مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۴۸۱ – ۵۰۴
DOI: 10.29252/jss.15.2.481
مقاله پژوهشی

مسئله بهینه‌سازی در سیستم‌های سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی از خانواده توزیع‌های سری توانی

مطهره زعیم‌زاده[1]، جعفر احمدی[1]، بهاره خطیب آستانه[2]

[1] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
[2] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۲   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۶/۰۸

چکیده: در این مقاله الگوی طول عمر برمبنای سیستم‌های سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی از خانواده توزیع‌های سری توانی در نظر گرفته شد. ابتدا نتایج نظری پایه به‌دست آمده که در ادامه از آن‌ها در مسئله بهینه‌سازی تعداد مؤلفه‌ها در سیستم‌های سری استفاده شده است. متوسط طول عمر سیستم، تابع هزینه و زمان کل آزمایش به عنوان معیارهای بهینه‌سازی تعداد مؤلفه‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مسئله با جزئیات برای حالتی که طول عمر مؤلفه‌های سیستم دارای توزیع وایبل و تعداد مؤلفه‌ها دارای توزیع هندسی، لگاریتمی یا پواسن بریده‌شده در صفر باشد، بررسی و نتایج به صورت تحلیلی و عددی بیان شده است. در پایان با ارائه یک مثال، از نتایج به‌دست آمده برای تحلیل داده‌های واقعی استفاده شده است.
واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی، توزیع هندسی، سیستم سری، متوسط زمان کل آزمایش، توزیع وایبل.

۱ مقدمات و مفاهیم

افزایش کارائی کارکرد سیستم، کاهش هزینه‌های سیستم، افزایش متوسط زمان کارکرد سیستم، چگونگی نگهداری و انجام تعمیرات پیشگیرانه، تعیین سیاست‌های مناسب برای زمان‌های بازدید و تعویض سیستم

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: جعفر احمدی، ahmadi-j@um.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05 90B25.

از جمله موضوعات مهم در مسئله بهینه‌سازی در مباحث قابلیت اعتماد است. تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده و در حال انجام است. از جمله می‌توان به کارهای انجام شده توسط صفائی و احمدی (۱۳۹۴)، ایرانمنش و همکاران (۱۳۹۷) و بصیری (۱۳۹۹) اشاره نمود. یک سیستم با n مؤلفه را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که سیستم از کار می‌افتد، اگر و تنها اگر k مؤلفه از n مؤلفه آن از کار بیفتد. در مطالعات قابلیت اعتماد به این نوع سیستم‌ها، F سیستم‌های k از n می‌گویند. سیستم‌های سری و موازی حالت‌های خاص F سیستم k از n هستند، که به ترتیب به‌ازای $k = ۱$ و $k = n$ به‌دست می‌آیند. شایان ذکر است که قابلیت اعتماد یک سیستم را می‌توان از طریق افزونگی و نگهداری مناسب افزایش داد، که معمولی‌ترین مدل افزونگی یا به‌عبارت دیگر مدل دارای عضو مازاد، سیستم موازی استاندارد است. بارلو و پروشان (۱۹۶۵) با تحلیل نموداری نشان داده‌اند که با تغییر زمان جایگذاری یا افزایش تعداد مؤلفه‌های مازاد، می‌توان متوسط طول عمر سیستم را برای یک مدت زمان مشخص افزایش داد. همانطور که ذکر شد یکی از متداول‌ترین روش‌های افزونگی موازی‌سازی است، بنابراین این سوال مطرح می‌شود که چه تعداد مؤلفه باید به‌طور موازی کنار هم قرار گیرند؟ تعداد مؤلفه‌ها برای تمام سیستم‌ها با هر ساختاری، می‌تواند موضوع مهمی برای تحقیق باشد، که توسط محققین زیادی از جمله ناکاگاوا (۲۰۰۸) مورد توجه قرار گرفته است. در مباحث قابلیت اعتماد سیستم‌ها، در برخی از مطالعات تعداد مؤلفه‌ها را غیر تصادفی و ثابت در نظر گرفته‌اند. به طور مثال ناکاگاوا و ژائو (۲۰۱۲) در سیستم‌های موازی زمانی که تعداد مؤلفه‌ها ثابت ولی نامعلوم است، تعداد بهینه مؤلفه‌ها را با مینیمم کردن میانگین نرخ هزینه محاسبه کرده‌اند. ایتو و همکاران (۲۰۱۷) نیز تعداد بهینه مؤلفه‌ها را در G سیستم‌های k از n وقتی تعداد مؤلفه‌ها غیر تصادفی باشد، با توجه به نرخ هزینه مورد انتظار[1] به‌دست آورده‌اند. از دیگر منابع موجود قدیمی‌تر در این زمینه می‌توان به ناکاگاوا (۱۹۸۴) و یاسو و همکاران (۱۹۸۸) اشاره کرد. اما در دنیای امروز، چون سیستم‌های واقعی پیچیده و تعداد مؤلفه‌های آن‌ها زیاد می‌باشد، ممکن است تعداد دقیق مؤلفه‌ها را ندانیم. در چنین حالتی می‌توان تعداد مؤلفه‌ها را متغیر تصادفی فرض کرد و یک پیش‌بینی و تخمین برای آن به‌دست آورد. این مسئله، مشابه تصادفی بودن اندازه نمونه است که در بسیاری از مسائل کاربردی، در آمار و احتمال، فرآیندهای تصادفی و سیستم‌های صف‌بندی مطرح می‌شود. برای مطالعه بیشتر در این باره می‌توانید به گوپتا و هانگ (۲۰۱۷) رجوع کنید. شیکد و وانگ (۱۹۹۷) و بارتوزویچ (۲۰۰۱) مقایسه‌های تصادفی مینیمم و ماکسیمم در یک نمونه به اندازه تصادفی N از توزیع‌های عمر را بررسی نموده‌اند. هازرا و همکاران (۲۰۱۴) برخی از ویژگی‌های سالخوردگی سیستم‌های سری و موازی با تعداد

---
[1] Expected cost rate

مؤلفه‌های تصادفی را مطالعه کرده‌اند. مورایس و فراری (۲۰۱۷) نتایجی برای کلاسی از مدل‌های رگرسیونی بر مبنای ساختار سیستم‌های سری و موازی با تعداد مؤلفه‌های تصادفی به‌دست آورده‌اند. اریلماز (۲۰۱۷) تعداد بهینه مؤلفه‌ها و زمان جایگذاری بهینه سیستم را در سیستم‌های موازی وقتی که تعداد مؤلفه‌ها تصادفی است، مورد بررسی و مطالعه قرار داده و تعداد بهینه مؤلفه‌ها را با مینیمم کردن نرخ هزینه مورد انتظار محاسبه کرده است. ایتو و همکاران (۲۰۱۷) تعداد بهینه مؤلفه‌ها و زمان جایگذاری بهینه سیستم را در سیستم‌های k از n با تعداد مؤلفه‌های تصادفی بررسی کرده‌اند.

هدف اصلی این مقاله، با ایده از نتایج ناکاگاوا و ژائو (۲۰۱۲) و اریلماز (۲۰۱۷)، تعیین تعداد بهینه مؤلفه‌ها در سیستم‌های سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی است. منطقی است برای این منظور باید معیارهای بهینگی مناسبی تعریف شود. این معیارها می‌تواند براساس تابع هزینه، متوسط طول عمر سیستم و زمان کل آزمایش بیان شود که در ادامه به مطالعه آن‌ها می‌پردازیم. تابع نرخ خطر یکی از معیارهای معروف در قابلیت اعتماد برای مطالعه سالخوردگی سیستم است. اگر T متغیر تصادفی پیوسته (گسسته) طول عمر با تابع چگالی (جرم) احتمال و توزیع احتمال به ترتیب f و F و تکیه گاه S_T باشد، آنگاه تابع نرخ خطر در حالت پیوسته و گسسته به ترتیب بصورت $h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ و

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t-1)}, \quad t \in S_T, \tag{1}$$

تعریف می‌شود. برای مطالعه حالت گسسته به سالویا و بولینگر (۱۹۸۲) یا ژی و همکاران (۲۰۰۲) مراجعه شود.

در بخش ۲، نتایج نظری پایه‌ای ارائه شده است که در بخش‌های بعدی از آن‌ها استفاده خواهد شد. بخش ۳ شامل مطالعه کلی مسئله بهینه‌سازی است. در بخش ۴ بهینه‌سازی براساس تابع هزینه و متوسط طول عمر مطالعه می‌شود. در بخش ۵ نتایج بهینه‌سازی براساس متوسط زمان کل آزمایش و تابع هزینه ارائه می‌گردد. در بخش ۶ با یک مثال از داده‌های واقعی نتایج نظری بدست آمده بررسی خواهد شد.

۲ سیستم سری با تعداد تصادفی مؤلفه

فرض کنید یک سیستم سری با تعداد تصادفی از مؤلفه‌ها در اختیار داریم، همانطور که ذکر شد با فرض این‌که X_i نشان‌دهنده طول عمر مؤلفه iام ($i \geq 1$) باشد، طول عمر سیستم برابر با $\min\{X_1, \ldots, X_N\}$ است، که در آن N تعداد مؤلفه‌ها در سیستم، یک متغیر تصادفی صحیح و مستقل از X_iها می‌باشد.

