Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2024
Vol. 18, No. 1, pp 39-56
DOI: 10.52547/jss.18.1.03

Tsallis Entropy of The Lifetime of Coherent Systems and Its Properties

Toomaj, A.
Department of Mathematics and Statistics, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran.

Corresponding author: A. Toomaj, ab.toomaj@gonbad.ac.ir

Received: 8/8/2023 **Revised:** 4/5/2024 **Accepted and Published Online:** 6/5/2024.

Introduction

Uncertainty is a crucial factor in decision-making, making it challenging to determine system parameters accurately. This paper investigates uncertainty in coherent system lifetimes using Tsallis entropy. Prior studies have focused on Shannon entropy and Renyi entropy of simple systems like k-out-of-n systems. Wang and Chen (1990), Ebrahimi et al. (2004), Abbas Nejad and Amaemi (2011), and Baratpour and Khammar (2016) have provided insights into calculating and analyzing entropy. The system signature concept has gained attention in studying uncertainty characteristics for coherent system lifetimes. Toomaj and Doostparast (2014) derived bounds for classical Shannon entropy, while Toomaj (2017) further investigated entropy characteristics. Recent research by Alomani and Kayid (2023) examined novel features of Tsallis entropy and residual Tsallis entropy for independent and distributed lifetimes. Kayid and Alshehri (2023) conducted entropy analysis using the characteristic effect concept. This paper builds upon previous research, expanding our understanding of uncertainty in coherent system lifetimes.

Material and Methods

This study highlights the importance of the probability integral transformation $V = F(T)$ in deriving the Tsallis entropy expression for coherent systems. This transformation allows for obtaining a valuable expression that facilitates result comparison. With this expression, we can effectively analyze and compare entropy characteristics of coherent systems. We also propose a novel criterion for selecting a preferred system among those with lifetimes similar to the parallel system. To validate our results and gain further insights, we provide illustrative examples demonstrating our approach's effectiveness and practical implications.

Results and Discussion

The paper aimed to understand Tsallis entropy in coherent systems. We derived an expression for the entropy of a coherent system's lifetime, assuming independent components. We provided a practical example to demonstrate its significance. We compared the lifetime entropy of two coherent systems with different component lifetimes but the same structure. We also presented bounds for Tsallis entropy of coherent system lifetimes, which is useful for large component numbers or complex structures. Lastly, we proposed a criterion for selecting a preferred system based on relative Tsallis entropy and similarity to the desired parallel system's lifetime.

Conclusion

In this paper, we derived an expression for Tsallis entropy in coherent systems with independent and identically distributed component lifetimes. This expression allows for comparing coherent systems with different component distributions, considering the random dispersion order and Tsallis entropy. We provided illustrative examples to demonstrate the practical implications of our results. To address computational challenges for systems with many components or complex structures, we introduced bounds that approximate Tsallis entropy. We also introduced a novel criterion based on relative Tsallis entropy for selecting preferred coherent systems, emphasizing structural reliability and similarity to parallel systems. Our results have broader applicability beyond Tsallis entropy, extending to other entropy measures such as Renyi entropy and extropy.

Keywords: Tsallis entropy, Stochastic orders, Coherent systems, System signature.

Mathematics Subject Classification (2010): 62E10, 62G10.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۳
جلد ۱۸، شماره ۱، ص ۳۹ -- ۵۶
DOI: 10.52547/jss.18.1.03
مقاله پژوهشی

آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم و ویژگی های آن

عبدالسعید توماج
گروه آمار و ریاضی، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس

نویسنده مسئول : عبدالسعید توماج، ab.toomaj@gonbad.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۱۷ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۲/۱۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۲/۱۷

چکیده: در این مقاله، ویژگی‌های آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم با استفاده از مفهوم اثر مشخصه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج براساس این فرض است که توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم مستقل و همتوزیع هستند. به طور خاص، یک فرمول برای محاسبه آنتروپی تسالیس سیستم‌های منسجم ارائه شده است که برای مقایسه سیستم‌هایی با اثر مشخصه یکسان مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین، کران‌هایی برای آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم ارائه می‌شود. این کران‌ها به خصوص زمانی که سیستم دارای تعداد زیادی مؤلفه یا ساختار پیچیده است، بسیار مفید هستند. در نهایت، یک معیار برای انتخاب سیستم ارجح از بین سیستم‌های منسجم بر اساس آنتروپی تسالیس نسبی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی تسالیس، اثرمشخصه، ترتیب‌های تصادفی، سیستم منسجم.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62G10، 62E10.

