استنباط ناپارامتری برای توزیع طول عمر مولفه سیستم‌های منسجم بر اساس سانسور فزاینده

عادله فلاح

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده: در این مقاله، استنباط ناپارامتری در سیستم‌های منسجم k مولفه‌ای هنگامی که داده‌های طول عمر سیستم، سانسور شده فزاینده نوع دو هستند مورد مطالعه قرار گرفته است. در این سیستم‌های منسجم، فرض می‌شود ساختار و اثر مشخصه سیستم مشخص هستند. بر اساس داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده فزاینده نوع دو، بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های توزیع طول عمر مولفه‌ها محاسبه شده است. همچنین، حدود تحمل برای توزیع طول عمر مولفه‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک‌ها و حدود تحمل بر اساس دو روش، روش تابع توزیع و روش ماتریس آمیخته W محاسبه شده است. برای تشریح بیشتر روش‌های بازه‌های اطمینان معرفی شده، سه مثال عددی ارائه و مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: .سیستم منسجم، سانسور فزاینده، چندک، بازه اطمینان ناپارامتری، حدود تحمل

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: عادله فلاح، adelehfallah@pnu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62G30، 62N05.

۱ مقدمه

به مجموعه‌ای شامل چندین مولفه که با ساختار معینی طراحی گردیده‌اند، سیستم یا سامانه می‌گویند. با توجه به پیشرفت‌های فناوری در زمینه‌های مختلف، برای انجام کارها و حتی امور روزانه به دستگاه‌ها و تجهیزات زیادی وابسته هستیم. معمولا این دستگاه‌ها از سامانه‌های سخت افزاری یا نرم افزاری مختلفی بهره می‌برند که دارای اجزای کوچکتری هستند. هر یک از این اجزاء به طور مستقل یا وابسته به یکدیگر وظیفه‌ای را انجام داده و بسته به نوع اتصال اجزاء، سیستم وظیفه خود را انجام می‌دهد. یک سیستم k مولفه‌ای وقتی منسجم است که هر یک از k اجزای سازنده آن برای سیستم مفید هستند. در نظریه قابلیت اعتماد، سیستم‌های منسجم یک چارچوب کلاسیک برای توصیف ساختار سیستم‌ها ارائه می‌دهند. قابلیت اعتماد یک سیستم، احتمال عملکرد رضایت بخش آن سیستم، تحت شرایط کار مشخص در زمان معین است. یکی از مسائل مهم و مورد توجه در مهندسی قابلیت اعتماد، محاسبه اندازه قابلیت اعتماد یک سیستم یا طراحی سیستمی با قابلیت اعتماد پیش‌بینی شده بر اساس اجزاء آن است. طول عمر سیستم‌ها و قابلیت اعتماد هر سیستم مهندسی وابسته به قابلیت اعتماد مولفه‌های آن و عملکرد صحیح اجزایشان هستند. به منظور به‌دست آوردن دانش صحیح در مورد سیستم‌ها، آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اعتماد قبل از (و در هنگام) قرارگرفتن سیستم‌ها در بازار انجام می‌شود. هنگامی که سیستم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند ما علاقمند به نظارت بر قابلیت اجزای سیستم‌ها هستیم. آزمایش طول عمر روشی عملی برای تعیین قابلیت اعتماد و کیفیت سیستم است. در آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اعتماد، توزیع طول عمر سیستم و توزیع طول عمر اجزای سازنده سیستم، همیشه مورد توجه محققان قرار گرفته است. در بسیاری از موارد، طول عمر سیستمی که دارای k مولفه است را می‌توان از طریق آزمایش طول عمر مشاهده کرد اما طول عمر مولفه‌های سیستم را نمی‌توان مشاهده نمود. این مشکل زمانی ایجاد می‌شود که بعد از ساخته شدن سیستم و زمانی که سیستم شروع به فعالیت می‌کند، محققان قادر نخواهند بود مولفه‌های سیستم را به طور جداگانه مورد آزمایش قرار دهند. لذا اطلاعات مربوط به این که کدام مولفه منجر به خرابی سیستم شده است معمولاً ناشناخته باقی می‌ماند، زیرا آزمایش‌کننده اغلب توانایی شناسایی قطعه خراب را ندارد یا اینکه کل سیستم پس از خرابی کنار گذاشته می‌شود. در شرایط دیگر، توزیع طول عمر مولفه‌ها

ممکن است تغییر کند وقتی آنها در سیستم مشخصی استفاده شوند. در این موارد، ما فقط می‌توانیم طول عمر سیستم را مشاهده کنیم نه طول عمر مولفه‌ها را. در نتیجه استنباط ناپارامتری برای توزیع طول عمر مولفه‌ها ممکن است امکان‌پذیر نباشد. در مهندسی قابلیت اعتماد، تخمین کمی و تعیین حدود تحمل برای توزیع طول عمر قطعه مورد توجه ویژه مهندسان هستند که برای تضمین کیفیت ضروری است. برای بررسی جامع در مورد تخمین کمی و حدود تحمل به پاتل (۱۹۸۶) و دیویس و استاینبرگ (۲۰۰۶) مراجعه شود. در سال‌های اخیر، استنباط آماری برای توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس داده‌های طول عمر سیستم زمانی که اثر مشخصه مشخص است، مورد بحث قرار گرفته است. برای اطلاع درباره تحقیقات انجام شده می‌توان به باتاچاریا و سامانیگو (۲۰۱۰)، فلاح و همکاران (۲۰۲۱a،b)، رستمی و همکاران (۱۴۰۲)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۱a،b)، تونی و همکاران (۲۰۱۲)، توانگر و اسدی (۲۰۲۰)، یانگ و همکاران (۲۰۱۹)، ناوارو و رابو (۲۰۱۰)، ناوارو و همکاران (۲۰۰۸)، ناوارو (۲۰۲۱)، کالکارنی و راجرشی (۲۰۲۰)، کرامر و ناوارو (۲۰۱۶)، هرمنس و کرامر (۲۰۱۷) مراجعه کرد.

در این مقاله، استنباط ناپارامتری در سیستم‌های منسجم k مولفه‌ای که ساختارشان مشخص است و داده‌های طول عمر سیستم سانسور فزاینده نوع دو هستند مورد مطالعه قرار گرفته است. بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های توزیع طول عمر مولفه‌ها محاسبه می‌شوند. همچنین، حدود تحمل برای توزیع طول عمر مولفه‌ها نیز به‌دست آورده می‌شود. شایان ذکر است که توزیع طول عمر مولفه‌ها مشخص نیستند. ساختار این مقاله به صورت زیر است. در بخش ۲، مفهوم اثر مشخصه سیستم و روابط بین طول عمر سیستم و اجزا ارائه شده است که در بخش‌های بعدی مقاله، از آنها استفاده می‌شود. در بخش ۳، بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم بر اساس یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از داده‌های طول عمر سیستم به دو روش، روش تابع توزیع و روش ماتریس آمیخته W محاسبه شده است. در بخش ۴، حدود تحمل یک طرفه و دوطرفه برای توزیع طول عمر مولفه‌ها مورد مطالعه قرار می گیرد. در بخش ۵، سه مثال عددی برای تشریح بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌ها و حدود تحمل برای توزیع طول عمر مولفه‌ها ارائه شده است. و در نهایت در بخش پایانی نتایج بدست آمده ارائه شده است.