همچنین فرض کنید $X_1, \ldots, X_N$ متغیرهای تصادفی طول عمر مؤلفه‌ها، مستقل از هم با تابع توزیع مشترک $F(t)$ هستند. با توجه به این فرضیات در ادامه نتایج نظری پایه‌ای از جمله تابع توزیع و متوسط طول عمر سیستم را به‌دست می‌آوریم. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_N$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F باشند، که در آن N یک متغیر تصادفی گسسته و مستقل از X_iها است، در این صورت اگر $T_N = \min\{X_1, \ldots, X_N\}$، آنگاه تابع قابلیت اعتماد T_N به‌صورت

$$\bar{F}_{T_N}(t) = g_N(\bar{F}(t)), \tag{۲}$$

است، که در آن $g_N(s) = E(s^N)$ تابع مولّد احتمال [1] متغیر تصادفی N است.

برهان: طبق تعریف تابع قابلیت اعتماد و با استفاده از قانون احتمال کل، داریم

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{T_N}(t) &= P(T_N > t) \\
&= \sum_{n_i \in S_N} P(T_N > t \mid N = n_i) P(N = n_i) \\
&= \sum_{n_i \in S_N} P(T_{n_i} > t) P(N = n_i) \\
&= \sum_{n_i \in S_N} [\bar{F}(t)]^{n_i} P(N = n_i) \\
&= g_N(\bar{F}(t)),
\end{aligned}$$

که در آن تساوی سوم، با استفاده از استقلال X_iها و N به‌دست آمده، تساوی چهارم با توجه به تعریف T_N و تساوی آخر از تعریف تابع مولّد احتمال نتیجه شده است.

فرع ۱. با توجه به تابع قابلیت اعتماد T_N در لم ۱، اگر N_1 و N_2 دو متغیر تصادفی صحیح مثبت، مستقل از X_iها باشند به‌طوری‌که $N_1 \leq_{st} N_2$ آنگاه $T_{N_1} \geq_{st} T_{N_2}$ است، که در آن $\leq_{st}$ نشاندهندهٔ ترتیب تصادفی معمولی است. برای مطالعه بیشتر درباره ترتیب‌های تصادفی به شیکد و وانگ (۱۹۹۷) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) رجوع کنید.

[1] Probability generating function

فرض کنید متغیر تصادفی N دارای توزیعی از خانواده سری‌های توانی با تابع جرم احتمال

$$P\{N=n\}=\frac{a_n\theta^n}{b(\theta)},\quad n=۱,۲,\ldots,\quad \theta>۰, \tag{۳}$$

باشد، به‌طوری‌که $a_n>۰$ و تنها به n بستگی دارد و $b(\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\theta^n$ متناهی است. این خانواده شامل تعداد زیادی از توزیع‌های معروف از جمله هندسی، پواسن بریده‌شده در صفر، لگاریتمی، دوجمله‌ای بریده‌شده در صفر و دوجمله‌ای منفی است. برای جزئیات بیشتر درباره توزیع‌های سری‌های توانی به جانسون و همکاران (۲۰۰۵) رجوع کنید. مثالی در مورایس و فراری (۲۰۱۷) آمده است که آن‌ها فرض کرده‌اند دستگاهی دارای N نقص اولیه نامعلوم است و برای از کار افتادن دستگاه لازم است که یکی از N عامل نقص فعال شود. اگر X_i زمان خرابی دستگاه به دلیل نقص iام باشد، که $i=۱,\ldots,N$ است، آنگاه زمان شکست برابر با $T_N=\min\{X_۱,\ldots,X_N\}$ است، بنابراین مسئله یک سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی است. لازم به یاد آوری است که مورایس و فراری (۲۰۱۷) X_iها را متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع $W(\alpha,\beta)$ (وایبل) و N را دارای توزیع سری توانی در نظر گرفته‌اند.

با توجه به لم ۱ و رابطه (۳) تابع توزیع T_N عبارت است از

$$F_{T_N}(t)=۱-\frac{b(\theta\bar{F}(t))}{b(\theta)}. \tag{۴}$$

با توجه به این‌که $b(\theta)$ برحسب θ یک تابع مشتق‌پذیر است، تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم سری، از رابطه (۴)، به‌صورت $f_{T_N}(t)=\frac{\theta f(t)b'(\theta\bar{F}(t))}{b(\theta)}$ به‌دست می‌آید، که $b'(\theta)$ مشتق تابع $b(\theta)$ است. امیدریاضی متغیر تصادفی N با استفاده از رابطه (۳) به سادگی به صورت

$$E(N)=\theta\frac{b'(\theta)}{b(\theta)}, \tag{۵}$$

به‌دست می‌آید. امیدریاضی T_N با توجه به رابطه (۲) به‌صورت

$$E(T_N)=\mu_\theta=\int_۰^\infty g_N(\bar{F}(t))dt, \tag{۶}$$

داده می‌شود. یادآوری می‌شود که $E(T_N)$ را در مباحث قابلیت اعتماد، میانگین زمان تا ازکار افتادگی[1] سیستم نیز می‌گویند. زمان کل آزمایش[2] (TTT) در سیستم‌های k از n با تعداد مولفه‌های ثابت n، کمیت مهم دیگری است که به صورت

$$S_{(k,n)} = \sum_{i=1}^{k} X_{i:n} + (n-k)X_{k:n}, \tag{۷}$$

تعریف می‌شود، به این معنا که در زمان خرابی kامین مؤلفه فعالیت سیستم متوقف می‌شود، این معیار برای سیستم‌های سری برابر با $S_{(1,n)} = nX_{1:n}$ است. با توجه به رابطه (۷)، وقتی تعداد مؤلفه‌ها (N) متغیر تصادفی باشد، زمان کل آزمایش برای سیستم‌های سری برابر با $S_{(1,N)} = NX_{1:N}$ است، بنابراین متوسط آن برابر است با

$$TTT_\theta = \mu_\theta E(N). \tag{۸}$$

در ادامه، توزیع متغیرتصادفی N را سه عضو معروف از کلاس سری‌های توانی، یعنی هندسی، لگاریتمی و پواسن بریده‌شده در صفر در نظر می‌گیریم. توزیع هندسی دارای نرخ خطر ثابت، توزیع لگاریتمی دارای نرخ خطر نزولی و توزیع پواسن بریده‌شده در صفر دارای نرخ خطر صعودی است. همچنین توزیع طول عمر مؤلفه‌ها را وایبل در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌شود که، توزیع وایبل یکی از معروف‌ترین مدل‌های طول عمر است که به دلیل انعطاف‌پذیری آن، کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد و تحلیل بقاء دارد و شامل توزیع‌های نمایی و رایلی نیز است. متغیر تصادفی T دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و β است و با علامت $W(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهند، اگر تابع توزیع احتمال آن به‌صورت

$$F(t) = 1 - \exp\{-(\alpha t)^\beta\}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \tag{۹}$$

باشد. در اینجا α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل توزیع است. تابع نرخ خطر توزیع وایبل به‌صورت $h(t) = \beta\alpha^\beta t^{\beta-1}$ است. واضح است که به‌ازای $\beta < 1$، $\beta = 1$ و $\beta > 1$ تابع نرخ خطر توزیع وایبل به ترتیب نزولی، ثابت و صعودی است.

[1] Mean time to failure
[2] Total time on test

۲.۱ N دارای توزیع هندسی

فرض کنید متغیر تصادفی N، دارای توزیع هندسی با تابع جرم احتمال $P(N=n)=(1-\theta)\theta^{n-1}$، $0<\theta<1$، $n=1,2,\ldots$ باشد، در اینصورت با استفاده از (۱) تابع نرخ خطر آن برابر با $h(n)=1-\theta$ است، که به n بستگی ندارد. اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(1,\beta)$ باشد، آنگاه با توجه به رابطه (۴)، تابع قابلیت اعتماد T_N عبارت است از

$$\bar{F}_{T_N}(t)=\frac{(1-\theta)e^{-t^\beta}}{1-\theta e^{-t^\beta}}. \tag{10}$$

با استفاده از (۶) و (۱۰)، متوسط طول عمر سیستم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mu_\theta=\int_0^\infty \frac{(1-\theta)e^{-t^\beta}}{1-\theta e^{-t^\beta}}dt. \tag{11}$$

با توجه به این‌که $|\theta e^{-t^\beta}|<1$ است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mu_\theta &= \frac{(1-\theta)}{\theta}\sum_{i=1}^\infty \theta^i\int_0^\infty e^{-it^\beta}dt\\ &= \frac{(1-\theta)\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\beta\theta}Polylog(\frac{1}{\beta},\theta),\end{aligned} \tag{12}$$

که در آن $Polylog(\cdot,\cdot)$ تابع پلی لگاریتم است و به‌صورت $Polylog(s,z)=\sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^s}$ تعریف می‌شود. برای اطلاع بیشتر می‌توانید به لوین (۱۹۸۱) رجوع کنید.

لم ۲. فرض کنید N دارای توزیع هندسی با پارامتر θ و X_iها دارای توزیع $W(1,\beta)$ باشند، در اینصورت μ_θ داده شده در رابطه (۱۲) برحسب θ تابع نزولی است.

برهان: توجه داریم اگر N_1 و N_2 دو متغیر تصادفی با توزیع هندسی با پارامترهای به ترتیب θ_1 و θ_2 باشند به‌طوری‌که $\theta_1<\theta_2$، آنگاه نتیجه می‌شود که $N_1\leq_{st} N_2$ است. بنابراین با توجه به فرع ۱، $T_{N_1}\leq_{st} T_{N_2}$ است و با در نظر گرفتن تعریف متوسط طول عمر سیستم نتیجه می‌شود که $\mu_{\theta_2}=E(T_{N_2})\leq\mu_{\theta_1}=E(T_{N_1})$ است و این یعنی μ_θ برحسب θ نزولی است. لازم به‌ذکر

است که μ_θ داده‌شده در لم ۲ برحسب θ اکیداً نزولی است، زیرا از رابطه (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{d}{d\theta}\mu_\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-t^\beta}(e^{-t^\beta}-1)}{(1-\theta e^{-t^\beta})^2}dt < 0$. همچنین $\lim_{\theta\to 0}\mu_\theta = \int_0^\infty e^{-t^\beta}dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\beta} > 0$.