۱ مقدمه

عدم قطعیت مفهومی است که تصمیم‌گیرنده همواره در فرآیند تصمیم‌گیری با آن روبرو است. به علت وجود عدم قطعیت، جزئیاتی غیرقطعی در مسأله بیان می‌شود که به واسطه آن نمی‌توان پارامترهای سیستم را به درستی تعیین کرد. الگوهای ریاضی متعددی برای بررسی عدم قطعیت سیستم‌ها و فرآیندها ارائه شده است و در آنها تلاش شده تا عدم قطعیت حتی الامکان کاهش پیدا کند. یکی از مهمترین آنها آنتروپی تسالیس است. فرض کنید X یک متغیر

تصافی پیوسته نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. آنتروپی تسالیس از مرتبه α به صورت

$$\begin{aligned} H_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\Big[\int_0^\infty f^\alpha(x)dx - 1\Big], \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\{\mathrm{E}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(U))]-1\},\ \alpha>0, \alpha\neq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

تعریف شده است (تسالیس، ۱۹۸۸)، که در آن $F^{-1}(u)=\inf\{x; F(x)\geq u\}$ برای $u\in[0,1]$ تابع چندک است. از طرفی رابطه $H(X)=\lim_{\alpha\to 1} H_\alpha(X)$ برقرار است، که در آن

$$H(X) = -\int_0^\infty f(x)\log f(x)dx, \tag{2}$$

آنتروپی دیفرانسیل شانون است. به عبارت دیگر آنتروپی تسالیس حالت تعمیم یافته آنتروپی شانون است. در کل، آنتروپی تسالیس می‌تواند منفی باشد، اما با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامتر α، می‌توان آنتروپی تسالیس نامنفی را نیز بدست آورد. برخلاف آنتروپی دیفرانسیل شانون که ویژگی افزایشی دارد، آنتروپی تسالیس ویژگی غیرافزایشی دارد. به عبارت دیگر، برای دو متغیر تصادفی مستقل X و Y، آنتروپی تسالیس توام $H_\alpha(X,Y)$ برابر است با $H_\alpha(X)+H_\alpha(Y)+(1-\alpha)H_\alpha(X)H_\alpha(Y)$. این ویژگی انعطاف پذیری آنتروپی تسالیس را در مقایسه با آنتروپی شانون توجیه می‌کند و در بسیاری از زمینه‌های نظریه اطلاعات، فیزیک، شیمی و غیره کاربرد دارد. برای مطالعه آنتروپی مانده تسالیس و اندازه واگرایی آن مبتنی بر تابع چندک به احراری و همکاران (۱۳۹۵) مراجعه نمایید. از طرف دیگر آنتروپی تسالیس با آنتروپی رنی (۱۹۶۱) به صورت $H_\alpha(X)=\frac{1}{1-\alpha}\big[e^{(1-\alpha)R_\alpha(X)}-1\big]$ در ارتباط است، که در آن $R_\alpha(X)=\frac{1}{1-\alpha}\log\big(\int_0^\infty f^\alpha(x)dx\big)$ آنتروپی رنی است.

از طرفی صانعی طبس و محتشمی برزادران (۱۳۹۶) به بررسی توزیع‌هایی که آنتروپی رنی را ماکسیمم می‌کند، پرداخته است. هدف اصلی مقاله حاضر، بررسی برخی ویژگی‌های عدم قطعیت طول عمر سیستم‌های منسجم از منظر آنتروپی تسالیس است. قبلاً بسیاری از پژوهشگران به بررسی ویژگی‌های اطلاعاتی آماره‌های ترتیبی پرداخته‌اند. به عنوان مثال آنتروپی شانون برخی از سیستم‌های ساده مانند سیستم‌های k از n را می‌توان در وانگ و چن (۱۹۹۰)، ابراهیمی و همکاران (۲۰۰۴) ملاحظه کرد. همچنین آنتروپی رنی و تسالیس طول عمر سیستم‌های k از n را می‌توان با استفاده از نتایجی که در مقالات عباس نژاد و ارقامی (۲۰۱۱) و براتپور و خمر (۲۰۱۶) ارائه شده است را مورد بررسی قرار داد. در سال‌های اخیر، بررسی ویژگی‌های عدم قطعیت طول عمر سیستم های منسجم با استفاده از مفهوم اثر مشخصه (یا بردار علامت) بسیار مورد توجه قرار گرفته است. توماج و دوست پرست (۲۰۱۴) به بررسی آنتروپی شانون کلاسیک طول عمر سیستم‌های منسجم پرداخته و کران‌هایی نیز برای آن بدست آورده است. همچنین، توماج (۲۰۱۷) ویژگی‌های آنتروپی رنی طول عمر سیستم‌های منسجم را نیز مورد بررسی قرار داده است. اخیرا آلومانی و کید (۲۰۲۳) به بررسی برخی از ویژگی‌های جدید آنتروپی تسالیس و آنتروپی تسالیس باقیمانده پرداخته