۲ مفاهیم اولیه

یک سیستم منسجم k مولفه‌ای، را با طول عمر T در نظر بگیرید. فرض کنید $X_1,\dots,X_k$ طول عمر مولفه‌های این سیستم منسجم را نشان می‌دهند که متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع مشترک $F_X(\cdot)$، تابع چگالی احتمال مشترک $f_X(\cdot)$ و تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_X(\cdot) = 1 - F_X(\cdot)$ هستند. همچنین، $X_{1:k} < \dots < X_{k:k}$ آماره‌های ترتیبی متناظر با طول عمر مولفه‌های این سیستم هستند. بردار k بعدی $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_k)$، اثر مشخصه یک سیستم منسجم نامیده می‌شود هرگاه عنصر مولفه i ام بردار $\mathbf{p}$ به‌صورت $p_i = P(T = X_{i:k})$ تعریف شود. در واقع، p_i این احتمال را نشان می‌دهد که خرابی i امین مولفه سیستم، منجر به خرابی کل سیستم شود. شایان ذکر است که $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. سامانیگو (۱۹۸۵)، نشان می‌دهد زمانی که تابع ساختار و اثر مشخصه یک سیستم منسجم مشخص هستند، تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر سیستم را می‌توان به‌صورت‌های

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{k}{j} [F_X(t)]^j [\bar{F}_X(t)]^{k-j},$$

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i \binom{n}{i} i f_X(t) [F_X(t)]^{i-1} [\bar{F}_X(t)]^{k-i}$$

بیان کرد. همچنین، ناوارو و همکاران (۲۰۰۷) نشان دادند که تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر یک سیستم منسجم را می‌توان به‌صورت

$$F_T(t) = \sum_{i=1}^{k} b_i F_{i:i}(t) = \sum_{i=1}^{k} b_i [F_X(t)]^i, \tag{1}$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \sum_{i=1}^{k} b_i i f_X(t) [F_X(t)]^{i-1}, \tag{2}$$

بیان نمود که در آن $b_1,\dots,b_k$ اعداد صحیح هستند که وابسته به $F_X(\cdot)$ نبوده و $\sum_{i=1}^{k} b_i = 1$. شایان ذکر است که $F_{i:i}(t)$ تابع قابلیت اعتماد طول عمر یک سیستم موازی با i مولفه است. یعنی

$X_{i:i} = \max\{X_1, \dots, X_i\}$. بردار $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$ بردار اثر مشخصه ماکزیمال نامیده می‌شود. در ناوارو و همکاران (۲۰۰۷) اثبات شده است که اثر مشخصه ماکزیمال یک سیستم را می‌توان از اثر مشخصه آن سیستم به‌دست آورد و بالعکس. براي اطلاع بیشتر درباره تحقیقات انجام شده در زمینه اثر مشخصه و اثر مشخصه ماکزیمال می‌توان به ناوارو و رابو (۲۰۱۰)، سامانیگو (۲۰۰۷) و کوچر و همکاران (۱۹۹۹) مراجعه کرد.

طرح سانسور فزاینده نوع دو در آزمایش طول عمر سیستم‌ها به‌صورت زیر توصیف شده است. n سیستم k مولفه‌ای مستقل با ساختار سیستمی یکسان در معرض آزمایش طول عمر قرار گرفته است. مقادیر m، $(m < n)$ و $R_1, \dots, R_m$ قبل از شروع آزمایش ثابت در نظر گرفته می‌شوند، به طوری که $n = m + \sum_{i=1}^{m} R_i$. به محض مشاهده اولین شکست، به طور تصادفی R_1 سیستم از بین $n - 1$ سیستم سالم، از آزمایش کنار گذاشته می‌شود. به طور مشابه، به محض مشاهده دومین شکست، به طور تصادفی R_2 سیستم از بین $n - R_1 - 2$ سیستم سالم باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شود. این فرآیند تا وقتی ادامه دارد که بعد از شکست سیستم mام، همه سیستم‌های سالم باقیمانده، یعنی $R_m = n - m - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1}$ از آزمایش کنار گذاشته شوند. داده‌های طول عمر سیستم به‌دست آمده از چنین آزمایش طول عمر را با $Y_{1:m:n} < \dots < Y_{m:m:n}$ نشان داده و آن را نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو می‌نامند. در این مقاله برای ساده سازی، نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو را $Y_1 < \dots < Y_m$ و نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو مشاهده شده با $y_1 < \dots < y_m$ نشان داده می‌شود. در حالت خاص، اگر $R_1 = \dots = R_{m-1} = 0, \quad R_m = n - m,$ آنگاه، این طرح به طرح سانسور نوع دوم متداول تبدیل می‌شود که در آن فقط اولین m خرابی مشاهده می‌شوند. همچنین اگر $R_1 = \dots = R_m = 0, \quad n = m,$ باشند، آنگاه طرح فوق، به طرح فاقد سانسور یا طرح نمونه کامل تبدیل می‌شود، که در آن طول عمر همه n سیستم، مشاهده می‌شوند. برای جزئیات بیشتر در مورد سانسورهای فزاینده به کمپس و کرامر (۲۰۰۱) و بالاکریشنان و کرامر (۲۰۱۴) مراجعه شود.

الگوریتم ۱. الگوریتم تولید نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو برای داده‌های واقعی :

گام ۱- نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را به ترتیب صعودی $X_{1:n} < \dots < X_{n:n}$ مرتب کنید.

گام ۲- قرار دهید $N_1 = \{1, \dots, n\}$.

گام ۳- برای $i = 1$ تا m انجام دهید.

گام ۴- در نظر بگیرید $k_i = \min N_i$ و قرار دهید $Y_{i:m:n} = X_{k_i:n}$.

گام ۵- به طور تصادفی یک نمونه بدون جایگزین $R_i \subseteq N_i \setminus \{k_i\}$ با $|R_i| = R_i$ انتخاب کنید.

گام ۶- اگر $i < m$، قرار دهید $N_{i+1} = N_i \setminus (\{k_i\} \sqcup R_i)$ و به گام ۴ بروید در غیر اینصورت الگوریتم پایان می‌ابد.

۳ بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های توزیع طول عمر مولفه‌ها

در این بخش، بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم بر اساس یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از داده‌های طول عمر سیستم با دو روش، تابع توزیع و ماتریس آمیخته W به‌دست آورده می‌شود.

فرض کنید $(Y_1, \ldots, Y_m)$ یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از یک سیستم منسجم با طول عمر T و با طرح سانسور $(R_1, \ldots, R_m)$ است. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال Y_r $(1 \leq r \leq m)$ به‌صورت (بالاکریشنان و کرامر ، ۲۰۱۴؛ کمپس و کرامر ، ۲۰۰۱)

$$F_{Y_r}(t) = 1 - (\prod_{l=1}^{r} \gamma_l) \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\gamma_j} \, a_{j,r} \, (1 - F_T(t))^{\gamma_j} \,, \tag{۳}$$

$$f_{Y_r}(t) = f_T(t) \, (\prod_{l=1}^{r} \gamma_l) \sum_{j=1}^{r} a_{j,r} (1 - F_T(t))^{\gamma_j - 1}, \tag{۴}$$

هستند، که در آن

$$\gamma_l = \sum_{j=l}^{m} (R_j + 1), \qquad l = 1, \ldots, m,$$
$$a_{j,r} = \prod_{l=1, l \neq j} \frac{1}{\gamma_l - \gamma_j}, \qquad 1 \leq j \leq r \leq n.$$

بر اساس نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از داده‌های طول عمر سیستم‌ها $(Y_1, \dots, Y_m)$، کران بالای اطمینان % $100(1-\alpha)$ برای چندک ξ_q توزیع X عبارت است از $[0, Y_s)$، که s $(s = 1, \dots, m)$ حداقل مقداری است که در رابطه $P(Y_s \geq \xi_q) \geq 1-\alpha$ صدق می‌کند. به عبارتی $s := \inf\{s : P(Y_s \geq \xi_q) \geq 1-\alpha\}$. با توجه به روابط (۱) و (۳) رابطه

$$P(Y_s \geq \xi_q) = (\prod_{l=1}^{s} \gamma_l) \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\gamma_j} a_{j,s} (1 - F_T(\xi_q))^{\gamma_j}$$
$$= (\prod_{l=1}^{s} \gamma_l) \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\gamma_j} a_{j,s} \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i q^i\Big)^{\gamma_j}. \quad (5)$$

