$

که اثبات سمت راست نابرابری (۶) را تکمیل می‌کند. سپس مشابه اثبات سمت چپ نابرابری (۶)، با انتخاب $t_\circ = \frac{u+\alpha v}{\alpha+1} \in I$ و طبق تذکر ۱ قسمت ب، متغیر تصادفی $A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$X(t,\cdot) \overset{\text{a.e.}}{\geqslant} A(\cdot)\big(t-\frac{u+\alpha v}{\alpha+1}\big)+X\big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+1},\cdot\big).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}\big[X\big](u) &= \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}X(t,\cdot)dt\\
&\overset{\text{a.e.}}{\geqslant} \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}\big[A(\cdot)\big(t-\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱}\big)\\
&+ X\big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\big)\big]dt\\
&= \frac{\alpha A(\cdot)}{(v-u)^{\alpha}}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}tdt\\
&- \frac{\alpha A(\cdot)}{(v-u)^{\alpha}}\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}dt\\
&+ \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}X\big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\big)\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}dt\\
&= X\big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\big).
\end{aligned}$$

که سمت چپ نابرابری (۷) را اثبات می‌کند. به طور مشابه و به کمک نابرابری (۸)، داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^{\alpha}}\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}\big[X\big](u) &= \frac{\alpha}{(v-u)^{\alpha}}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}X\big(t,\cdot\big)dt\\
&\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha\big[X\big(v,\cdot\big)-X\big(u,\cdot\big)\big]}{(v-u)^{\alpha+۱}}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}t\,dt\\
&+ \frac{\alpha\big[X\big(u,\cdot\big)v-X\big(v,\cdot\big)u\big]}{(v-u)^{\alpha+۱}}\int_u^v (t-u)^{\alpha-۱}\,dt\\
&= \frac{۱}{\alpha+۱}\big(\alpha X\big(v,\cdot\big)+X\big(u,\cdot\big)\big).
\end{aligned}$$

که اثبات سمت راست نابرابری (۷) را تکمیل می‌کند.

تذکر ۳. با قرار دادن $\alpha = ۱$ در لم ۱، قضیه ۱ ارائه شده توسط کوتریس (۲۰۱۲) به دست می‌آید.

قضیه ۳. فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته

در بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $u, v \in I$ و $\lambda \in [۰, ۱]$، نابرابری زیر برقرار است، که در آن $\alpha > ۰$.

$$\begin{aligned}\lambda X\left(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\right) &+ (۱-\lambda)X\left(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\right)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^\alpha}\left(\lambda \mathbb{I}^\alpha_{u^+}[X](v) + (۱-\lambda)\mathbb{I}^\alpha_{v^-}[X](u)\right)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\alpha\lambda-\lambda+۱}{\alpha+۱}X(u,\cdot) + \frac{(\lambda+\alpha-\alpha\lambda)}{\alpha+۱}X(v,\cdot).\end{aligned}$$

برهان. به کمک لم ۱ نابرابری‌های

$$\begin{aligned}\lambda X\left(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\right) &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\lambda\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^\alpha}\mathbb{I}^\alpha_{u^+}[X](v) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\lambda[\alpha X(u,\cdot)+X(v,\cdot)]}{\alpha+۱},\\ (۱-\lambda)X\left(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\right) &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{(۱-\lambda)\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^\alpha}\mathbb{I}^\alpha_{v^-}[X](u)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{(۱-\lambda)[\alpha X(v,\cdot)+X(u,\cdot)]}{\alpha+۱}.\end{aligned}$$

برقرار هستند، که با جمع طرفین به صورت زیر، اثبات تکمیل می‌شود.

$$\begin{aligned}\lambda X\left(\frac{\alpha u+v}{\alpha+۱},\cdot\right) &+ (۱-\lambda)X\left(\frac{u+\alpha v}{\alpha+۱},\cdot\right)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{(v-u)^\alpha}\left(\lambda \mathbb{I}^\alpha_{u^+}[X](v) + (۱-\lambda)\mathbb{I}^\alpha_{v^-}[X](u)\right)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\lambda[\alpha X(u,\cdot)+X(v,\cdot)]}{\alpha+۱} + \frac{(۱-\lambda)[\alpha X(v,\cdot)+X(u,\cdot)]}{\alpha+۱}\\ &= \frac{\alpha\lambda-\lambda+۱}{\alpha+۱}X(u,\cdot) + \frac{(\lambda+\alpha-\alpha\lambda)}{\alpha+۱}X(v,\cdot).\end{aligned}$$

با انتخاب $\lambda = \frac{۱}{۲}$ در قضیه ۳، قضیه ۲ ارائه شده توسط آگاهی و باباخانی (۲۰۱۶) بهبود می‌یابد.

فرع ۱. فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته در

بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $u, v \in I$، نابرابری زیر برقرار است، که در آن $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X\Big(\frac{\alpha u+v}{\alpha+1},\cdot\Big)+\frac{1}{2}X\Big(\frac{u+\alpha v}{\alpha+1},\cdot\Big) &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(v-u)^{\alpha}}\big(\mathbb{I}^{\alpha}_{u^+}[X](v)+\mathbb{I}^{\alpha}_{v^-}[X](u)\big)\\ &\overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}.\end{aligned}$$

مثال ۱. فرایند تصادفی به فرم $X(t,\cdot) = t^2 A(\cdot) + B(\cdot)$ را در نظر بگیرید که در آن $A(\cdot)$ و $B(\cdot)$ به ترتیب متغیرهای تصادفی از توزیع نمایی با میانگین ۲ و ۴ هستند. جدول ۱ نشان دهنده مقادیر شبیه‌سازی شده و کران‌های انتگرال‌های تصادفی کسری $I_0 = I^{\alpha=2}_{0^+}[X](1)$ و $I_1 = I^{\alpha=2}_{1^-}[X](0)$ با استفاده از تولید ۱۰ عدد تصادفی از توزیع‌های نمایی فوق است.