لم ۳. تحت مفروضات لم ۲، TTT_θ برحسب θ اکیداً صعودی و کمترین مقدار آن برابر $\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\beta}$ است.

برهان: متوسط زمان کل آزمایش با توجه به رابطه‌های (۸) و (۱۱) و اینکه $E(N) = \frac{1}{1-\theta}$ است، برابر با $TTT_\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-t^\beta}}{1-\theta e^{-t^\beta}}dt$ است. در نتیجه $\frac{d}{d\theta}TTT_\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-2t^\beta}}{(1-\theta e^{-t^\beta})^2}dt > 0$ است، بنابراین TTT_θ تابع اکیداً صعودی برحسب θ است. از طرفی با استفاده از رابطه‌های (۸) و (۱۲)

$$TTT_\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\beta\theta}Polylog(\frac{1}{\beta},\theta), \qquad (۱۳)$$

حاصل می‌شود. در نتیجه TTT_θ از $\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\beta}$ به بینهایت تغییر می‌کند، که در آن

$$\lim_{\theta\to 0} TTT_\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\beta} > 0.$$

اگر در رابطه (۹)، $\beta = 1$ باشد آنگاه توزیع نمایی بدست می‌آید. در اینصورت با استفاده از رابطه (۱۲)، $\mu_\theta = -\frac{(1-\theta)\ln(1-\theta)}{\theta}$ و از رابطه (۱۳)، $TTT_\theta = -\frac{\ln(1-\theta)}{\theta}$ است.

۲.۲ N دارای توزیع لگاریتمی

فرض کنید متغیر تصادفی N دارای توزیع لگاریتمی با تابع جرم احتمال $P\{N=n\} = \frac{\theta^n}{-n\ln(1-\theta)}$، $0<\theta<1$، $n = 1,2,\ldots$، باشد.

لم ۴. تابع نرخ خطر توزیع لگاریتمی برحسب n نزولی است.

برهان: با فرض $\Phi(z,s,a) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{(a+k)^s}$، بسادگی می‌توان نشان داد که تابع بقاء متغیر تصادفی N برابر است با $P(N>n) = \frac{\theta^{n+1}\Phi(\theta,1,n+1)}{-\ln(1-\theta)}$. در نتیجه $h(n) = \frac{1}{n\Phi(\theta,1,n)}$. از طرفی $h(n+1)-h(n) = \frac{-\sum_{k=1}^\infty \frac{k\theta^k}{(n+k)(n+k+1)}}{n(n+1)\Phi(\theta,1,n+1)\Phi(\theta,1,n)} < 0$ است. بنابراین تابع نرخ خطر توزیع لگاریتمی برحسب n یک تابع نزولی است.

اگر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(۱,\beta)$ باشد، آنگاه با توجه به رابطه (۶)

$$\mu_\theta = \frac{\Gamma(\frac{۱}{\beta})}{-\beta\ln(۱-\theta)} Polylog(\frac{\beta+۱}{\beta},\theta), \quad ۰<\theta<۱. \tag{۱۴}$$

از رابطه (۸)، (۱۴) و این‌که $E(N)=\frac{\theta}{-(۱-\theta)\ln(۱-\theta)}$ است، متوسط زمان کل آزمایش برابر است با

$$TTT_\theta = \frac{\theta\Gamma(\frac{۱}{\beta})}{\beta(۱-\theta)(\ln(۱-\theta))^۲} Polylog(\frac{\beta+۱}{\beta},\theta). \tag{۱۵}$$

در حالت خاص، $\beta=۱$، متوسط طول عمر سیستم با استفاده از رابطه (۱۴) برابر است با

$$\mu_\theta = \frac{۱}{-\ln(۱-\theta)} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\theta^n}{n^۲}, \quad ۰<\theta<۱, \tag{۱۶}$$

به راحتی مشاهده می‌شود که μ_θ برحسب θ اکیداً نزولی است و $\mu_\theta \geq ۱$ است. یادآوری می‌شود که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\theta^n}{n^۲}$ برای $۰<\theta<۱$ همگراست و مقدار آن برابر تابع $Polylog(۲,\theta)$ است، که با داشتن θ مقداری عددی آن به‌سادگی به‌دست می‌آید. همچنین با استفاده از رابطه (۱۵) متوسط زمان کل آزمایش به‌صورت

$$TTT_\theta = \frac{\theta}{(۱-\theta)(\ln(۱-\theta))^۲} Polylog(۲,\theta), \tag{۱۷}$$

به‌دست می‌آید. می‌توان نشان داد TTT_θ برحسب θ اکیداً صعودی است و $TTT_\theta \geq ۱$ است.

۲.۳ N دارای توزیع پواسن بریده شده در صفر

فرض کنید متغیر تصادفی N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر با تابع جرم احتمال $P\{N=n\}=\frac{\theta^n}{n!(e^\theta-۱)}$، $\theta>۰$، $n=۱,۲,\ldots$، باشد.

لم ۵. تابع نرخ خطر این توزیع برحسب n صعودی است.

برهان: تابع بقاء N به‌صورت $P(N>n)=\sum_{r=n+۱}^{\infty}\frac{\theta^r}{r!(e^\theta-۱)}$ است. در نتیجه

$h(n) = \frac{\theta^n}{n!\sum_{r=n}^{\infty}\frac{\theta^r}{r!}}$. از طرفی $h(n+۱) - h(n) = \frac{\sum_{k=۲}^{\infty}\frac{\theta^{۲n+k}(k-۱)}{(n+k)!}}{(n+۱)!(\sum_{r=n+۱}^{\infty}\frac{\theta^r}{r!})(\sum_{r=n}^{\infty}\frac{\theta^r}{r!})} > ۰$ است. بنابراین تابعی صعودی برحسب n است.

فرض کنید توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(\alpha, \beta)$ باشد، موریس و فراری (۲۰۱۷) نشان داده‌اند که

$$\mu_\theta = \frac{\Gamma((۱/\beta)+۱)}{\alpha(e^\theta - ۱)}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\theta^n}{(n-۱)!n^{\frac{\beta+۱}{\beta}}}, \quad \theta > ۰. \tag{۱۸}$$

از رابطه (۸)، (۱۸) و اینکه $E(N) = \frac{\theta e^\theta}{e^\theta - ۱}$، متوسط زمان کل آزمایش عبارت است از

$$TTT_\theta = \frac{\theta e^\theta \Gamma((۱/\beta)+۱)}{\alpha(e^\theta - ۱)^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\theta^n}{(n-۱)!n^{\frac{\beta+۱}{\beta}}}. \tag{۱۹}$$

در حالت خاص، $\beta = ۱$، با استفاده از (۶)، (۱۸) و کوس (۲۰۰۷)، متوسط طول عمر سیستم به‌صورت

$$\begin{aligned}\mu_\theta &= \frac{۱}{\alpha(e^\theta - ۱)}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\theta^n}{(n-۱)!n^۲}\\ &= \frac{\theta}{\alpha(e^\theta - ۱)}F_{۲,۲}([۱,۱],[۲,۲],\theta), \quad \theta > ۰, \end{aligned} \tag{۲۰}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $F_{p,q}(\mathbf{n}, \mathbf{d}, \theta)$ تابع فوق هندسی تعمیم‌یافته[1] است. برای مشاهده اطلاعات بیشتر می‌توانید به کوس (۲۰۰۷) رجوع کنید. محاسبات عددی حاکی از این است که μ_θ به‌دست آمده در (۲۰) تابع اکیداً نزولی برحسب θ است. اکنون با استفاده از (۱۹) متوسط زمان کل آزمایش وقتی $\beta = ۱$ باشد، به‌صورت $TTT_\theta = \frac{\theta e^\theta}{\alpha(e^\theta - ۱)^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\theta^n}{(n-۱)!n^۲}$ حاصل می‌شود. نتایج عددی بیان می‌کند که TTT_θ تابعی یکنوا برحسب θ نیست. لازم است یادآوری شود که آل-موتیری و همکاران (۲۰۱۱) با فرض اینکه N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر و X_iها دارای توزیع $W(\alpha, ۱)$ باشند، مسئله برآورد پارامتر قابلیت اعتماد را برای دو سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی مطالعه کرده‌اند.