به‌دست آورده می‌شود. در نتیجه، برای مقادیر داده شده α، s کمترین عدد صحیحی است که از رابطه

$$(\prod_{l=1}^{s} \gamma_l) \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\gamma_j} a_{j,s} \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i q^i\Big)^{\gamma_j} \geq 1-\alpha, \quad (6)$$

حاصل می‌شود. به طور مشابه، کران پایین بازه اطمینان $100(1-\alpha)$٪ برای چندک ξ_q توزیع X عبارت است از $[Y_r, \infty)$، که r $(r = 1, \dots, m)$ حداکثر مقداری است که در رابطه $P(Y_r \leq \xi_q) \geq 1-\alpha$، صدق می‌کند. به عبارتی $r := \sup\{r : P(Y_r \leq \xi_q) \geq 1-\alpha\}$. با توجه به (۵) رابطه

$$P(Y_r \leq \xi_q) = 1 - (\prod_{l=1}^{r} \gamma_l) \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\gamma_j} a_{j,r} \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i q^i\Big)^{\gamma_j}. \quad (7)$$

به‌دست آورده می‌شود. در نتیجه، برای مقادیر داده شده α، r بیشترین عدد صحیحی است که از رابطه

$$(\prod_{l=1}^{r} \gamma_l) \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\gamma_j} a_{j,r} \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} b_i q^i\Big)^{\gamma_j} \leq \alpha, \quad (8)$$

به‌دست می‌آید. بازه اطمینان $[Y_r, Y_s]$، یک بازه اطمینان دو طرفه % $100(1-\alpha)$ برای چندک ξ_q

توزیع X است هرگاه مقادیر r و s ($1 \leq r < s \leq m$)، طوری محاسبه شوند که

$$P[Y_r \leq \xi_q \leq Y_s] = P(Y_s \geq \xi_q) - P(Y_r > \xi_q) \geq 1 - \alpha. \tag{۹}$$

با توجه به روابط (۵) و (۹) مقادیر r و s برای $1 \leq r < s \leq m$ از معادله

$$(\prod_{l=1}^{s}\gamma_l)\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{\gamma_j}a_{j,s}\Big(1-\sum_{i=1}^{k}b_iq^i\Big)^{\gamma_j} - \prod_{l=1}^{r}\gamma_l)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\gamma_j}a_{j,r}\Big(1-\sum_{i=1}^{k}b_iq^i\Big)^{\gamma_j} \geq 1-\alpha. \tag{۱۰}$$

به‌دست آورده می‌شوند. از آنجایی که، از معادله (۱۰) برای مقادیر r و s جواب یکتایی به‌دست آورده نمی‌شود. بنابراین، برای به‌دست آوردن یک بازه اطمینان بهینه، مقادیر r و s طوری انتخاب می‌شوند تا بازه اطمینان به‌دست آمده دارای کمترین طول با بیشترین احتمال پوشش باشد.

۱.۳ بازه اطمینان ناپارامتری به روش ماتریس آمیخته W

گیلبد (۲۰۰۱، ۲۰۰۴) نشان داده است که مشاهدات سانسور شده فزاینده نوع دو $Y_1, \ldots, Y_m$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی از آماره‌های ترتیبی متداول $T_1, \ldots, T_n$ نوشت. یعنی، $Y = WT$، که در آن W یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های $w_{i,j}$ است. $w_{i,j}$ یک متغیر دو مقداری است که برای $i = 1, \ldots, m$ و $j = 1, \ldots, n$، به‌صورت

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{اگر پیشامد } [Y_i = T_j] \text{ اتفاق افتد} \\ 0, & \text{اگر پیشامد } [Y_i = T_j] \text{ اتفاق نیافتد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود. همچنین، ماتریس W را می‌توان به‌صورت حاصلضرب m ماتریس مستقل از یکدیگر به‌صورت

$$W = K^{(m)}.K^{(m-1)} \ldots K^{(1)}, \tag{۱۱}$$

نوشت که در آن $K^{(i)}$ یک ماتریس $(i+N_i)\times(i+n_i)$ است و به صورت

$$K^{(i)}=\left(\begin{array}{c|c} I^{(i)} & 0_1^{(i)} \\ \hline 0_2^{(i)} & H^{(i)} \end{array}\right),$$

تعریف می‌شود، که در آن $I^{(i)}$ ماتریس همانی $i\times i$ و $0_1^{(i)}$ و $0_2^{(i)}$ ماتریس‌های صفر هستند. همچنین، $H^{(i)}$ ماتریس $n_i\times N_i$ و به صورت $H^{(i)}=(h_{r,s}^{(i)})$ تعریف می‌شود که $h_{r,s}^{(i)}=P[Z_r^{(i)}=Z_s^{*(i)}]$، یعنی احتمال اینکه r امین آماره ترتیبی در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری برابر با s امین آماره ترتیبی در جامعه متناهی است. شایان ذکر است که $Z_1^{*(i)}<\ldots<Z_{N_i}^{*(i)}$ و $Z_1^{(i)}<\ldots<Z_{n_i}^{(i)}$ به‌ترتیب، سیستم‌های سالم باقیمانده قبل و بعد از حذف تصادفی R_i سیستم، به محض مشاهده شکست Y_i هستند (ویلکس ، ۱۹۶۲؛ دیوید ، ۱۹۸۱). لذا، برای $1\leq r\leq n_i$ و $1\leq s\leq N_i$، $h_{r,s}^{(i)}$ به‌صورت

$$h_{r,s}^{(i)}=\begin{cases}\dfrac{\binom{s-1}{r-1}\binom{N_i-s}{n_i-r}}{\binom{N_i}{n_i}}, & r\leq s\leq r+R_i\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

است. توجه شود که در رابطه فوق $N_i=n_{i-1}-1$، $n_i=N_i-R_i$ و $n_0=n$ هستند. مجموع سطری ماتریس $H^{(i)}$ برابر یک است و در حالت خاص، اگر $R_i=0$، آنگاه $H^{(i)}$ یک ماتریس همانی است. برای محاسبه ماتریس W، مقادیر n و m و طرح سانسور R مشخص هستند. در سطر اول ماتریس W، درایه $w_{1,1}=1$ و درایه‌های $w_{1,j}$ برای $2\leq j\leq n$ همگی صفر هستند. بنابراین درایه‌های سطر اول W مشخص هستند. برای محاسبه بقیه درایه‌های W از رابطه (۱۱) استفاده می‌شود. از آنجایی که محاسبات بر اساس رابطه (۱۱)، سخت و طاقت فرسا است. گیلبد (۲۰۰۱)، رابطه

$$\left(\begin{array}{c|c} w_{i+1,i+1} & w_{i+1,i+2},\ldots,w_{i+1,n} \\ \hline 0^{(i)} & T^{(i)} \end{array}\right)=H^{(i)}T^{(i-1)} \tag{12}$$