است. سپس آنتروپی طول عمر سیستم‌های منسجم که دارای مؤلفه‌های با طول عمر مستقل و همتوزیع هستند، را مورد بررسی قرار داده است. از طرفی، در مقاله کید و الشهری (b۲۰۲۳) آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم با استفاده از مفهوم اثر مشخصه سیستم که شامل n جزء است و در زمان از پیش تعیین شده t تمام اجزای سیستم فعال هستند، مورد بررسی قرار گرفته است. به ویژه اینکه نویسندگان مقاله فرمول محاسباتی جالبی برای اندازه‌گیری پیش‌بینی‌پذیری طول عمر باقیمانده سیستم ارائه کرده‌اند که بسیار مفید می‌باشد. همچنین، آنها نتایج مختلفی مانند کران‌ها و ترتیب‌های تصادفی را بدست آورده‌اند. از سوی دیگر، نتایج مقاله کید و الشهری (b۲۰۲۳) برای آنتروپی تسالیس گذشته نیز تعمیم داده شده است (به مقاله کید و الشهری (a۲۰۲۳) رجوع شود). هدف اصلی این مقاله، تعمیم و گسترش نتایج قبلی که در تحقیقات گذشته منتشر شده‌اند، است. در این مقاله به ویژه به بررسی ویژگی‌های جدید طول عمر سیستم‌های منسجم از طریق آنتروپی تسالیس پرداخته می‌شود. علاوه بر این، یک معیار جدید بر اساس آنتروپی تسالیس نسبی ارائه شده است که برای انتخاب سیستم‌هایی با ساختاری مشابه با ساختار سیستم موازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مقاله در تلاش است تا با توجه به پژوهش‌های قبلی، به عنوان یک پیشرفت جدید در این حوزه، به بررسی و تحلیل جنبه‌های جدیدی از طول عمر سیستم‌های منسجم بپردازد. ارائه معیار جدید نیز باعث افزایش دقت و کارایی در انتخاب سیستم‌ها می‌شود.

بدین منظور، در بخش ۲، عبارتی برای آنتروپی تسالیس طول‌عمر سیستم منسجم وقتی مؤلفه‌های سیستم مستقل و همتوزیع هستند، بدست آورده می‌شود. سپس با ارائه مثالی اهمیت عبارت بدست آمده بیان می‌شود. در ادامه، به مقایسه آنتروپی تسالیس طول‌عمرهای دوسیستم منسجم وقتی مؤلفه‌های سیستم دارای طول عمرهای مختلف ولی دارای اثر مشخصه یکسان هستند، پرداخته خواهد شد. در بخش ۳، کران‌هایی برای آنتروپی تسالیس طول عمرسیستم‌های منسجم ارائه می‌گردد. در بخش ۴ نیز معیار جدیدی برای انتخاب یک سیستم ارجح بر اساس تسالیس نسبی پیشنهاد شده است که نزدیکترین طول عمر سیستم دلخواه به سیستم موازی را در نظر می‌گیرد. در بخش ۵ نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم

یک سیستم را منسجم گویند هرگاه هیچ مؤلفه نامربوط در آن وجود نداشته باشد و همچنین تابع ساختار سیستم یکنوا باشد (بارلو و پروشان، ۱۹۷۵). فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع $F(t)$، تابع قابلیت عتماد $\bar{F}(t) = ۱ - F(t)$ و تابع چگالی احتمال $f(t)$، بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم منسجم n مؤلفه‌ای باشند. همچنین $X_{i:n}$، $(i = ۱, \ldots, n)$ نیز بیانگر iامین آماره ترتیبی حاصل از نمونه تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ باشد. سامانیگو (۲۰۰۷) نشان داد که تابع قابلیت اعتماد سیستم منسجم با طول عمر T را می‌توان

به صورت

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \bar{F}_{i:n}(t),\ t > 0, \tag{۳}$$

بیان نمود، که در آن

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t)\overline{F}^{n-j}(t),\ i = 1, \ldots, n,$$

تابع قابلیت اعتماد iامین آماره ترتیبی است. به بردار n بعدی $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_n)$ اثرمشخصه سیستم (یا بردار علامت) [1] گویند که در آن عنصر iام عبارتست از $s_i = P(T = X_{i:n}),\ i = 1, \ldots, n,$ و احتمال این است که خرابی iامین مؤلفه منجر به خرابی کل سیستم شود. لازم به ذکر است که در اثرمشخصه سیستم رابطه $0 \leq s_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1,$ برقرار می باشد. تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم منسجم را با استفاده از عبارت (۳) می‌توان به صورت

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i f_{i:n}(t),\ t > 0, \tag{۴}$$