[1] Generalized hypergeometric function

۳ مطالعه مسئله بهینگی تعداد مؤلفه‌ها در سیستم سری

هدف تعیین تعداد بهینه مؤلفه در یک سیستم سری است، چون در اینجا فرض شده است که تعداد مؤلفه‌ها متغیر تصادفی است، بنابراین تعیین مقدار بهینه $[E(N)]$ باید بررسی شود. تابع هزینه در مطالعات بهینه‌سازی همواره مورد توجه بوده و به صورت‌های مختلف و متناسب با مسئله تعریف می‌شود و به‌عنوان تابع هدف بهینه‌سازی استفاده می‌شود. در اینجا، تابع هزینه به صورت

$$C_\theta = c_۱ E(N) + c_۲, \qquad (۲۱)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن $c_۱$ هزینه خرید یک مؤلفه و $c_۲$ نشاندهنده هزینه راه اندازی سیستم است که می‌تواند شامل تمام هزینه‌های ناشی از خرابی سیستم باشد و θ پارامتر توزیع N است. با توجه به مفروضات بخش ۲، تابع هزینه داده شده در رابطه (۲۱) برحسب θ اکیداً صعودی است. به منظور بررسی مسئله بهینه‌سازی، می‌توانیم نرخ هزینه مورد انتظار را به‌صورت $C_۱(\theta) = \frac{c_۱ E(N)+c_۲}{\mu_\theta}$ در نظر بگیریم. چون μ_θ تابعی اکیداً نزولی برحسب θ است درنتیجه $C_۱(\theta)$ تابعی اکیداً صعودی برحسب θ خواهد بود و تعداد بهینه مؤلفه‌ها در این حالت برابر با یک می‌شود، در حالی‌که بدیهی است سیستم سری با یک مؤلفه همواره بهینه نیست و مسئله بهینه‌سازی $C_۱(\theta)$ برحسب تعداد مؤلفه‌ها در این حالت جواب ندارد و محدودیت‌هایی نیاز دارد. در بخش‌های بعدی شرایط وجود جواب مسئله بررسی می‌شود.

۴ بهینه‌سازی براساس متوسط طول عمر و تابع هزینه

متوسط طول عمر سیستم می‌تواند یکی از معیارهای مناسب برای تعیین تعداد بهینه مؤلفه‌ها درکنار تابع هزینه باشد. بر این اساس منطقی به‌نظر می‌رسد که تعداد بهینه مؤلفه‌ها را با در نظرگرفتن محدودیت‌های $\mu_\theta \geq \mu_۰$ و $C_\theta \leq c_۰$ به‌دست آوریم. بدیهی است در این حالت یک ناحیه بهینه برای θ به‌دست می‌آید. توزیع متغیر تصادفی N را همانند بخش قبل هندسی (یا لگاریتمی یا پواسن بریده‌شده در صفر) و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها را وایبل در نظر می‌گیریم. با توجه به نتایج بخش ۲ چون μ_θ برحسب θ اکیداً نزولی است، مقدار θای که در نابرابری $\mu_\theta \geq \mu_۰$ صدق می‌کند به صورت $\theta \in (۰, \theta_{\mu_۰}]$ است که در آن

$$\theta_{\mu_۰} = \sup\{\theta : \mu_\theta \geq \mu_۰\}, \qquad (۲۲)$$

است. از طرفی C_θ برحسب θ اکیداً صعودی است و با توجه به شرط $C_\theta \leq c_۰$، مقدار θای که در این نابرابری صدق می‌کند به‌صورت $\theta \in (۰, \theta_{c_۰}]$ است که در آن

$$\theta_{c_۰} = \sup\{\theta : C_\theta \leq c_۰\}. \qquad (۲۳)$$

حال با توجه به دو بازه به‌دست آمده، اشتراک این دوبازه را به عنوان ناحیه بهینه برای θ در نظر می‌گیریم، یعنی $\theta^* \in (۰, \min(\theta_{\mu_۰}, \theta_{c_۰})]$ جواب مسئله است. اگر متغیر تصادفی N (تعداد مؤلفه‌ها) دارای توزیع خانواده سری توانی با پارامتر θ^* متعلق به بازه $(۰, \min(\theta_{\mu_۰}, \theta_{c_۰})]$ باشد، شرایط بهینه برقرار خواهد بود و در صورتی‌که مقدار دقیق θ^* را بدانیم با جایگذاری آن در رابطهٔ (۲) متوسط تعداد بهینه مؤلفه‌ها به‌طور دقیق به‌دست می‌آید. بدیهی است به ازای هر θ^* فقط یک n^* بهینه به‌دست می‌آید.

تذکر ۱. با توجه به اینکه μ_θ تابعی اکیداً نزولی برحسب θ است و فرض $\mu_\theta \geq \mu_۰$ را در نظر گرفته‌ایم باید مقدار $\mu_۰$ از مقدار μ_θ وقتی θ به سمت صفر میل می‌کند، کوچکتر باشد تا بتوانیم $\theta_{\mu_۰}$ را به‌دست آوریم. به عبارت دیگر باید $\mu_۰ < \lim_{\theta \to ۰} \mu_\theta$ باشد تا بتوانیم بازه‌ای برای پارامتر توزیع N به‌دست آوریم، از طرفی چون تابع هزینه برحسب θ اکیداً صعودی است باید مقدار $c_۰$ از مقدار C_θ وقتی θ به سمت صفر میل می‌کند، بزرگتر باشد تا بتوانیم $\theta_{c_۰}$ را به‌دست آوریم. یعنی، باید $\lim_{\theta \to ۰} C_\theta < c_۰$ باشد تا بتوانیم بازه‌ای برای پارامتر توزیع تعداد مؤلفه‌ها به‌دست آوریم.

نابرابری $\mu_\theta = E(\min(X_۱, \ldots, X_N)) \leq E(X_i)$ همواره برای $i = ۱, \ldots, N$ برقرار است. اگر X_iها دارای توزیع $W(\alpha, ۱)$ (نمایی با پارامتر α) باشند، آنگاه $\mu_\theta \leq \frac{۱}{\alpha}$ است. در ادامه مسئله را برای حالت خاص که N دارای توزیع هندسی، لگاریتمی یا پواسن بریده‌شده در صفر باشد، بررسی می‌کنیم.

۴.۱ N دارای توزیع هندسی

ابتدا با توجه به محدودیت‌های در نظر گرفته شده، ناحیه بهینه پارامتر توزیع تعداد مؤلفه‌ها (θ^*) را محاسبه و براساس آن مجموعه مقادیر تعداد بهینه مؤلفه‌ها (n^*) را به‌دست می‌آوریم. با توجه به تذکر۱ باید $c_۱ + c_۲ < c_۰$ باشد، همچنین با استفاده از رابطه (۲۱) و با در نظر گرفتن شرط $C_\theta \leq c_۰$، نتیجه می‌شود که $\theta \leq ۱ - \frac{c_۱}{c_۰ - c_۲}$ که در آن $۱ > \frac{c_۱}{c_۰ - c_۲} > ۰$ است. با توجه به توضیحات ارائه شده، به منظور بررسی حساسیت رفتار ناحیه بهینه نسبت به پارامترها، محاسبات عددی انجام و در جدول ۱ مقادیر عددی θ^* به ازای $\theta_{\mu_۰}$ و $\theta_{c_۰}$های مختلف با توجه به رابطه‌های (۱۲) و (۲۱) وقتی $\beta = ۱$ باشد، گزارش شده است.

از جدول ۱، مشاهده می‌شود با افزایش $\mu_\circ$ با فرض ثابت بودن $\theta_{c_\circ}$، طول بازه θ^* کوچکتر می‌شود که این

جدول ۱. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $\mu_\circ$ و $\theta_{c_\circ}$ وقتی N دارای توزیع هندسی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,۱)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (\circ, \min(\theta_{c_\circ}, \theta_{\mu_\circ})]$	$\theta_{\mu_\circ}$	$\mu_\circ$	$\theta_{c_\circ}$	$\frac{c_۱}{c_\circ - c_۲}$
{۱, ۲, ..., ۱۰}	(۰, ۰/۹۰۰]	۰/۹۷۳	۰/۱	۰/۹	۰/۱
{۱, ۲, ..., ۷}	(۰, ۰/۸۷۳]	۰/۸۷۳	۰/۳		
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۱۵]	۰/۷۱۵	۰/۵		
{۱}	(۰, ۰/۴۹۱]	۰/۴۹۱	۰/۷		
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۰۰]	۰/۹۷۳	۰/۱	۰/۷	۰/۳
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۰۰]	۰/۸۷۳	۰٫۳		
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۰۰]	۰/۷۱۵	۰٫۵		
{۱}	(۰, ۰/۴۹۱]	۰/۴۹۱	۰٫۷		
{۱, ۲}	(۰, ۰/۵۰۰]	۰/۹۷۳	۰/۱	۰/۵	۰/۵
{۱, ۲}	(۰, ۰/۵۰۰]	۰/۸۷۳	۰٫۳		
{۱, ۲}	(۰, ۰/۵۰۰]	۰/۷۱۵	۰٫۵		
{۱}	(۰, ۰/۴۹۱]	۰/۴۹۱	۰٫۷		

موضوع واضح است، زیرا متوسط طول عمر سیستم تابعی اکیداً نزولی بر حسب θ است و با توجه به شرط $\mu_\theta \geq \mu_\circ$ و فرمول (۲۲) اگر مقدار $\mu_\circ$ افزایش یابد مشخص است که مقادیر $\theta_{\mu_\circ}$ کاهش و در نتیجه طول بازه $(\circ, \theta_{\mu_\circ}]$ نیز کوچکتر می‌شود. اکنون در جدول ۱ فرض کنید $\mu_\circ = \circ/۵$ ثابت و $\theta_{c_\circ}$ مقادیر مختلف اختیار کند، در این حالت به‌ازای مقادیر مختلف ثابت‌ها در تابع هزینه و با استفاده از فرمول (۲۳) و انجام محاسبات عددی، ناحیه بهینه به‌دست می‌آید. با توجه به جدول، مشاهده می‌شود که با کاهش مقادیر $\theta_{c_\circ}$ طول بازه θ^* کوچکتر می‌شود.