جدول ۱. مقادیر شبیه‌سازی I_0 و I_1 و کران‌های آن‌ها

کران بالا	I_0	کران پایین	کران بالا	I_1	کران پایین
۰٫۴۵	۰٫۲۸	۰٫۲۳	۰٫۸۰	۰٫۶۳	۰٫۵۷
۲٫۶۶	۲٫۰۱	۱٫۸۰	۳٫۹۷	۳٫۳۲	۳٫۱۰
۱٫۷۴	۱٫۴۳	۱٫۳۲	۲٫۳۸	۲٫۰۶	۱٫۹۶
۴٫۱۸	۴٫۰۸	۴٫۰۵	۴٫۳۶	۴٫۲۷	۴٫۲۴
۰٫۷۴	۰٫۶۱	۰٫۵۷	۰٫۹۹	۰٫۸۶	۰٫۸۲
۱٫۱۱	۰٫۷۸	۰٫۶۷	۱٫۷۶	۱٫۴۳	۱٫۳۲
۱٫۶۹	۱٫۵۸	۱٫۵۵	۱٫۹۰	۱٫۷۹	۱٫۷۶
۳٫۸۹	۳٫۸۶	۳٫۸۵	۳٫۹۵	۳٫۹۲	۳٫۹۱
۴٫۵۱	۴٫۱۶	۴٫۰۴	۵٫۲۲	۴٫۸۷	۴٫۷۵
۰٫۹۴	۰٫۷۷	۰٫۷۲	۱٫۲۷	۱٫۱۱	۱٫۰۵

۳ بحث و نتیجه‌گیری

کران‌های جدیدی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری چپ و راست ارائه شد. ابتدا در لم ۱ به ترتیب کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری چپ و راست ارائه شد که تعمیم‌های جدیدی از نتایج کوتریس (۲۰۱۲) روی انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی کسری است. سپس به کمک این لم‌ها به بیان یک قضیه کلی در این زمینه پرداختیم و در فرع ۱ نشان دادیم که در فرایندهای تصادفی محدب، نتایج ارائه شده توسط آگاهی و باباخانی (۲۰۱۶) روی انتگرال‌های میانگین

مربعِ تصادفی کسری را می‌توان نه فقط تعمیم داد بلکه بهبود بخشید.

تقدیر و تشکر

نویسنده از داوارن، سردبیر و ویراستار محترم مجله که نظرات و پیشنهادهای ارزشمندشان باعث ارتقای سطح مقاله شد صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نماید. بعلاوه از حمایت دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل از طریق اعتبار پژوهشی $BNUT/$۳۹۲۱۰۰/۱۴۰۰ قدردانی می‌شود.

مراجع

آگاهی، ح. (۱۳۹۶). کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی، مجله علوم آماري، ۱۱(۲)، ۲۱۷-۲۰۷.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (۱۹۸۸), Stochastic Convexity and its Applications, Advances in Applied Probability, ۲۰, ۴۲۷-۴۴۶.

Sobczyk, K. (۱۹۹۱), *Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering*, Kluwer, Dordrecht.

Hafiz, F. M. (۲۰۰۴), The Fractional Calculus for Some Stochastic Processes, Stochastic Analysis and Applications, ۲۲, ۵۰۷-۵۲۳.

Agahi, H. and Babbakhani, A. (۲۰۱۶), On fractional stochastic inequalities related to Hermite-Hadamard and Jensen types for convex stochastic processes, Aequationes mathematicae, ۹۰, ۱۰۳۵-۱۰۴۳.

Agahi, H., Karamali, G. and Yadollahzadeh, M. (۲۰۱۹), On Fractional Stochastic Inequalities Related to Hermite-Hadamard and Jensen Types for Convex Stochastic Processes, Results in Mathematics, ۷۴, ۱-۱۵.

Khan, T. U. and Khan, M. A. (۲۰۲۱), New Generalized Mean Square Stochastic Fractional Operators with Applications, Chaos، Solitons & Fractals، ۱۴۲, ۱۱۰۴۵۲.

Kotrys, D. (۲۰۱۲), Hermite-Hadamard Inequality for Convex Stochastic Processes, Aequationes Mathematicae, ۸۳, ۱۴۳-۱۵۱.

Kotrys, D. (۲۰۱۳), Remarks on Strongly Convex Stochastic Processes, Aequationes Mathematicae, ۸۶, ۹۱-۹۸.

Nikodem, K. (۱۹۸۰), On Convex Stochastic Processes, Aequationes Mathematicae, ۲۰, ۱۸۴-۱۹۷.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021
Vol. 15, No. 2, pp 317-328
DOI: 10.29252/jss.15.2.317

New Bounds for Fractional Mean–Square Stochastic Integrals

Agahi, H.
Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

Abstract: This paper presents new bounds for the left and right fractional mean-square stochastic integrals based on convex stochastic processes. Then a range is proposed that includes a linear combination of the left and right fractional mean-square stochastic integrals. Finally, the previous results presented in this subject are improved.

Keywords: Stochastic processes, Fractional Mean-square stochastic integrals, Convex stochastic processes, Mean-square continuous.

Mathematics Subject Classification (2010): 60G05, 60E15.