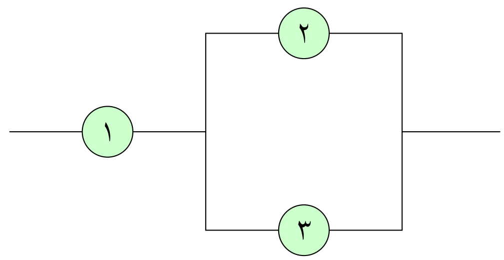
بیان نمود، که در آن

$$f_{i:n}(t) = B^{-1}(i, n-i+1)[F(t)]^{i-1}[\bar{F}(t)]^{n-i} f(t),\ t > 0,\ 1 \leq i \leq n,$$

به طوری که $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ تابع بتا و $\Gamma(\cdot)$ تابع گامای کامل است. به طور کلی عبارت‌های (۳) و (۴) بیان کننده این است که توابع بقا و چگالی احتمال طول عمر سیستم منسجم را می‌توان به صورت ترکیب وزنی یا آمیخته از توابع بقا و چگالی احتمال سیستم‌های i از n با ضرایب اثر مشخصه سیستم نوشت. لازم به یادآوری است که یک سیستم i از n متشکل از n مؤلفه سیستمی است که با خرابی مؤلفه iام از کار می‌افتد. از این پس، یک فرمول محاسباتی برای آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم منسجم ارائه می‌شود که در آن تبدیل انتگرال احتمال $V = F(T)$ نقش مهمی را بازی می‌کند. تبدیل‌های متناظر با طول عمر مؤلفه‌های سیستم، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $U_1 = F(X_1), \cdots, U_n = F(X_n)$ هستند که دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ هستند. از طرفی آماره‌های ترتیبی $U_{i:n} = F(X_{i:n})$ دارای توزیع بتا با پارامترهای i و $n - i + 1$ با تابع چگالی احتمال

$$g_i(u) = B^{-1}(i, n-i+1) u^{i-1}(1-u)^{n-i}, \quad 0 < u < 1, \tag{۵}$$

[1] System signature



شکل ۱. سیستم منسجم با اثر مشخصه $\mathbf{s} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

هستند که به ازای هر $i = 1, \dots, n$ برقرار است. تابع چگالی احتمال $V = F(T)$ را می‌توان به صورت

$$g_V(v) = \sum_{i=1}^{n} s_i g_i(v), \ 0 < v < 1, \tag{۶}$$

بیان نمود. با کابرد تبدیل انتگرال احتمال $V = F(T)$ آنتروپی تسالیس توزیع طول عمر سیستم منسجم در قضیه ۱ بدست می‌آید.

قضیه ۱. (آلومانی و کید، ۲۰۲۳) فرض کنید $X_1 \dots X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع $F(t)$ و تابع چگالی احتمال $f(t)$، بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم منسجم n مؤلفه‌ای با طول عمر T و اثر مشخصه $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_n)$ باشند. آنتروپی تسالیس سیستم با طول عمر T را می‌توان به صورت

$$H_\alpha(T) = \frac{1}{1-\alpha}\Big[\int_0^1 g_V^\alpha(u) f^{\alpha-1}(F^{-1}(u))du - 1\Big], \tag{۷}$$

بیان نمود که برای هر $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ برقرار است.

در حالت خاص اگر $T = X_{i:n}$ طول عمر یک سیستم i از n با اثرمشخصه $\mathbf{s} = (0, \cdots, 0, 1_i, 0, \cdots, 0)$ باشد، آنگاه

$$H_\alpha(X_{i:n}) = \frac{1}{1-\alpha}\Big[\int_0^1 g_i^\alpha(u)\big(f(F^{-1}(u))\big)^{\alpha-1} du - 1\Big]. \tag{۸}$$

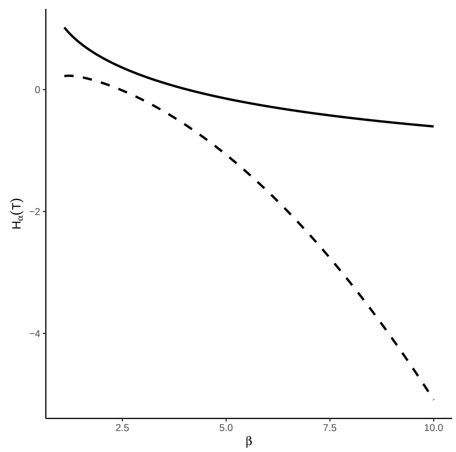
مثال ۱. سیستم منسجم با طول عمر T در نگاره‌ی ۱ را در نظر بگیرید. اثرمشخصه سیستم برابر با $\mathbf{s} = (1/3, 2/3, 0)$ است. فرض کنید توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم وایبل با تابع توزیع

$$F(t) = 1 - e^{-t^\beta}, \ t > 0, \ \beta > 0, \tag{۹}$$

باشد. از آنجایی که $F^{-1}(u) = [-\log(1-u)]^{1/\beta}$، با انجام محاسبات و استفاده از عبارت (۷)، مقدار آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم منسجم به صورت

$$H_\alpha(T) = \frac{1}{1-\alpha}\{\beta^{\alpha-1}\int_0^1 [-\log(1-u)]^{(1-\frac{1}{\beta})(\alpha-1)}(1-u)^{\alpha-1}g_V^\alpha(u)du - 1\},$$