با استفاده از مقادیر به‌دست آمده برای θ^* و n^* در جدول ۱، می‌توان ناحیه بهینه θ متناظر با تعداد بهینه مؤلفه‌ها را مشخص نمود. به عنوان نمونه، در جدول ۲ وقتی $\theta_{c_\circ} = \circ٫۹$ و $\mu_\circ = \circ٫۱, \circ٫۳, \circ٫۵$ باشد، مشخص شده است که مقادیر n^* به ازای چه بازه‌ای از θ^* به‌دست آمده‌اند. همچنین به ازای $\beta > ۱$ و $\beta < ۱$ و با توجه به رابطه‌های (۱۲)، (۲۱) و محدودیت‌های در نظر گرفته شده محاسبات انجام و در جدول ۳ گزارش شده است. مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $\mu_\circ$ و β زمانی که $\theta_{c_\circ} = \circ٫۹$ باشد، به‌دست آمده است. با توجه به جدول‌های ۳ و ۱ مشاهده می‌شود برای $\beta < ۱$ یا $\beta > ۱$ مجموعه مقادیر n^* بزرگتر یا مساوی زمانی است که $\beta = ۱$ می‌باشد. همچنین مجموعه مقادیر n^* برای $\circ٫۴۹ < \beta$ بزرگتر یا مساوی و برای $۱ < \beta \leq \circ٫۵۸$ کوچکتر یا مساوی زمانی است که $\beta = ۲$ می‌باشد و برای $\circ٫۵۸ < \beta \leq \circ٫۴۹$ نمی‌توانیم مقایسه کلی برحسب مجموعه مقادیر n^* با وقتی $\beta = ۲$ است، انجام دهیم. با توجه به مقادیر به‌دست آمده تأثیر توزیع طول عمر مؤلفه‌ها را بر مجموعه مقادیر تعداد

جدول ۲. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقدار ثابت ۰٫۹ $= \theta_{c_\circ}$ و مقادیر مختلف $\mu_\circ$ وقتی N دارای توزیع هندسی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,۱)$ است.

$\mu_\circ$					
۰/۵		۰/۳		۰/۱	
n^*	θ^*	n^*	θ^*	n^*	θ^*
۱	(۰, ۰/۴۹۹]	۱	(۰, ۰/۴۹۹]	۱	(۰, ۰/۴۹۹]
۲	[۰/۵, ۰/۶۶۶]	۲	[۰/۵, ۰/۶۶۶]	۲	[۰/۵, ۰/۶۶۶]
۳	[۰/۶۶۷, ۰/۷۱۵]	۳	[۰/۶۶۷, ۰/۷۴۹]	۳	[۰/۶۶۷, ۰/۷۴۹]
		۴	[۰/۷۵۰, ۰/۷۹۹]	۴	[۰/۷۵۰, ۰/۷۹۹]
		۵	[۰/۸۰۰, ۰/۸۳۳]	۵	[۰/۸۰۰, ۰/۸۳۳]
		۶	[۰/۸۳۴, ۰/۸۵۷]	۶	[۰/۸۳۴, ۰/۸۵۷]
		۷	[۰/۸۵۸, ۰/۸۷۳]	۷	[۰/۸۵۸, ۰/۸۷۴]
				۸	[۰/۸۷۵, ۰/۸۸۸]
				۹	[۰/۸۸۹, ۰/۸۹۹]
				۱۰	۰/۹۰۰

جدول ۳. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $\mu_\circ$ وقتی N دارای توزیع هندسی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,\beta)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (\circ, \min(\theta_{c_\circ}, \theta_{\mu_\circ})]$	$\theta_{\mu_\circ}$	$\mu_\circ$	$\theta_{c_\circ}$	$\frac{c_۱}{c_\circ - c_۲}$	β
{۱, ..., ۱۰}	(۰, ۰/۹۰۰]	۰/۹۴۹	۰/۳	۰/۹	۰/۱	۲
{۱, ..., ۵}	(۰, ۰/۸۱۸]	۰/۸۱۸	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۵۳۰]	۰/۵۳۰	۰/۷			
{۱, ..., ۱۰}	(۰, ۰/۹۰۰]	۰/۹۸۳	۰/۳			۳
{۱, ..., ۱۰}	(۰, ۰/۹۰۰]	۰/۹۰۵	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۶۶۰]	۰/۶۶۰	۰/۷			
{۱, ..., ۱۰}	(۰, ۰/۹۰۰]	۰/۹۰۱	۰/۳			۰/۴۸
{۱, ..., ۵}	(۰, ۰/۸۲۷]	۰/۸۲۷	۰/۵			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۴۷]	۰/۷۴۷	۰/۷			
{۱, ..., ۹}	(۰, ۰/۸۹۹]	۰/۸۹۹	۰/۳			۰/۴۹
{۱, ..., ۵}	(۰, ۰/۸۲۱]	۰/۸۲۱	۰/۵			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۳۸]	۰/۷۳۸	۰/۷			
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۸۸۰]	۰/۸۸۰	۰/۳			۰/۵۷
{۱, ..., ۴}	(۰, ۰/۷۸۲]	۰/۷۸۲	۰/۵			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۶۷۰]	۰/۶۷۰	۰/۷			
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۸۷۸]	۰/۸۷۸	۰/۳			۰٫۵۸
{۱, ..., ۴}	(۰, ۰/۷۷۷]	۰/۷۷۷	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۶۶۳]	۰/۶۶۳	۰/۷			
{۱, ..., ۷}	(۰, ۰/۸۶۴]	۰/۸۶۴	۰/۳			۰/۸۰
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۷۲۳]	۰/۷۲۳	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۵۴۳]	۰/۵۴۳	۰/۷			

بهینه مؤلفه‌ها ملاحظه می‌کنیم.

۴.۲ N دارای توزیع لگاریتمی

مشابه حالتی که N دارای توزیع هندسی است، عمل می‌کنیم. با توجه به ملاحظه ۱، $c_1 + c_2 < c_0$ و $\mu_0 < 1$ باید باشد و از طرفی از حل نابرابری $C_\theta \leq c_0$ نتیجه می‌شود که $\frac{\theta}{-(1-\theta)\ln(1-\theta)} \leq \frac{c_0 - c_2}{c_1}$ که در آن $\frac{c_0 - c_2}{c_1} > 1$ است. در جدول ۴، ناحیه بهینه θ به ازای مقادیر مختلف μ_0 و θ_{c_0} وقتی $\beta = 1$ باشد، با توجه به توضیحات ارائه شده و با استفاده از رابطه‌های (۱۶) و (۲۱) گزارش شده است. همان‌طور

جدول ۴. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف μ_0 و θ_{c_0} وقتی N دارای توزیع لگاریتمی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(1, 1)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{\mu_0})]$	θ_{μ_0}	μ_0	θ_{c_0}	$\frac{c_0 - c_2}{c_1}$
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۹۵	۰/۳	۰/۹۰۳	۴
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۴۱	۰/۵		
{۱, ۲}	(۰, ۰/۷۵۸]	۰/۷۵۸	۰/۷		
{۱, ..., ۶}	(۰, ۰/۹۴۶]	۰/۹۹۵	۰/۳	۰٫۹۴۶	۶
{۱, ..., ۵}	(۰, ۰/۹۴۱]	۰/۹۴۱	۰٫۵		
{۱, ۲}	(۰, ۰/۷۵۸]	۰/۷۵۸	۰٫۷		
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۹۶۴]	۰/۹۹۵	۰/۳	۰٫۹۶۴	۸
{۱, ..., ۵}	(۰, ۰/۹۴۱]	۰/۹۴۱	۰٫۵		
{۱, ۲}	(۰, ۰/۷۵۸]	۰/۷۵۸	۰٫۷		

که ملاحظه می‌شود با فرض ثابت بودن θ_{c_0}، با افزایش μ_0 طول بازه θ^* کوچکتر می‌شود. اکنون فرض کنید $\mu_0 = 0/3$ ثابت باشد، مشاهده می‌شود که با افزایش θ_{c_0} طول بازه بزرگتر می‌شود.

همچنین به ازای $\beta < 1$ و $\beta > 1$ و با توجه به رابطه‌های (۱۴) و (۲۱) و محدودیت‌های در نظر گرفته شده محاسبات انجام و در جدول ۵ گزارش شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف μ_0 و β زمانی که $\theta_{c_0} = 0{,}903$ باشد، به‌دست آمده است. با توجه به جدول‌های ۵ و ۴ مشاهده می‌شود مجموعه مقادیر n^* برای $\beta < 1$ یا $\beta > 1$ بزرگتر یا مساوی زمانی است که $\beta = 1$ می‌باشد و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها برای $\beta \geq 0{,}71$ بزرگتر یا مساوی و برای $0{,}72 \leq \beta < 1$ برابر است با وقتی‌که $\beta = 2$ می‌باشد.

۴.۳ N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر

با توجه به تذکر ۱، باید $c_1 + c_2 < c_0$ برقرار باشد و از حل نابرابری $C_\theta \leq c_0$ نتیجه می‌شود که $\frac{\theta e^\theta}{e^\theta - 1} \leq \frac{c_0 - c_2}{c_1}$ که در آن $\frac{c_0 - c_2}{c_1} > 1$ است. در جدول ۶، ناحیه بهینه θ به ازای مقادیر مختلف μ_0 و θ_{c_0} وقتی $\beta = \alpha = 1$ باشد، با توجه به رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) گزارش شده است.