را برای محاسبه درایه‌های ماتریس $W = (w_{i,j})$ ارائه نمود که می‌توان با استفاده از آن درایه‌های متوالی ماتریس W، $w_{i+1,i+1}, w_{i+1,i+2}, \dots, w_{i+1,n}$ را برای $1 \leq i \leq m-1$ محاسبه نمود. در رابطه فوق، $T^{(0)}$ یک ماتریس همانی $(n-1) \times (n-1)$ و $T^{(i-1)}$ از حذف سطر و ستون اول ماتریس $H^{(i-1)}$ به‌دست آورده می‌شود. با توجه به رابطه (۱۲)، در سطر دوم ماتریس W، درایه $w_{2,1} = 0$ و بقیه درایه‌های سطر دوم یعنی، $w_{2,j}$ برای $2 \leq j \leq n$ برابر با درایه‌های سطر اول ماتریس $H^{(1)}$ هستند. همچنین، در سطر سوم، درایه‌های $w_{3,1} = w_{3,2} = 0$ و بقیه درایه‌های این سطر یعنی، $w_{3,j}$ برای $3 \leq j \leq n$ برابر با درایه‌های سطر اول حاصلضرب دو ماتریس $H^{(2)}T^{(1)}$ هستند. به طور کلی، در سطر $(i+1)$ امین ماتریس W، درایه‌های $w_{i+1,j}$ برای $1 \leq j \leq i$، برابر صفر و بقیه درایه‌ها برای $i+1 \leq j \leq n$، برابر با سطر اول حاصلضرب دو ماتریس $H^{(i)}T^{(i-1)}$ هستند. به عنوان مثال، برای مقادیر $n = 19$، $m = 8$ و طرح سانسور $R = (0, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 5)$ ماتریس W، بر اساس رابطه (۱۲) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$W = \left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o_{3\times 5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0.81 & 0.16 & 0.02 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0.27 & 0.06 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0.34 & 0.18 & 0.07 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0 & o_{5\times 5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.19 & 0.29 & 0.26 & 0.14 & 0.06 & 0.02 & 0.00 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0.21 & 0.25 & 0.22 & 0.13 & 0.05 & 0.01 &
\end{array}\right),$$

برای حد اطمینان یک طرفه، n سیستم منسجم k مولفه‌ای با طول عمر $T_1, \dots, T_n$ را در نظر

بگیرید. بنابر (۱) رابطه

$$
\begin{aligned}
P(T_j \geq \xi_q) &= \sum_{h=0}^{j-1} \binom{n}{h} [F_T(\xi_q)]^h [1 - F_T(\xi_q)]^{n-h} \\
&= \sum_{h=0}^{j-1} \binom{n}{h} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} b_i [F_X(\xi_q)]^i \Big\}^h \Big\{ 1 - \sum_{l=1}^{k} b_i [F_X(\xi_q)]^i \Big\}^{n-h} \\
&= \sum_{h=0}^{j-1} \binom{n}{h} \Big[\sum_{i=1}^{k} b_i q^i \Big]^h \Big[1 - \sum_{i=1}^{k} b_i q^i \Big]^{n-h} = d_j, \qquad (۱۳)
\end{aligned}
$$

حاصل می‌شود. بر اساس نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از داده‌های طول عمر سیستم‌ها، کران بالای بازه اطمینان % $100(1-\alpha)$ برای چندک ξ_q توزیع X عبارت است از $[0, Y_s]$، که s $(1 \leq s \leq m)$ حداقل مقداری است که در رابطه

$$
P(Y_r \leq \xi_q) = 1 - \sum_{j=1}^{n} w_{r,j} P(T_j \geq \xi_q) = 1 - \sum_{j=1}^{n} w_{r,j} d_j \geq 1 - \alpha, \qquad (۱۴)
$$

صدق می‌کند. در نتیجه، برای مقادیر داده شده α، s کمترین عدد صحیحی است که از رابطه

$$
\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=0}^{j-1} w_{s,j} \binom{n}{h} \Big[\sum_{i=1}^{k} b_i q^i \Big]^h \Big[1 - \sum_{i=1}^{k} b_i q^i \Big]^{n-h} \geq 1 - \alpha,
$$

به‌دست آورده می‌شود. به طور مشابه، کران پایین بازه اطمینان % $100(1-\alpha)$ برای چندک ξ_q توزیع X عبارت است از $[Y_r, \infty)$، که r $(1 \leq r \leq m)$ حداکثر مقداری است که در رابطه

$$
P(Y_r \leq \xi_q) = 1 - \sum_{j=1}^{n} w_{r,j} P(T_j \geq \xi_q) = 1 - \sum_{j=1}^{n} w_{r,j}\ d_j \geq 1 - \alpha, \qquad (۱۵)
$$

صدق می‌کند. در نتیجه، برای α داده شده، r بیشترین عدد صحیحی است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=0}^{j-1} w_{r,j}\binom{n}{h}\Big[\sum_{l=1}^{k} b_l q^l\Big]^h\Big[1-\sum_{l=1}^{k} b_l q^l\Big]^{n-h} \leq \alpha.$$

بازه $[Y_r, Y_s]$، یک بازه اطمینان دو طرفه $100(1-\alpha)\%$ برای چندک ξ_q توزیع X است. هرگاه مقادیر r و s $(1 \leq r < s \leq m)$، طوری محاسبه شوند که

$$\begin{aligned} P(Y_r \leq \xi_q \leq Y_s) &= P(Y_s \geq \xi_q) - P(Y_r > \xi_q) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{s,j}\, d_j - \sum_{j=1}^{n} w_{r,j}\, d_j \geq 1-\alpha. \end{aligned} \tag{16}$$

چون از معادله (۱۶) برای مقادیر r و s جواب یکتایی به‌دست آورده نمی‌شود، بنابراین برای به‌دست آوردن یک بازه اطمینان بهینه، مقادیر r و s طوری انتخاب می‌شود تا بازه اطمینان به‌دست آمده دارای کمترین طول با بیشترین احتمال پوشش باشد. برای محاسبه بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌ها، چهار سیستم منسجم چهار مولفه‌ای با اثر مشخصه و اثر مشخصه ماکزیمال در نظر گرفته می‌شود. که این سیستم‌ها در جدول ۱ گزارش شده است. همچنین، برای مقادیر مختلفی از n و m، سه

جدول ۱: اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال سیستم‌های منسجم ۴ مولفه‌ای

شماره سیستم	طول عمر	اثر مشخصه	مشخصه ماکزیمال
۱	$\max\{X_1, \min\{X_2, X_3, X_4\}\}$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(0, 3, -3, 1)$
۲	$X_{3:4}(3-out-of-4)$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 4, -3)$
۳	$\min\{\max\{X_1, X_2\}, \max\{X_3, X_4\}\}$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	$(0, 2, 0, -1)$
۴	$\min\{X_1, \max\{X_2, X_3, X_4\}\}$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$	$(1, 0, 1, -1)$

طرح سانسور فزاینده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

طرح ۱: $(0, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 5)$

طرح ۲: $(0, 0, 13, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2)$

طرح ۳: $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10)$

مقادیر r و s به‌ترتیب برای حد پایین و حد بالای بازه‌های اطمینان یک طرفه برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم منسجم بر اساس مشاهدات سانسور فزاینده نوع دو به ازای مقادیر مختلفی از m و $q = 0.1(0.1)0.9$ محاسبه شده و نتایج این محاسبات در جداول ۲ و ۳ گزارش شده است. همچنین به طور مشابه، مقادیر $[r, s]$ برای حدود بازه‌های اطمینان دو طرفه برای چندک ξ_q به ازای مقادیر مختلفی از m و $q = 0.1(0.1)0.9$ محاسبه شده و نتایج این محاسبات در جدول ۴ گزارش شده است.