به دست می‌آید. نمودار آنتروپی تسالیس نسبت به پارامتر β به ازای مقادیر $\alpha = 0/5$ (خط توپر) و $\alpha = 3$ (خط چین) در شکل ۲ نشان داده شده است. نمودار نشان می‌دهد که آنتروپی تسالیس نسبت به پارامتر شکل β تابعی نزولی است، به این معنی که با افزایش مقدار β، میزان عدم قطعیت کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، با افزایش مقدار پارامتر شکل β، پیش‌بینی‌پذیری درباره طول عمر سیستم بهتر می‌شود.



شکل ۲. نمودار $H_\alpha(T)$ نسبت به β با فرض توزیع وایبل برای $\alpha = 0/5$ (خط توپر) و $\alpha = 3$ (خط چین) و $\beta > 1$.

در ادامه، برخی نتایج در مورد خواص ترتیب توزیع‌ها با اثر مشخصه یکسان و توزیع طول عمر اجزای مختلف در آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم ارائه خواهد شد. قبل از ارائه نتایج اصلی، مفهوم ترتیب تصادفی پراکندگی بین متغیرهای تصادفی بیان می‌شود (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷). همچنین ترتیب تصادفی تسالیس نیز معرفی می‌شود. در این مقاله، اصطلاحات «صعودی» و «نزولی» به ترتیب به معنای «غیرنزولی» و «غیرصعودی» استفاده می‌شوند.

تعریف ۱. متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب با توابع توزیع F و G و توابع چگالی احتمال f و g را در نظر بگیرید. آنگاه

الف- X دارای خاصیت نرخ خطر نزولی است هرگاه تابع نرخ خطر $\lambda(t) = f(t)/\overline{F}(t)$ نسبت به t نزولی باشد.

ب- X را در ترتیب تصادفی آنتروپی تسالیس کوچکتر از Y گویند (که آن را با نماد $X \leq_{ts} Y$ نمایش می‌دهند) هرگاه $H_\alpha(X) \leq H_\alpha(Y)$، برای هر $\alpha > ۰,\ \alpha \neq ۱$.

ج- X را در ترتیب تصادفی پراکندگی کوچکتر از Y گویند (که آن را با نماد $X \leq_d Y$ نمایش می‌دهند) هرگاه برای هر $۰ < u \leq v < ۱$ داشته باشیم $F^{-۱}(v) - F^{-۱}(u) \leq G^{-۱}(v) - G^{-۱}(u)$، یا به طور معادل برای هر $u \in (۰, ۱)$، رابطه

$$g(G^{-۱}(u)) \leq f(F^{-۱}(u)), \tag{۱۰}$$

برقرار باشد.

به طور مشابه برای حالت گسسته، می‌توان به صورت زیر ترتیب تصادفی معمولی را تعریف کرد.

تعریف ۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته به ترتیب با بردارهای احتمال $\boldsymbol{p} = (p_۱, \cdots, p_n)$ و $\boldsymbol{q} = (q_۱, \cdots, q_n)$ باشند که مقادیری در مجموعه اعداد طبیعی می‌گیرند. آنگاه X در ترتیب تصادفی معمولی کوچکتر از Y است هرگاه $\sum_{j=i}^n p_j \leq \sum_{j=i}^n q_j$ به ازای هر $i = ۱, \cdots, n$ و به صورت $\boldsymbol{p} \leq_{st} \boldsymbol{q}$ نمایش می‌دهند.

لازم به یادآوری است که اگر $X \leq_{ts} Y$ باشد، به این معناست که توانایی کمی برای پیش‌بینی نتیجه آینده متغیر تصادفی Y نسبت به پیش‌بینی نتیجه X بر اساس آنتروپی تسالیس وجود دارد. عبارت (۷) برای مقایسه عدم قطعیت دو سیستم منسجم با ساختارهای یکسان مفید است. برای نشان‌دادن این مطلب، قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۲. بگي و کوچار (۱۹۸۶) فرض کنید که T^X و T^Y طول عمر دو سیستم منسجم با ساختارهای یکسان باشند. همچنین فرض کنید طول عمر مؤلفه‌های دو سیستم مستقل و همتوزیع به ترتیب با توابع توزیع F و G و توابع چگالی احتمال f و g باشند. اگر $X \leq_d Y$ باشد، آنگاه $T^X \leq_{ts} T^Y$.