جدول ۵. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $\mu_۰$ وقتی N دارای توزیع لگاریتمی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,\beta)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (۰, \min(\theta_{c_۰}, \theta_{\mu_۰})]$	$\theta_{\mu_۰}$	$\mu_۰$	$\theta_{c_۰}$	$\frac{c_۰ - c_۲}{c_۱}$	β
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۹۹	۰/۳	۰/۹۰۳	۴	۲
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۷۵	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۷۸۷]	۰/۷۸۷	۰/۷			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۹۷	۰/۳			۰/۷۱
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۵۹	۰/۵			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۸۵۴]	۰/۸۵۴	۰/۷			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۹۷	۰/۳			۰/۷۲
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۵۸	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۸۴۹]	۰/۸۴۹	۰/۷			
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۹۶	۰/۳			۰/۸۰
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۹۰۳]	۰/۹۵۰	۰/۵			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۸۱۵]	۰/۸۱۵	۰/۷			

جدول ۶. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $\mu_۰$ و $\theta_{c_۰}$ وقتی N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,۱)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (۰, \min(\theta_{c_۰}, \theta_{\mu_۰})]$	$\theta_{\mu_۰}$	$\mu_۰$	$\theta_{c_۰}$	$\frac{c_۰ - c_۲}{c_۱}$
{۱, ۲}	(۰, ۱/۵۹۴]	۴/۳۶۹	۰/۳	۱/۵۹۴	۲
{۱, ۲}	(۰, ۱/۵۹۴]	۲/۴۹۳	۰/۵		
{۱}	(۰, ۱/۳۲۵]	۱/۳۲۵	۰/۷		
{۱, ..., ۴}	(۰, ۳/۹۲۱]	۴/۳۶۹	۰/۳	۳/۹۲۱	۴
{۱, ۲}	(۰, ۲/۴۹۳]	۲/۴۹۳	۰/۵		
{۱}	(۰, ۱/۳۲۵]	۱/۳۲۵	۰/۷		
{۱, ..., ۴}	(۰, ۴/۳۶۹]	۴/۳۶۹	۰/۳	۵/۹۸۵	۶
{۱, ۲}	(۰, ۲/۴۹۳]	۲/۴۹۳	۰/۵		
{۱}	(۰, ۱/۳۲۵]	۱/۳۲۵	۰/۷		
{۱, ..., ۴}	(۰, ۴/۳۶۹]	۴/۳۶۹	۰/۳	۷/۹۹۷	۸
{۱, ۲}	(۰, ۲/۴۹۳]	۲/۴۹۳	۰/۵		
{۱}	(۰, ۱/۳۲۵]	۱/۳۲۵	۰/۷		

از جدول ۶، مشاهده می‌شود با فرض ثابت بودن $\theta_{c_۰}$، با افزایش $\mu_۰$ طول بازه θ^* کوچکتر می‌شود. اکنون فرض کنید $\mu_۰ = ۰/۳$ ثابت باشد، مشاهده می‌شود با افزایش $\theta_{c_۰}$ طول بازه بزرگتر می‌شود. همچنین به ازای $\beta > ۱$ و $\beta < ۱$ و با توجه به رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) و محدودیت‌های در نظر گرفته شده وقتی $\alpha = ۱$ باشد، محاسبات انجام و در جدول ۷ گزارش شده است. در جدول ۷، مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $\mu_۰$ و β زمانی که $\theta_{c_۰} = ۳/۹۲۱$ باشد، به‌دست آمده است. با توجه به جدول‌های ۷ و ۶ مشاهده می‌شود برای $\beta > ۱$ یا $\beta < ۱$ مجموعه مقادیر n^* بزرگتر یا مساوی زمانی است که $\beta = ۱$ می‌باشد.

جدول ۷. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف μ_0 وقتی N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(1, \beta)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{\mu_0})]$	θ_{μ_0}	μ_0	θ_{c_0}	$\frac{c_0 - c_2}{c_1}$	β
$\{1, \ldots, 4\}$	$(0, 3/921]$	۴/۱۰۲	۰/۳	۳/۹۲۱	۴	۰/۵
$\{1, 2, 3\}$	$(0, 3/077]$	۳/۰۷۷	۰/۵			
$\{1, 2\}$	$(0, 2/394]$	۲/۳۹۴	۰/۷			
$\{1, \ldots, 4\}$	$(0, 3/921]$	۹/۵۶۲	۰/۳			۲
$\{1, 2, 3\}$	$(0, 3/802]$	۳/۸۰۲	۰/۵			
$\{1\}$	$(0, 1/527]$	۱/۵۲۷	۰/۷			

۵ بهینه‌سازی براساس متوسط زمان کل آزمایش و تابع هزینه

متوسط زمان کل آزمایش می‌تواند یکی‌دیگر از معیارهای بهینه‌سازی باشد و کاهش آن مطلوب است. بنابراین منطقی به‌نظر می‌رسد تعداد بهینه مؤلفه‌ها را با در نظر گرفتن محدودیت‌های $TTT_\theta \leq T_0$ و $C_\theta \leq c_0$ به‌دست آوریم. ابتدا بازه جواب را برای متوسط زمان کل آزمایش با توجه به شرط بالا به‌دست می‌آوریم. درباره تابع هزینه نتایج در بخش ۴ آمده است. به‌طور مشابه توزیع متغیر تصادفی N را هندسی (یا لگاریتمی) و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها را وایبل در نظر می‌گیریم. با توجه به بخش ۲، چون TTT_θ برحسب θ اکیداً صعودی است، مقادیر θای که در نابرابری $TTT_\theta \leq T_0$ صدق می‌کند به‌صورت $\theta \in (0, \theta_{T_0}]$ است که در آن

$$\theta_{T_0} = \sup\{\theta : TTT_\theta \leq T_0\}. \qquad (۲۴)$$

با توجه به دوبازه $\theta \in (0, \theta_{T_0}]$ و $\theta \in (0, \theta_{c_0}]$ و محدودیت‌های بیان شده $\theta^* \in (0, \min(\theta_{T_0}, \theta_{c_0})]$ جواب مسئله است.

تذکر ۲. چون متوسط زمان کل آزمایش و تابع هزینه برحسب θ اکیداً صعودی هستند، بنابراین باید $\lim_{\theta \to 0} TTT_\theta < T_0$ و $\lim_{\theta \to 0} C_\theta < c_0$ برقرار باشد، تا بتوان بازه‌ای برای پارامتر توزیع تعداد مؤلفه‌ها به‌دست آورد.

۵.۱ N دارای توزیع هندسی

در این بخش براساس معیار متوسط زمان کل آزمایش و تابع هزینه مجموعه مقادیر تعداد بهینه مؤلفه‌ها را محاسبه می‌کنیم. به‌سادگی با محاسبات جبری می‌توان مقادیر عددی θ^* را با توجه به شرایط بیان شده

به‌دست آورد. این مقادیر برای $\theta_{c_\circ}$ و $T_\circ$های مختلف در جدول ۸، با توجه به رابطه‌های (۱۳) و (۲۱)، به‌ازای $\beta = ۱$ گزارش شده است. از جدول ۸، مشاهده می‌شود با افزایش $T_\circ$ با فرض ثابت بودن $\theta_{c_\circ}$،

جدول ۸. ناحیه بهینه θ به ازای مقادیر مختلف $T_\circ$ و $\theta_{c_\circ}$ وقتی N دارای توزیع هندسی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,۱)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (\circ, \min(\theta_{c_\circ}, \theta_{T_\circ})]$	$\theta_{T_\circ}$	$T_\circ$	$\theta_{c_\circ}$	$\frac{c_۱}{c_\circ - c_۲}$
$\{۱,۲,۳,۴\}$	$(\circ, \circ/۷۹۷]$	۰/۷۹۷	۲	۰/۹	۰/۱
$\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$	$(\circ, \circ/۹۰۰]$	۰/۹۸۰	۴		
$\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$	$(\circ, \circ/۹۰۰]$	۰/۹۹۷	۶		
$\{۱,۲,۳\}$	$(\circ, \circ/۷۰۰]$	۰/۷۹۷	۲	۰/۷	۰/۳
$\{۱,۲,۳\}$	$(\circ, \circ/۷۰۰]$	۰/۹۸۰	۴		
$\{۱,۲,۳\}$	$(\circ, \circ/۷۰۰]$	۰/۹۹۷	۶		
$\{۱,۲\}$	$(\circ, \circ/۵۰۰]$	۰/۷۹۷	۲	۰/۵	۰/۵
$\{۱,۲\}$	$(\circ, \circ/۵۰۰]$	۰/۹۸۰	۴		
$\{۱,۲\}$	$(\circ, \circ/۵۰۰]$	۰/۹۹۷	۶		

طول بازه θ^* بزرگتر می‌شود. این موضوع واضح است زیرا متوسط زمان کل آزمایش تابعی اکیداً صعودی بر حسب θ است و با توجه به شرط $TTT_\theta \leq T_\circ$ و فرمول (۲۴) اگر مقدار $T_\circ$ افزایش یابد مشخص است که مقادیر $\theta_{T_\circ}$ افزایش و طول بازه $(\circ, \theta_{T_\circ}]$ بزرگتر می‌شود. حال فرض کنید $T_\circ = ۲$ ثابت باشد، در این صورت مشاهده می‌شود با کاهش $\theta_{c_\circ}$ طول بازه کوچکتر می‌شود. اکنون به ازای $\beta > ۱$ و $\beta < ۱$ و با توجه به رابطه‌های (۱۳) و (۲۱) و در نظر گرفتن محدودیت‌های ذکر شده تعداد بهینه مؤلفه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در جدول ۹ گزارش شده است. در جدول ۹ مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها

جدول ۹. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $T_\circ$ وقتی N دارای توزیع هندسی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,\beta)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (\circ, \min(\theta_{c_\circ}, \theta_{\mu_\circ})]$	$\theta_{T_\circ}$	$T_\circ$	$\theta_{c_\circ}$	$\frac{c_۱}{c_\circ - c_۲}$	β
$\{۱,۲,۳\}$	$(\circ, \circ/۶۷۰]$	۰/۶۷۰	۲	۰/۹	۰/۱	۲
$\{۱,\ldots,۴\}$	$(\circ, \circ/۷۸۸]$	۰/۷۸۸	۲/۵			
$\{۱,\ldots,۶\}$	$(\circ, \circ/۸۴۲]$	۰/۸۴۲	۳			
$\{۱,\ldots,۸\}$	$(\circ, \circ/۸۷۷]$	۰/۸۷۷	۳/۵			
$\{۱,۲\}$	$(\circ, \circ/۶۴۷]$	۰/۶۴۷	۲			۳
$\{۱,۲,۳\}$	$(\circ, \circ/۷۳۷]$	۰/۷۳۷	۲/۵			
$\{۱,\ldots,۴\}$	$(\circ, \circ/۷۹۵]$	۰/۷۹۵	۳			
$\{۱,\ldots,۵\}$	$(\circ, \circ/۸۳۳]$	۰/۸۳۳	۳/۵			
$\{۱,\ldots,۷\}$	$(\circ, \circ/۸۶۱]$	۰/۸۶۱	۴			
$\{۱,۲,۳\}$	$(\circ, \circ/۶۶۷]$	۰/۶۶۷	۲/۵			۰/۵۰
$\{۱,\ldots,۱۰\}$	$(\circ, \circ/۹۰۰]$	۰/۹۴۰	۳			
$\{۱,\ldots,۱۰\}$	$(\circ, \circ/۹۰۰]$	۰/۹۸۸	۳/۲			

به ازای مقادیر مختلف $T_\circ$ و β وقتی $\theta_{c_\circ} = ۰/۹$ است، محاسبه شده است. با توجه به جدول مشاهده

می‌کنیم با افزایش $T_{\circ}$، طول بازه θ^* و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها بزرگتر می‌شود و برای $\beta < ۱$ و $\beta > ۱$ نمی‌توانیم یک مقایسه کلی براساس مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها انجام دهیم. از جدول‌های ۸ و ۹ مشاهده می‌شود برای $\beta = ۳$ مجموعه مقادیر n^* کوچکتر از زمانی است که $\beta = ۱$ می‌باشد.

۵.۲ N دارای توزیع لگاریتمی

همانند زیر بخش قبل، با محاسبات جبری می‌توان مقادیر عددی θ^* را با توجه به شرایط بیان شده به‌دست آورد. این مقادیر برای $\theta_{c_{\circ}}$ و $T_{\circ}$های مختلف وقتی $\beta = ۱$ باشد، با استفاده از رابطه‌های (۱۷) و (۲۱) در جدول ۱۰ گزارش شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش $T_{\circ}$ با فرض ثابت بودن $\theta_{c_{\circ}}$ طول بازه

جدول ۱۰. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $T_{\circ}$ و $\theta_{c_{\circ}}$ وقتی N دارای توزیع لگاریتمی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(۱,۱)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (\circ, \min(\theta_{c_{\circ}}, \theta_{\mu_{\circ}})]$	$\theta_{T_{\circ}}$	$T_{\circ}$	$\theta_{c_{\circ}}$	$\frac{c_{\circ} - c_{۲}}{c_{۱}}$
$\{۱, ۲, ۳\}$	$(\circ, \circ/۸۷۴]$	$\circ/۸۷۴$	۲	$\circ/۹\circ۳$	۴
$\{۱, ۲, ۳\}$	$(\circ, \circ/۹\circ۳]$	$\circ/۹۷\circ$	۴		
$\{۱, ۲, ۳\}$	$(\circ, \circ/۹\circ۳]$	$\circ/۹۸۶$	۶		
$\{۱, ۲, ۳\}$	$(\circ, \circ/۸۷۴]$	$\circ/۸۷۴$	۲	$\circ/۹۴۶$	۶
$\{۱, ۲, \ldots, ۶\}$	$(\circ, \circ/۹۴۶]$	$\circ/۹۷\circ$	۴		
$\{۱, ۲, \ldots, ۶\}$	$(\circ, \circ/۹۴۶]$	$\circ/۹۸۶$	۶		
$\{۱, ۲, ۳\}$	$(\circ, \circ/۸۷۴]$	$\circ/۸۷۴$	۲	$\circ/۹۶۴$	۸
$\{۱, ۲, \ldots, ۸\}$	$(\circ, \circ/۹۶۴]$	$\circ/۹۷\circ$	۴		
$\{۱, ۲, \ldots, ۸\}$	$(\circ, \circ/۹۶۴]$	$\circ/۹۸۶$	۶		

θ^* بزرگتر می‌شود. اکنون فرض کنید $T_{\circ} = ۴$ ثابت باشد، در این صورت از جدول ۱۰ مشاهده می‌شود که با افزایش $\theta_{c_{\circ}}$ طول بازه بزرگتر می‌شود. اکنون به ازای $\beta < ۱$ و $\beta > ۱$ و با توجه به رابطه‌های (۱۵) و (۲۱)، بر اساس نتایج جدول ۱۱ ملاحظه می‌شود مجموعه مقادیر تعداد بهینه مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف $T_{\circ}$ و β زمانی‌که $\theta_{c_{\circ}} = \circ/۹۶۴$ باشد، محاسبه شده است. با توجه به جدول مشاهده می‌شود که مجموعه مقادیر n^* به ازای $T_{\circ} = ۴, ۶$ برای $\beta \leq \circ/۶۷$ کوچکتر یا مساوی و برای $۱ < \beta \leq \circ/۶۸$ بزرگتر یا مساوی با زمانی است که $\beta = ۲$ می‌باشد. با توجه به جدول ۱۰ و ۱۱ ملاحظه می‌شود، به ازای $T_{\circ} = ۲, ۴, ۶$ برای $\beta > ۱$ و $\beta < ۱$ مجموعه مقادیر n^* کوچکتر یا مساوی زمانی است که $\beta = ۱$.

جدول ۱۱. ناحیه بهینه θ و مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها به ازای مقادیر مختلف T_0 وقتی N دارای توزیع لگاریتمی و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(1, \beta)$ است.

$n^* = [E(N)]$	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{\mu_0})]$	θ_{T_0}	T_0	θ_{c_0}	$\frac{c_0 - c_2}{c_1}$	β
{۱, ۲, ۳}	(۰, ۰/۸۵۳]	۰/۸۵۳	۲	۰٫۹۶۴	۸	۲
{۱, ..., ۷}	(۰, ۰/۹۶۰]	۰/۹۶۰	۴			
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۹۶۴]	۰/۹۸۰	۶			
{۱, ..., ۴}	(۰, ۰/۹۲۵]	۰/۹۲۵	۴			۰٫۵
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۹۶۴]	۰/۹۶۹	۶			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۸۰۴]	۰/۸۰۴	۲			۰٫۶۷
{۱, ..., ۷}	(۰, ۰/۹۶۳]	۰/۹۶۳	۴			
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۹۶۴]	۰/۹۸۳	۶			
{۱, ۲}	(۰, ۰/۸۱۱]	۰/۸۱۱	۲			۰٫۶۸
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۹۶۴]	۰/۹۶۴	۴			
{۱, ..., ۸}	(۰, ۰/۹۶۴]	۰/۹۸۳	۶			

۶ مثال با داده‌های واقعی، N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر

داده‌ها مربوط به بازه خرابی‌های پی در پی سیستم تهویه مطبوع هواپیما جت بوئینگ ۷۲۰ است که در این مقاله داده‌های مربوط به هواپیمای ۷۹۱۲ و ۷۹۱۴ در نظر گرفته شده است، دادهای اصلی مربوط به تحقیقات پروشان (۱۹۶۳) است. با توجه به (۴) تابع توزیع T_N بصورت

$$F_{T_N}(t) = \frac{1}{e^{\theta} - 1}[e^{\theta} - \exp(\theta e^{-\alpha t})], \;\; t > 0, \; \theta > 0, \; \alpha > 0, \qquad (۲۵)$$

داده می‌شود. آل-موتیری و همکاران (۲۰۱۱) با استفاده از آزمون‌های کلموگروف-اسمیرنوف و اندرسون-دارلینگ نشان داده‌اند که توزیع (۲۵) برای داده‌های هر دو هواپیمای ۷۹۱۲ و ۷۹۱۴ با پارامتر مشترک α مناسب است. بنابراین متوسط طول عمر سیستم وقتی تعداد مؤلفه‌ها متغیر تصادفی و دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر و توزیع طول عمر مؤلفه‌ها نمایی با پارامتر α باشد با توجه به داده‌های مربوط به هواپیمای ۷۹۱۲ برابر با $\mu_\theta = ۵۹٫۶$ است. حال با استفاده از روش گشتاوری پارامترهای θ و α را برآورد می‌کنیم. بنابراین با توجه به رابطه (۲۰) و نتایج مورایس و فراری (۲۰۱۷) برآورد این پارامترها به‌طور تقریبی به ترتیب برابر با ۰٫۰۰۰۰۱ و ۰٫۰۱۶۸ به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه در هواپیما ۷۹۱۴ متوسط طول عمر سیستم برابر با ۶۴٫۱۲۵ و مقادیر برآورد پارامترهای θ و α به روش گشتاوری به ترتیب ۱٫۱۱۰۴ و ۰٫۰۱۱۶ است. اکنون با استفاده از توضیحات ارائه‌شده در بخش چهارم، مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها را محاسبه

می‌کنیم. توجه داریم که تابع هزینه با استفاده از رابطه (۲۱) برابر

$$C_\theta = \frac{c_۱ \theta e^\theta}{e^\theta - ۱} + c_۲, \qquad (۲۶)$$

است، که برحسب θ اکیداً صعودی است. بنا به تذکر۱، باید $c_۱ + c_۲ < c_۰$ باشد، بنابراین $\frac{c_۰ - c_۲}{c_۱} > ۱$ است. در جدول ۱۲بازه θ^* به‌ازای مقادیر مختلف $\theta_{c_۰}$ با استفاده از رابطه (۲۶) گزارش شده است. مشاهده می‌شود با افزایش $\frac{c_۰ - c_۲}{c_۱}$ مقادیر $\theta_{c_۰}$ افزایش می‌یابد، که این موضوع قابل انتظار بود. همچنین ملاحظه می‌شود که ناحیه بهینه برای هواپیمای ۷۹۱۲ کوچکتر از ۷۹۱۴ است.