۴ حدود تحمل

برای تعیین کیفیت یک محصول تولید شده، یکی از تکنیک‌های مفید تعیین محدودیت‌هایی است که تضمین می‌کند درصد خاصی از محصولات تولیدی با درجه خاصی از اطمینان از این محدوده‌ها خارج نشوند، این عمل منجر به ایجاد محدودیت‌های تحمل شده است که اولین بار توسط شوارت (۱۹۳۱) به عنوان یک روش کنترل کیفیت معرفی شده است. فاصله‌های تحمل در بسیاری از زمینه‌های کاربردی مانند کنترل کیفیت، داروسازی و قابلیت اعتماد مورد استفاده قرار گرفته است. در این بخش، n سیستم منسجم k مولفه‌ای را با طول عمر $T_1, \ldots, T_n$ در نظر بگیرید. فرض کنید $(Y_1, \ldots, Y_m)$ یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از داده‌های طول عمر سیستم بر اساس طرح سانسور $(R_1, \ldots, R_m)$ است. در این بخش، حدود تحمل برای توزیع طول عمر مولفه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

فاصله تصادفی $[Y_r, \infty)$، حداقل β درصد از طول عمر مولفه‌های سیستم را با احتمال $1 - \alpha$ در بر دارد. یعنی

$$P[(Y_r < X < \infty) \geq \beta] = P[1 - F_X(Y_r) \geq \beta] = 1 - \alpha.$$

در نتیجه، Y_r حد پایین تحمل با پوشش β و با میزان اطمینان $1 - \alpha$ برای توزیع طول عمر مولفه‌های

سیستم نامیده می‌شود. با توجه به اینکه

$$P[1 - F_X(Y_r) \geq \beta] = P[Y_r \leq F_X^{-1}(1 - \beta)] = P[Y_r \leq \xi_{1-\beta}],$$

است. لذا حد پایین تحمل Y_r با پوشش β در سطح معنی داری $1 - \alpha$ با جایگذاری $q = 1 - \beta$ از رابطه (۸) به‌دست آورده می‌شود. به طور مشابه، فاصله تصادفی $[0, Y_s]$ حداقل β درصد از طول عمر مولفه‌های سیستم را با احتمال $1 - \alpha$ در بر دارد، یعنی

$$P[P(0 < X < Y_s) \geq \beta] = P[F_X(Y_s) \geq \beta] = 1 - \alpha.$$

در نتیجه، Y_s حد بالای تحمل با پوشش β و با میزان اطمینان $1 - \alpha$ برای توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم نامیده می‌شود. با توجه به اینکه

$$P[F_X(Y_s) \geq \beta] = P[Y_s \geq F_X^{-1}(\beta)] = P[Y_s \geq \xi_\beta].$$

است. لذا حد بالای تحمل Y_s با پوشش β در سطح معنی داری $1 - \alpha$ با جایگذاری $q = \beta$ از رابطه (۶) به‌دست آورده می‌شود.

فاصله تصادفی $[Y_r, Y_s]$ یک فاصله تحمل با پوشش β و اطمینان $1 - \alpha$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$P[P(Y_r < X < Y_s) \geq \beta] = P[F_X(Y_s) - F_X(Y_r) \geq \beta] \geq 1 - \alpha.$$

بنابراین، فاصله تصادفی $[Y_r, Y_s]$ حداقل β درصد از کل توزیع X را با $1 - \alpha$ درصد اطمینان در بر می‌گیرد یا تحمل می‌کند. لذا برای محاسبه فاصله تحمل $[Y_r, Y_s]$ باید $P[F_X(Y_s) - F_X(Y_r) \geq \beta]$

محاسبه شود. با توجه به رابطه (۱۰) تابع توزیع طول عمر T را می‌توان به‌صورت

$$F_T(t) = \sum_{i=1}^{k} b_i [F_X(t)]^i = H_T(F_X(t)),$$

نوشت که در آن $H_T(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i x^i$ و $F_X(t) = H_T^{-1}(F_T(t))$ هستند. بنابراین

$$F_X(Y_s) - F_X(Y_r) = H_T^{-1}(F_T(Y_s)) - H_T^{-1}(F_T(Y_r)) \stackrel{d}{=} H_T^{-1}(U_s) - H_T^{-1}(U_r),$$

که در آن U_s و U_r، به ترتیب s امین و r امین آماره ترتیبی یک نمونه سانسور فزاینده نوع دو به اندازه m از توزیع یکنواخت $U(0,1)$ هستند. فاصله تصادفی $[Y_r, Y_s]$ یک فاصله تحمل با میزان β برای توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم است هرگاه $P(H_T^{-1}(U_s) - H_T^{-1}(U_r) \geq \beta) \geq 1-\alpha$. از طرفی تابع چگالی توام (U_r, U_s) برای $1 \leq r < s \leq m$ برای $0 < u_1 < u_2 < 1$ عبارت است از (بالاکریشنان و کرامر ، ۲۰۱۴)

$$g_{(U_r,U_s)}(u_1, u_2) = (\prod_{j=1}^{s} \gamma_j) \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{s} a_{i,r}\ a_{j,s}^{(r)} \Big[\frac{1-u_2}{1-u_1}\Big]^{\gamma_j - 1} (1-u_1)^{\gamma_i - 2}$$

که در آن $a_{j,s}^{(r)} = \prod_{\nu=r+1, \nu\neq j} \frac{1}{\gamma_\nu - \gamma_j}$ است. بنابراین r و s برای $1 \leq r < s \leq m$ از معادله

$$\int_0^1 \int_0^{u_2} g_{(U_r,U_s)}(u_1, u_2) I\{H_T^{-1}(U_s) - H_T^{-1}(U_r) \geq \beta\} du_1 du_2 \geq 1-\alpha, \quad (17)$$

به‌دست آورده می‌شوند، که در آن $I\{\cdot\}$ تابع نشانگر است. برای مقادیر مشخصی از β، انتگرال رابطه (۱۷) را می‌توان به صورت عددی یا با استفاده از روشهای مونت کارلو محاسبه نمود. مقادیر (r,s) به‌دست آمده از (۱۷) یکتا نخواهد بود. در نتیجه، برای به‌دست آوردن یک بازه اطمینان بهینه مقادیر r و s طوری انتخاب می‌شود تا بازه اطمینان به‌دست آمده دارای کمترین طول با بیشترین احتمال پوشش باشد. برای محاسبه فاصله تحمل بر اساس مشاهدات سانسور شده نوع دو، روش دیگری توسط گیلبد (۲۰۰۴) ارائه

شده است و به‌صورت

$$\begin{aligned} P[F(Y_s)-F(Y_r)\geq\beta] &= \sum_{j_1=r}^{r+c_r} w_{r,j_1} \sum_{j_2=s+(j_1-r)}^{s+c_s} (r,j_1)_{w_{s-r+1,j_2-j_1+1}} \\ &\times\; P[F(T_{j_2})-F(T_{j_1})\geq\beta] \end{aligned}$$

محاسبه شده، که در آن

$$C_i=\begin{cases} 0, & i=1، \\ R_1+\ldots+R_{i-1}, & 2\leq i\leq m, \end{cases}$$

و برای $j_1 < j_2$ به‌صورت

$$\begin{aligned} P[F(T_{j_2})-F(T_{j_1})\geq\beta] &= P[F(T_{j_2-j_1})\geq\beta] \\ &= \sum_{h=0}^{j_2-j_1-1}\binom{n}{h}[F_T(\xi_\beta)]^h[1-F_T(\xi_\beta)]^{n-h} \\ &= \sum_{h=0}^{j_2-j_1-1}\binom{n}{h}\Big[\sum_{l=1}^{k} b_l\beta^l\Big]^h\Big[1-\sum_{l=1}^{k} b_l\beta^l\Big]^{n-h}. \end{aligned}$$

به‌دست آورده می‌شود. همچنین، ماتریس $(i,j)_W$ نوعی ماتریس W از مرتبه $(m-i+1)\times(n-j+1)$ است و به‌صورت $(i,j)_W=(W(\acute{m},\acute{n};\acute{R}_1,\ldots,\acute{R}m))$ تعریف می‌شود. برای هر

$$[(i,j)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\};\quad 1\leq i\leq j\leq i+C_i]$$

داریم $\acute{m}=m-i+1$، $\acute{n}=n-j+1$، $\acute{R}_1=i+R_1+\ldots+R_i-j$ و $\acute{R}_2=R_{i+1},\ldots,\acute{R}m=R_m$.