برهان: با توجه به داشتن ساختار و در نتیجه اثر مشخصه یکسان هر دو سیستم و فرض $X \leq_d Y$، از عبارات (۷) و (۱۰) برای $۰ < \alpha < ۱$ عبارت

$$(۱-\alpha)H_\alpha(T^X) - (۱-\alpha)H_\alpha(T^Y) = \int_۰^۱ g_V^\alpha(v)\big(f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(v)) - g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(v))\big)dv \leq ۰,$$

و برای $\alpha > ۱$ عبارت

$$(۱-\alpha)H_\alpha(T^X) - (۱-\alpha)H_\alpha(T^Y) = \int_۰^۱ g_V^\alpha(v)\big(f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(v)) - g^{\alpha-۱}(G^{-۱}(v))\big)dv \geq ۰,$$

بدست می‌آید. بنابراین، نتیجه مورد نظر حاصل می‌گردد و برهان کامل می‌شود.

قضیه ۳. بگي و کوچار (۱۹۸۶) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع توزیع به ترتیب F و G باشند. اگر $X \leq_{hr} Y$ باشد و حداقل یکی از متغیرهای تصادفی X یا Y دارای نرخ خطر نزولی باشند، آنگاه $X \leq_d Y$.

مثال ۲. دو سیستم منسجم با طول عمرهای $T^X = \max\{\min\{X_۱, X_۲\}, \min\{X_۳, X_۴\}\}$ و $T^Y = \max\{\min\{Y_۱, Y_۲\}, \min\{Y_۳, Y_۴\}\}$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم اول مستقل و همتوزیع از توزیع وایبل با تابع قابلیت اعتماد

$$\bar{F}(t) = e^{-t^{۰/۵}},\ t > ۰,$$

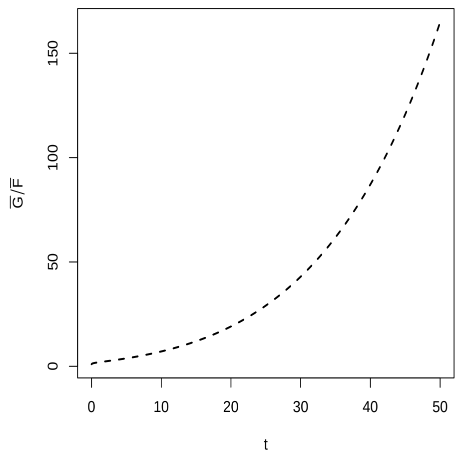
و توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم دوم مستقل و همتوزیع از توزیع پارتو با تابع قابلیت اعتماد

$$\bar{G}(t) = (۱ + t)^{-۰/۵},\ t > ۰,$$

باشد. از طرفی اثر مشخصه سیستم برابر با $\boldsymbol{s} = (۰, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, ۰)$ است. نمودار تابع نسبت $\bar{G}(t)/\bar{F}(t)$ در شکل ۳ بیانگر آن است که $\bar{G}(t)/\bar{F}(t)$ یک تابع غیرنزولی از t است، یعنی می‌توان نتیجه گرفت $X \leq_{hr} Y$. از طرفی که X و Y هر دو دارای نرخ خطر نزولی هستند. بنابراین قضیه ۳ رابطه $X \leq_d Y$ را نتیجه می‌دهد و طبق قضیه ۲ نتیجه $T^X \leq_{st} T^Y$ بدست می‌آید.

قضیه ۲ برای مقایسه آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم‌های منسجم وقتی دو سیستم دارای ساختارهای یکسان ولی مؤلفه‌های با توزیع طول عمرهاي متفاوت باشند، مفید است. اکنون فرض کنید دو سیستم دارای ساختارهای متفاوت ولی مؤلفه‌های با طول عمر یکسان باشند. در این صورت براي مقایسه آنتروپي تسالیس طول عمر دو سیستم، از یک تسهیل کننده که در واقع واسطه بین سیستم‌های منسجم و آمیخته هستند، استفاده می‌شود (سامانیگو، ۲۰۰۷). منظور از تسهیل کننده، سیستم آمیخته با اثرمشخصه یکنواخت $\mathbf{s} = \left(\frac{۱}{n}, \cdots, \frac{۱}{n}\right)$ است. اثر مشخصه یکنواخت بیان می‌کند که هر کدام از مؤلفه‌های سیستم از احتمال یکسانی برای اینکه باعث خرابی کل سیستم شوند، برخوردار هستند. همچنین به راحتي مي‌توان نشان داد که اگر $X_۱, \cdots X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع مشترک F و تابع چگالی احتمال f باشند، آنگاه رابطه $\sum_{i=۱}^{n} f_{i:n}(t) = nf(t),\ t > ۰$ برقرار است. این رابطه بیان می‌کند که توزیع طول عمر سیستم آمیخته با اثرمشخصه یکنواخت با توزیع طول عمر مؤلفه‌ها یکسان است.