جدول ۱۲. ناحیه بهینه θ به ازای مقادیر مختلف $\theta_{c_۰}$ وقتی N دارای توزیع پواسن بریده‌شده در صفر و مؤلفه‌ها دارای توزیع $W(\alpha, ۱)$ است.

هواپیما	$\hat{\alpha}$	$\mu_۰$	$\hat{\theta}_{\mu_۰}$	$\frac{c_۰ - c_۲}{c_۱}$	$\theta_{c_۰}$	$\theta^* \in (۰, \min(\theta_{c_۰}, \hat{\theta}_{\mu_۰})]$
۷۹۱۲	۰/۰۱۶۸	۵۹/۶	۰/۰۰۰۰۱	۴	۳/۹۲۱	(۰, ۰/۰۰۰۰۱]
				۶	۵/۹۸۵	(۰, ۰/۰۰۰۰۱]
				۸	۷/۹۹۷	(۰, ۰/۰۰۰۰۱]
۷۹۱۴	۰/۰۱۱۶	۶۴/۱۲۵	۱/۱۱۰۴	۴	۳/۹۲۱	(۰, ۱/۱۱۰۴]
				۶	۵/۹۸۵	(۰, ۱/۱۱۰۴]
				۸	۷/۹۹۷	(۰, ۱/۱۱۰۴]

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مطالعه مسئله بهینه‌سازی برمبنای ساختار یک سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی انجام شد. برای حالتی که تعداد مؤلفه‌های سیستم دارای توزیع هندسی (لگاریتمی یا پواسن بریده‌شده در صفر) است، ناحیه بهینه برای پارامتر توزیع تعداد مؤلفه‌ها تحت شرایط بهینه‌سازی برمبنای متوسط طول عمر، تابع هزینه و متوسط زمان کل آزمایش به صورت نظری و عددی تعیین شده است. با استفاده نتایج بخش‌های چهارم و پنجم مقاله می‌توان تأثیر توزیع تعداد مؤلفه‌ها را بر مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها تعیین نمود. مشاهده می‌شود وقتی توزیع طول عمر مؤلفه‌ها نمایی استاندارد است، مجموعه مقادیر بهینه تعداد مؤلفه‌ها در توزیع خانواده سری توانی با نرخ خطر نزولی بزرگتر از زمانی است که دارای نرخ خطر صعودی یا ثابت است. این نتیجه وقتی توزیع طول عمر مؤلفه‌ها $W(۱, ۲)$ است، برعکس است.

یک معیار پیشنهادی می‌تواند تابعی وزنی برحسب متوسط طول عمر سیستم و تابع هزینه بصورت

$$L = w\frac{c_\theta}{c_\theta^{opt}} + (1-w)\frac{\mu_\theta^{opt}}{\mu_\theta}, \quad 0 < w < 1, \tag{۲۷}$$

باشد، که در آن $\mu_\theta^{opt} = \lim_{\theta\to 0}\mu_\theta$ و $c_\theta^{opt} = \lim_{\theta\to 0} c_\theta = c_1 + c_2$. مینیمم مقدار تابع L برحسب θ تعداد بهینه مؤلفه‌ها را نتیجه می‌دهد. اما باید توجه شود که اگر تابع هزینه داده شده در رابطه (۲۱) برحسب $E(N)$ صعودی و متوسط طول عمر سیستم برحسب N نزولی باشد، آنگاه تابع L بیان‌شده در رابطه (۲۷) یا هر تابع وزنی دیگر براساس این دو معیار، تابع صعودی برحسب N است، درنتیجه مسئله بهینه‌سازی تحت این شرایط جواب ندارد و نیاز به محدودیت‌هایی دارد. وقتی یک سیستم سری از کار می‌افتد، فقط ضعیف‌ترین آن‌ها از کار افتاده و فروش مؤلفه‌های باقیمانده می‌تواند در ساختن تابع هزینه و مسئله بهینه‌سازی لحاظ شود. بعلاوه وقتی که مؤلفه‌های سیستم وابسته باشند، موضوع مطرح شده در این مقاله می‌تواند مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

لازم می‌دانیم از پیشنهادات داوران محترم که باعث بهبود مقاله شده است، سپاسگزاری کنیم.

مراجع

ایرانمنش، ف.، رضاپور، م.، پورموسی ر. (۱۳۹۷)، بهینه‌سازی نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در یک سیستم چند وضعیتی، مجله علوم آماری، ۱۲، ۵۷-۷۲.

بصیری، ا. (۱۳۹۹)، بهینه‌سازی قابلیت اطمینان و هزینه در سیستم‌های سری-موازی تعمیرپذیر با نرخ شکست وانی‌شکل، مجله علوم آماری، ۱۴، ۳۵۱-۳۶۶.

صفائی، ف. و احمدی، ج. (۱۳۹۴)، مقایسه زمان جایگذاری بهینه در سیستم‌های قابل تعمیر براساس توابع نرخ خرابی و احتمال تعمیر مینیمال، مجله علوم آماری، ۹، ۶۱-۷۶.

Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E. and Gupta, R. C. (2011), Estimation of

Reliability in a Series System with Random Sample Size, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 964-972.

Barlow, R. E., and Proschan, F. (1965), *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley and Sons, New York.

Bartoszewicz, J. (2001), Stochastic Comparisons of Random Minima and Maxima from Life Distributions, *Statistics and Probability Letters*, **55**, 107-112.

Eryilmaz, S. (2017), A Note on Optimization Problems of a Parallel System with a Random Number of Units, *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering*, **24**, 1-9.

Gupta, R. C., and Huang, J. (2017), The Weibull Conway-Maxwell-Poisson Distribution to Analyze Survival Data, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **311**, 171-182.

Hazra, N. K., Nanda, A. K. and Shaked, M. (2014), Some Aging Properties of Parallel and Series Systems with a Random Number of Components, *Naval Research Logistics*, **61**, 238-243.

Ito, K., Zhao, X. and Nakagawa, T. (2017), Random Number of Units for K-out-of-n Systems, *Applied Mathematical Modeling*, **45**, 563-572.

Johnson, N. L., Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005), *Univariate Discrete Distributions*, third ed. Wiley, New York.

Kus, C. (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.

Lewin, L. (1981), *Polylogarithms and Associated Functions*, North Holland, New York.

Morais, A. L., and Ferrari, S. L. P. (2017), A Class of Regression Models for Parallel and Series Systems with a Random Number of Components, *Statistics, A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **51**, 294-313.

Nakagawa, T. (1984), Optimal Number of Units for a Parallel System, *Journal of Applied Probability*, **21**, 431-436.

Nakagawa, T. (2008), *Advanced Reliability Models and Maintenance Policies*, Springer, London.

Nakagawa, T., and Zhao, X. (2012), Optimization Problems of a Parallel System with a Random Number of Units, *IEEE Transactions Reliability*, **61**, 543-548.

Proschan, F. (1963), Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics*, **5**, 375-383.

Salvia, A.A., and Bollinger, R. C. (1982), On Discrete Hazard Functions, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 458-459.

Shaked, M., and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer Verlage, New York.

Shaked, M., and Wong, T. (1997), Stochastic Comparisons of Random Minima and Maxima, *Journal of Applied Probability*, **34**, 420-425.

Xie, M., Gaudoin, O. and Bracquemond, C. (2002), Redefining Failure Rate Function for Discrete Distributions, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **9**, 275-285.

Yasui, K., Nakagawa, T. and Osaki, S. (1988), A Summary of Optimum Replacement Policies for a Parallel Redundant System, *Microelectronics Reliability*, **28**, 635-641.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021
Vol. 15, No. 2, pp 481-504
DOI: 10.29252/jss.15.2.481

Optimization Problem in Series Systems with Random Number of Components from the Family of Power Series Distributions

Zaeemzadeh[1]، M.، Ahmadi، J.[1]، Khatib Astaneh، B.[2]
[1]Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
[2]Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran.

Abstract: In this paper, the lifetime model based on series systems with a random number of components from the family of power series distributions has been considered. First, some basic theoretical results have been obtained, which have been used to optimize the number of components in series systems. The average lifetime of the system, the cost function, and the total time on test have been used as an objective function in optimization. The issue has been investigated in detail when the lifetimes of system components have Weibull distribution, and the number of components has geometric, logarithmic, or zero-truncated Poisson distributions. The results have been given analytically and numerically. Finally, a real data set has been used to illustrate the obtained results.

Keywords: Optimization, Geometric distribution, Series system, Total time on test, Weibull distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05, 90B25.