برای اطلاع بیشتر در زمینه فاصله تحمل می‌توان به کریشناموردی و مدوی (۲۰۰۹)، گیلبد (۲۰۰۱)،

بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۰)، بالاکریشنان و کرامر (۲۰۱۴) مراجعه کرد. برای مقادیر $n = ۱۹$، $m = ۸$ و طرح سانسور $R = (۰, ۰, ۳, ۰, ۳, ۰, ۰, ۵)$، $P[F(Y_s) - F(Y_r) \geq \beta]$ برای مقادیر r, s و β محاسبه شده است. نتایج این محاسبات برای $\beta = ۰/۱(۰/۱)۰/۹$ در جدول ۵ گزارش شده است.

۵ مثال عددی

در این بخش، سه مثال عددی برای تشریح بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌ها و حدود تحمل برای توزیع طول عمر مولفه‌ها ارائه شده است. ابتدا توصیف می‌شود که چگونه می‌توان داده‌های طول عمر $T_۱, \ldots, T_n$ را برای سیستم‌های منسجم تولید کرد. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_k$ طول عمر مولفه‌های یک سیستم منسجم k مولفه‌ای، با مولفه‌های مستقل و هم‌توزیع نمایی با تابع توزیع $F_X(t) = ۱ - e^{-\theta t}, \quad t > ۰,\ \theta > ۰.$ هستند.

الگوریتم ۲. تولید داده‌های طول عمر سیستم :

گام ۱- u از توزیع $U(۰, ۱)$ تولید می‌شود.

گام ۲- طول عمر مولفه‌های سیستم منسجم $X_۱, \ldots, X_k$ از توزیع $F^{-۱}(u) = \frac{۱}{\theta}\log(۱-u)$ تولید می‌شوند.

گام ۳- $X_۱, \ldots, X_k$ به ترتیب صعودی $X_{۱:k} < \ldots, X_{k:k}$ مرتب می‌شود.

گام ۴- برای هر $j = ۱, \cdots, k$ که $\sum_{i=۱}^{j-۱} p_i < u < \sum_{i=۱}^{j} p_i$، قرار دهید $T = X_{j:k}$

گام ۵- گام‌های ۱ تا ۴، n بار تکرار می‌شود تا داده‌های طول عمر $T_۱, \ldots, T_n$ به‌دست آورده شوند.

گام ۶- براساس طرح سانسور $(R_۱, \ldots, R_m)$ و با استفاده از الگوریتم ۱، نمونه سانسور فزاینده نوع دوم $Y_۱, \ldots, Y_m$، $(m < n)$ از داده‌های طول عمر $T_۱, \ldots, T_n$ تولید می‌شود.

مثال ۱. برای یک سیستم منسجم چهار مولفه‌ای طول عمر به صورت $T = \min\{X_۱, \max\{X_۲, X_۳, X_۴\}\}$ است، که در آن X_i طول عمر مولفه i است $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$. از ناوارو و همکاران (۲۰۰۷)، اثر مشخصه و اثر مشخصه ماکزیمال این سیستم به‌ترتیب عبارتند از $\mathbf{p} = (۱/۴, ۱/۴, ۱/۲, ۰)$ و

$\mathbf{b} = (1, 0, 1, -1)$. با استفاده از الگوریتم تولید داده‌های طول عمر سیستم‌های منسجم، یک نمونه به حجم $n = 19$ از این سیستم منسجم تولید می‌شود. فرض می‌شود مولفه‌های طول عمر این سیستم منسجم مستقل و همتوزیع با توزیع نمایی با پارامتر $\theta = 2$ هستند. داده‌های طول عمر سیستم تولید شده عبارتند از:

۰٫۰۵۲۳	۰٫۰۶۶۶	۰٫۰۶۷۱	۰٫۰۷۴۸	۰٫۱۴۱۸	۰٫۱۵۰۱	۰٫۲۲۷۹	۰٫۲۳۲۲	۰٫۲۸۴۰	۰٫۳۲۴۸
۰٫۳۳۷۲	۰٫۳۷۸۸	۰٫۴۲۸۶	۰٫۵۹۳۵	۰٫۶۴۵۳	۰٫۶۹۵۷	۰٫۹۹۸۰	۱٫۱۰۶۲	۱٫۲۸۰۲	

بر اساس طرح سانسور $R = (0, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 5)$، نمونه سانسور فزاینده تولید شده از داده‌های طول عمر سیستم بالا عبارتند از:

۰٫۰۵۲۳	۰٫۰۶۶۶	۰٫۰۶۷۱	۰٫۰۷۴۸	۰٫۱۴۱۸	۰٫۱۵۰۱	۰٫۲۳۲۲	۰٫۲۸۴۰

برای تشریح نتایج بخش‌های ۳ و ۴، بازه‌های اطمینان ۹۵٪ برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌ها به‌دست آمده است. از جداول ۲، ۳ و ۴ بازه‌های اطمینان یک طرفه و بازه اطمینان دو طرفه برای چندک $\xi_{0.2}$، به‌ترتیب به‌صورت $(0, Y_7]$، $[Y_1, \infty)$ و $[Y_1, Y_7]$ محاسبه شده‌اند. که بر اساس داده‌های سانسور شده فوق، بازه‌های اطمینان یک طرفه و بازه اطمینان دو طرفه برای چندک $\xi_{0.2}$، به‌ترتیب به‌صورت $(0, Y_7] = (0, 0.2279]$، $[Y_1, \infty) = [0.0523, \infty)$ و $[Y_1, Y_7] = [0.0523, 0.2279]$ با ضریب های اطمینان متناظر ۰٫۹۷۳۶، ۰٫۹۸۷۷ و ۰٫۹۶۱۳ هستند.

مثال ۲. فرض کنید تولید کننده قطعات الکتریکی مایل است حد پایین تحمل Y_r، را برای طول عمر مولفه‌های قطعات الکتریکی به‌دست آورد تا ۹۰٪ مطمئن باشد که ۸۰٪ از اجزای قطعات الکتریکی دارای طول عمر بالاتری خواهند بود. یعنی، $P[1 - F(Y_r) \geq 0.8] = P[Y_r \leq \xi_{0.2}] \geq 0.90$. برای این هدف، ۱۹ سیستم چهار مولفه‌ای را با اثر مشخصه $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/2, 0)$، مطابق مثال ۱ در نظر گرفته و بر اساس مشاهدات سانسور شده از طول عمر آن حد پایین فاصله تحمل با ضریب اطمینان ۰٫۹۲۶ برابر با $[Y_2, \infty) = [0.0666, \infty)$ است.

مثال ۳. فرض کنید تولید کننده قطعات الکتریکی مایل است حد پایین و حد بالای فاصله تحمل Y_r و Y_s را برای قطعات الکتریکی به‌دست آورد تا حداقل ۹۵٪ مطمئن شود که حداقل ۲۰٪ از اجزای قطعات

الکتریکی دارای طول عمر بین این دو حدود خواهند بود. یعنی، $P(F(Y_s)-F(Y_r)\geq 0.2)\geq 0.95$. بر اساس جدول ۵، حد پایین و حد بالای فاصله تحمل به‌ترتیب $Y_r=Y_1$ و $Y_s=Y_6$ محاسبه شده است، به‌طوری که $P[(F(Y_6)-F(Y_1)\geq 0.2)]=0.9710$. بنابراین، بر اساس مشاهدات سانسور شده از طول عمر مثال ۱، فاصله تحمل برای توزیع طول عمر این سیستم $[Y_1,Y_6]=[0.0523, 0.1501]$ محاسبه می‌شود.