قضیه ۴. فرض کنید T نشان دهنده طول عمر یک سیستم منسجم با اثرمشخصه $\mathbf{s} = (s_۱, \cdots, s_n)$ باشد. اگر عبارت $(n - i + ۱)/\sum_{j=i}^{n} s_j$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به $i = ۱, \ldots, n$ و توزیع مؤلفه‌های سیستم دارای نرخ خطر نزولی باشند، آنگاه $T \leq_{ts} (\geq_{ts}) X$.



شکل ۳. نمودار $\bar{G}(t)/\bar{F}(t)$ نسبت به t

.

برهان: طبق فرض قضیه، از آنجایي که عبارت $\frac{(n-i+1)}{\sum_{j=i}^{n} s_j}$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به i و توزیع مؤلفه‌های سیستم دارای نرخ خطر نزولی می‌باشند، آنگاه قضیه ۳.۲ توماج و دوست پرست (۲۰۱۵) ترتیب تصادفي $X \,(\geq_d)\, \leq_d T$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین با استفاده از قضیه ۱ آلوماني و کید (۲۰۲۳) نتیجه مورد نظر بدست مي‌آید.

قضیه ۵. دو سیستم منسجم n مؤلفه‌اي با طول عمرهای مستقل و همتوزیع از توزیع مشترک F و با اثرمشخصه‌های $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, \cdots, s_{1n})$ و $\mathbf{s}_2 = (s_{21}, \cdots, s_{2n})$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید طول عمر سیستم‌ها به ترتیب T_1 و T_2 باشند. آنگاه $T_2 \leq_{ts} T_1$ اگر شرایط زیر برقرار باشند: الف) عبارت $(n-i+1)/\sum_{j=i}^{n} s_{1j}$ تابعی صعودی نسبت به i باشد، ب) عبارت $(n-i+1)/\sum_{j=i}^{n} s_{2j}$ تابعی نزولی نسبت به i باشد، ج) متغیر تصادفی X دارای نرخ خطر نزولی باشد.

برهان: با توجه به فرض‌های قضیه، قضیه ۴.۲ توماج و دوست پرست (۲۰۱۵) ترتیب تصادفي $T_1 \leq_d (\geq_d) T_2$ را نتیجه می‌دهد. در نهایت با استفاده از قضیه ۱ آلوماني و کید (۲۰۲۳) نتیجه مورد نظر بدست مي‌آید.

مثال ۳. دو سیستم منسجم با اثرمشخصه‌های $\mathbf{s}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ و $\mathbf{s}_2 = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ و با طول عمرهای T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که طول عمر مؤلفه‌های دو سیستم مستقل و همتوزیع از توزیع پارتو با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(t) = (1+t)^{-a}$، $t > 0$، باشد. در جدول ۱ مشاهده می‌شود که عبارت $(n-i+1)/\sum_{j=i}^{n} s_{1j}$ تابعی نزولی نسبت به i و $(n-i+1)/\sum_{j=i}^{n} s_{2j}$ تابعی صعودی نسبت به i

است. از طرفی برای هر $a > ۰$ توزیع طول عمر مؤلفه‌هاي سیستم یعني X دارای نرخ خطر نزولی باشد. بنابراین شرایط قضیه ۴ برقرار است به عبارت دیگر می‌توان رابطه $T_۱ \leq_{ts} T_۲$ را نتیجه گرفت. در نتیجه می‌توان گفت که طول عمر سیستم اول دارای عدم قطعیت کمتري نسبت به طول عمر سیستم دوم از نظر آنتروپي تسالیس است.

جدول ۱. نسبت $(n-i+۱)$ بر $\sum_{j=i}^{n} s_{kj}$ به ازاي هر $k = ۱, ۲$.

i	$\frac{n-i+۱}{\sum_{j=i}^{n} s_{۱j}}$	$\frac{n-i+۱}{\sum_{j=i}^{n} s_{۲j}}$
۱	۴	۴
۲	۶	۳
۳	۸	۲
۴	∞	۱.۳

۳ کران آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم منسجم

در مواقعی که ساختار سیستم مهندسی دارای پیچیدگی بالا و تعداد زیادی مؤلفه باشد، محاسبه $H_\alpha(T)$ دشوار یا بسیار وقت گیر است. این وضعیت در عمل بسیار رایج است. در چنین شرایطی، استفاده از کران‌های آنتروپی تسالیس می‌تواند برای پی بردن به رفتار عدم قطعیت طول عمر سیستم منسجم از منظر آنتروپی تسالیس مفید باشد.