جدول ۲: مقادیر s برای بازه اطمینان $[0, Y_s)$، چندک‌های $q=0.1(0.1)0.9$ و چهار سیستم منسجم.

سطح اطمینان	m	q	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
٪۹۰	۸	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	۲	۴	۶	۸					
		$(0,0,1,0)$	۱	۲	۴	۶	۸				
		$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	۲	۴	۶	۸					
		$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	۴	۶	۸						
	۱۰	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	۳	۵	۶	۸	۹	۱۰			
		$(0,0,1,0)$	۱	۳	۴	۶	۸	۹			
		$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	۲	۴	۶	۷	۹				
		$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	۵	۶	۸	۹	۱۰				
	۱۵	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	۳	۵	۸	۱۲	۱۵				
		$(0,0,1,0)$	۱	۳	۵	۸	۱۲				
		$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	۲	۵	۸	۱۱	۱۵				
		$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	۵	۹	۱۲	۱۵					
٪۹۵	۸	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	۳	۵	۷						
		$(0,0,1,0)$	۲	۳	۵	۷					
		$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	۲	۴	۶	۸					
		$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	۵	۷							
	۱۰	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	۳	۵	۷	۸	۱۰				
		$(0,0,1,0)$	۲	۳	۵	۶	۸	۱۰			
		$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	۳	۵	۶	۸	۱۰				
		$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	۵	۷	۸	۱۰					
	۱۵	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	۳	۶	۹	۱۳					
		$(0,0,1,0)$	۲	۳	۵	۹	۱۳				
		$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	۳	۵	۸	۱۲					
		$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0)$	۶	۹	۱۳						

جدول ۳: مقادیر r برای بازه اطمینان $[Y_r, \infty)$، چندک‌های $q =$ ۰/۱(۰/۱)۰/۹ و چهار سیستم منسجم.

سطح اطمینان	m	q	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
٪۹۰	۸	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$			۲	۳	۵	۶	۷	۸	۸
		$(0, 0, 1, 0)$				۱	۳	۵	۷	۸	۸
		$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$			۱	۳	۵	۶	۸	۸	۸
		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$		۲	۳	۵	۶	۸	۸	۸	۸
	۱۰	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$		۱	۳	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰
		$(0, 0, 1, 0)$				۲	۳	۵	۷	۹	۱۰
		$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$			۲	۳	۴	۶	۸	۹	۱۰
		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$	۱	۳	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰	۱۰
	۱۵	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$		۱	۲	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۵	۱۵
		$(0, 0, 1, 0)$				۲	۵	۹	۱۳	۱۵	۱۵
		$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$			۲	۵	۸	۱۲	۱۵	۱۵	۱۵
		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$	۱	۳	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۵	۱۵	۱۵
٪۹۵	۸	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$			۱	۳	۴	۶	۷	۸	۸
		$(0, 0, 1, 0)$				۱	۳	۵	۷	۸	۸
		$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$			۱	۲	۴	۶	۸	۸	۸
		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$		۱	۳	۴	۶	۷	۸	۸	۸
	۱۰	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$			۲	۳	۴	۵	۶	۸	۹
		$(0, 0, 1, 0)$				۲	۳	۴	۶	۸	۱۰
		$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$			۱	۳	۴	۵	۷	۹	۱۰
		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$		۲	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰
	۱۵	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$			۲	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۵	۱۵
		$(0, 0, 1, 0)$				۲	۴	۸	۱۲	۱۵	۱۵
		$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$			۱	۴	۷	۱۱	۱۵	۱۵	۱۵
		$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$		۲	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۵	۱۵	۱۵

بحث و نتیجه‌گیری

استنباط آماری ناپارامتری برای برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد توزیع طول عمر مولفه بر اساس داده‌های طول عمر سانسور شده فزاینده نوع دو برای سیستم‌های منسجم با اثر مشخصه مشخص مورد بحث قرار گرفته است. فرآیندهای استنباطی توسعه‌یافته در اینجا زمانی مفید هستند که اطلاعات مربوط به این که

جدول ۴: مقادیر r و s بازه اطمینان $[Y_r, Y_s]$، چندک‌های $q = ۰/۱(۰/۱)۰/۹$ و چهار سیستم منسجم.

سطح اطمینان	m	q	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
٪۹۰	۸	$(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$			[۶،۱]	[۸،۳]					
		$(۰, ۰, ۱, ۰)$				[۷،۱]	[۸،۳]				
		$(۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$			[۶،۱]	[۸،۳]					
		$(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۰)$		[۷،۲]	[۸،۳]						
	۱۰	$(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$		[۵،۱]	[۶،۲]	[۸،۳]	[۹،۴]	[۱۰،۴]			
		$(۰, ۰, ۱, ۰)$				[۶،۲]	[۸،۳]	[۱۰،۴]			
		$(۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$			[۶،۲]	[۸،۳]	[۹،۴]				
		$(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۰)$	[۵،۱]	[۶،۱]	[۸،۳]	[۹،۴]	[۱۰،۳]				
	۱۵	$(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$		[۷،۱]	[۹،۲]	[۱۲،۴]	[۱۵،۶]				
		$(۰, ۰, ۱, ۰)$				[۹،۲]	[۱۲،۴]	[۱۰،۴]			
		$(۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$			[۸،۱]	[۱۲،۴]	[۱۵،۶]				
		$(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۰)$	[۷،۱]	[۹،۲]	[۱۲،۴]	[۱۵،۶]					
٪۹۵	۸	$(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$			[۷،۱]						
		$(۰, ۰, ۱, ۰)$				[۷،۱]					
		$(۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$			[۷،۱]	[۸،۱]					
		$(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۰)$		[۷،۱]							
	۱۰	$(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$			[۷،۲]	[۸،۳]	[۱۰،۴]				
		$(۰, ۰, ۱, ۰)$				[۷،۱]	[۸،۳]	[۱۰،۴]			
		$(۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$			[۶،۱]	[۸،۳]	[۱۰،۴]				
		$(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۰)$		[۷،۲]	[۸،۳]	[۱۰،۴]					
	۱۵	$(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$			[۱۰،۲]	[۱۳،۴]					
		$(۰, ۰, ۱, ۰)$				[۹،۱]	[۱۳،۴]				
		$(۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$			[۹،۱]	[۱۲،۳]					
		$(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, ۰)$		[۱۰،۲]	[۱۴،۴]						

کدام جزء منجر به خرابی سیستم شده است ناشناخته باشد. بازه‌های اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های توزیع طول عمر مولفه‌ها و حدود تحمل برای توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس دو روش، روش تابع توزیع و روش ماتریس آمیخته W به‌دست آمده است. جدول‌هایی برای بازه‌های اطمینان یک طرفه و دو طرفه در سطح اطمینان ۹۰٪ و ۹۵٪ برای چندک توزیع طول عمر مولفه‌ها برای چندین سیستم منسجم ارائه شده است. توجه شود که توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم منسجم مشخص نیستند. در نهایت، مثال‌های عددی برای نشان دادن تمام روش‌های توسعه یافته در این مقاله ارائه شده است.

جدول ۵: مقادیراحتمال $P[F(Y_s) - F(Y_r) \geq \beta]$.

r	s	β: ۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹
۱	۶	۰٫۹۸۳۷	۰٫۹۷۱۰	۰٫۴۱۴۹	۰٫۱۲۵۰	۰٫۰۱۹۱	۰٫۰۰۱۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۲	۶	۰٫۹۴۲۷	۰٫۶۲۷۸	۰٫۲۵۶۰	۰٫۰۵۹۴	۰٫۰۰۶۹	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۱	۷	۰٫۹۹۷۵	۰٫۹۳۱۸	۰٫۶۷۸۵	۰٫۳۱۹۵	۰٫۰۸۲۹	۰٫۰۰۹۷	۰٫۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۲	۷	۰٫۹۸۹۵	۰٫۸۵۰۳	۰٫۵۱۸۴	۰٫۱۹۴۱	۰٫۰۳۸۶	۰٫۰۰۳۳	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۱	۸	۰٫۹۹۹۷	۰٫۹۸۳۵	۰٫۸۶۵۴	۰٫۵۶۹۴	۰٫۲۳۰۳	۰٫۰۴۵۹	۰٫۰۰۳۱	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۲	۸	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۵۵۷	۰٫۷۵۸۹	۰٫۴۱۶۷	۰٫۱۳۲۱	۰٫۰۱۹۲	۰٫۰۰۰۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۳	۸	۰٫۹۹۳۹	۰٫۸۹۷۹	۰٫۶۱۸۳	۰٫۲۷۵۹	۰٫۰۶۷۳	۰٫۰۰۷۰	۰٫۰۰۰۲	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰

تقدیر و تشکر

نویسنده از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله در ارتقای علمی و ارائه بهتر مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

رستمی، ع.، خنجری صادق، م. و خراشادی زاده، م. (۱۴۰۲)، برآورد قابلیت اعتماد تنش–مقاومت در سیستم های منسجم بر اساس توزیع نمایی، مجله علوم آماری، ۱، ۸۰-۶۱.

Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014), *The Art of Progressive Censoring, Applications to Reliability and Quality*. New York: Birkhauser.

Balakrishnan, N. Beutner, E. and Cramer, E. (2010), Exact Two-Sample Nonparametric Confidence, Prediction, and Tolerance Intervals Based on Ordinary and Progressively Type-II Right Censored Data. *TEST*, **19**, 68–91

Balakrishnan, N. Ng, H. K. T. and Navarro, J. (2011a), Linear Inference for Type-II Censored Lifetime Data of Reliability Systems with Known Signatures, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 426-440.

Balakrishnan, N. Ng, H. K. T. and Navarro, J. (2011b), Exact Nonparametric Inference for Component Lifetime Distribution Based on Lifetime Data from Systems with Known Signatures, *Journal of Nonparametric Statistics*, **23**, 741-752.

Bhattacharya, D. and Samaniego, F. J. (2010), Estimating Component Characteristics from System Failure Time Data, *Naval Research Logistics*, **57**, 380-389.

Cramer, E. Navarro, J. (2016), The Progressive Censoring Signature of Coherent Systems. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **32**, 697-710.

David, H. A. (1981), *Order Statistics*, 2nd edn. Wiley, New York.

Davis, C. E. and Steinberg, S. M. (2006), *Quantile Estimation, in Encyclopedia of Statistical Sciences (2nd ed.)*, eds. S. Kotz, N. Balakrishnan, C.B. Read and B. Vidakovic, Hoboken, NJ:Wiley.

Fallah, A. Asgharzadeh, A. and Ng, H. K. T. (2021), Statistical Inference for Component Lifetime Distribution from Coherent System Lifetimes under a Proportional Reversed Hazard Model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **50**(16), 3809-3833.

Fallah, A. Asgharzadeh, A. and Ng, H. K. T. (2021), Prediction Based onType-II Censored Coherent System Lifetime Data under a Proportional Reversed Hazard Rate Model, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **20**(02), 153-181.

Guilbaud, O. (2001), Exact Nonparametric Confidence Intervals for Quantiles with Progressive Type-II Censoring. *Journal of Statistics*, **28**, 699-713.

Guilbaud, O. (2004), Exact Nonparametric Confidence, Prediction and Tolerance Intervals with Progressive Type-II Censoring. *Journal of Statistics*, **31**, 265-281.

Hermanns, M. Cramer, E. (2017), Likelihood Inference for the Component Lifetime Distribution Based on Progressively Censored Parallel Systems Data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87**, 607-630.

Kamps, U. and Cramer, E. (2001), On Distributions of Generalized Order Statistics. *Statistics*, **35**, 269-280.

Kochar, S. Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. (1999), The Signature of a Coherent System and its Application to Comparisons Among Systems, *Naval Research Logistics*, **46**, 507-523.

Krishnamoorthy, K. Mathew, T. (2009), *Statistical Tolerance Regions: Theory, Applications, and Computation*. Wiley, Hoboken.

Kulkarni, M. G. and Rajarshi, M. B. (2020), Estimation of Parameters Component Lifetime Distribution in a Coheren System, *Statistical Papers* , **61**, 403-421.

Navarro, J. (2021), Coherent System Lifetime, *Introduction to System Reliability Theory*, 23-70.

Navarro, J. and Rubio, R. (2010), Computations of Coherent Systems with five Components, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **39**, 68-84.

Navarro, J. Ruiz, J. M. and Sandoval, C. J. (2007), Properties of Coherent Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **36**, 175-191.

Navarro, J. Samaniego, F. J. Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008), On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, *Naval Research Logistics*, **55**, 313-327.

Ng, H. K. T. Navarro, J. and Balakrishnan, N. (2012), Parametric Inference from System Lifetime Data under a Proportional Hazard Rate Model, *Metrika*, **75**, 367-388.

Patel, J. K. (1986), Tolerance Limits-A Review, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **15**, 2719-2762.

Samaniego, F. J. (1985), On Closure of the IFR Class under Formation of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability Theory*, **34**, 69-72.

Samaniego, F. J. (2007), System Signatures and their Applications in Engineering Reliability, International Series in Operations Research and Management Science 110, Springer, New York.

Shewhart, W.A. (1931), *Economic Control of Quality of Manufactured Product.* D.Van Nostrand Company, NewYork.

Tavangar, M. Asadi, M. (2020), Component Reliability Estimation Based on System Failure-Time Data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **17 (90)**, 3232-3249.

Yang, Y. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2016), A Stochastic Expectation-Maximization Algorithm for the Analysis of System Lifetime Data with Known Signature, *Computational Statistics*, **31**, 609-641.

Yang, Y. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2019), Expectation Maximization Algorithm for System Based Lifetime Data with Unknown System Structure, *AStA Advanced Statistical Analysis*, **103**, 69-98.

Zhang, J. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2015a), Statistical Inference of Component Lifetimes with Location-Scale Distributions from Censored System Failure Data with Known Signature, *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, 613-626.

Wilks, S. S. (1962), *Mathematical Statistics*, Wiley, New York.

Nonparametric Inference for Component Lifetime Distribution of Coherent Systems Based on Progressively Censored

Fallah, A.

Department of Statistics, University of Payame Noor, Tehran, Iran.

Abstract: In this paper, non-parametric inference is considered for k-component coherent systems when the system lifetime data is progressively type-II censored. In these coherent systems, the system structure and signature are assumed to be known. Based on the gradually observed type-II censored, non-parametric confidence intervals are calculated for the quantiles of component lifetime distribution. Also, tolerance limits for component lifetime distribution are obtained. Non-parametric confidence intervals for quantiles and tolerance limits are obtained using the distribution function method and the W mixed matrix method. Two numerical examples are used to illustrate the methodologies developed in this paper.

Keywords: Coherent system, Progressively censored, Quantiles, Nonparametric confidence interval, Tolerance limits.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05, 62G30.