قضیه ۶. فرض کنید T طول عمر یک سیستم منسجم شامل n مؤلفه مستقل و همتوزیع با طول عمرهای $X_۱ \ldots X_n$ و دارای تابع توزیع مشترک F و تابع چگالی احتمال f باشد. همچنین فرض کنید اثرمشخصه سیستم $\mathbf{s} = (s_۱, \cdots, s_n)$ باشد. با فرض اینکه $H_\alpha(T) < \infty$، در این صورت برای هر $\alpha > ۱$ کران پایین $H_\alpha(T) \geq \big(\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})\big)^\alpha H_\alpha(X) + \frac{\left(\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})\right)^\alpha - ۱}{۱-\alpha}$, و برای هر $۰ < \alpha < ۱$, کران بالاي $H_\alpha(T) \leq \big(\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})\big)^\alpha H_\alpha(X) + \frac{\left(\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})\right)^\alpha - ۱}{۱-\alpha}$, بدست مي‌آید که در آن $\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s}) = \sum_{i=۱}^{n} s_i g_i(m_i)$, به طوری که $m_i = \frac{i-۱}{n-۱}$ نمای تابع چگالی بتا است.

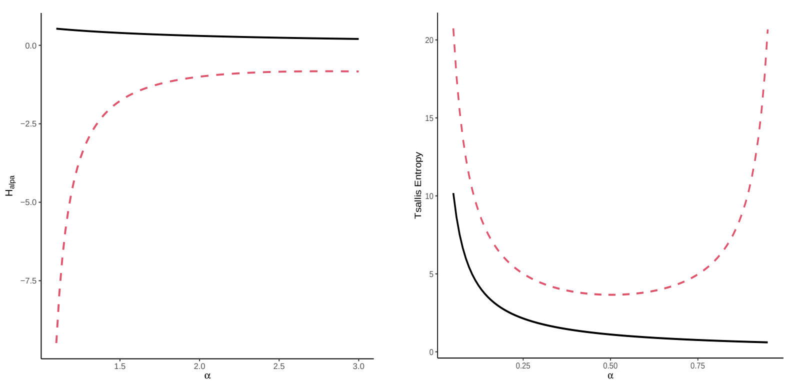
برهان: می‌توان نشان داد نمای توزیع بتا با پارامترهای i و $n-i+۱$ برابر $m_i = \frac{i-۱}{n-۱}$ است. بنابراین عبارت $g_V(v) \leq \sum_{i=۱}^{n} s_i g_i(m_i) = \mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})$، $۰ < v < ۱$ بدست مي‌آید.
در نتیجه برای هر $\alpha > ۱$ $(۰ < \alpha < ۱)$, و بنا بر رابطه (۱) می توان نوشت

$$\begin{aligned}
۱ + (۱-\alpha)H_\alpha(T) &= \int_۰^۱ g_V^\alpha(v) f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(v))dv \\
&\leq \big(\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})\big)^\alpha \int_۰^۱ f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(v))dv \\
&= \big(\mathcal{D}_\alpha(\mathbf{s})\big)^\alpha \big[(۱-\alpha)H_\alpha(X) + ۱\big].
\end{aligned}$$

مثال ۴. فرض کنید T طول عمر یک سیستم منسجم با اثرمشخصه $\mathbf{s}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$ متشکل از $n=3$ مؤلفه مستقل و همتوزیع از توزیع نمایی استاندارد باشند. می‌توان نشان داد که $B_2(\mathbf{s})=2$. از آنجایی که $H_\alpha(X)=\frac{1}{\alpha}$، با توجه به قضیه ۶، آنتروپی تسالیس T به ازای هر $0<\alpha<1$ ($\alpha>1$) به صورت

$$H_\alpha(T)\geq(\leq)\frac{2^\alpha-\alpha}{\alpha(1-\alpha)}, \tag{11}$$

کراندار است. با فرض توزیع نمایی برای طول عمر مؤلفه‌ها، می‌توان با استفاده از رابطه (۷)، مقدار دقیق $H_\alpha(T)$ نسبت به پارامتر α را به دست آورد. همچنین، با استفاده از کران‌های (۱۱) (خط چین)، می‌توان کران‌های مربوط به $H_\alpha(T)$ را به دست آورد (شکل ۴).



(ب) (الف)

شکل ۴. مقدار $H_\alpha(T)$ با اثر مشخصه $\mathbf{s}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$ به همراه الف- کران بالا و ب- کران پایین.

۴ انتخاب سیستم ارجح

در انتخاب ساختار از بین ساختارهای سری و موازی با ویژگی‌های مؤلفه‌ای یکسان، سیستم موازی از نظر ساختاری ارجحیت دارد. باید توجه داشت که برای مقایسه ساختاری دو سیستم، ویژگی‌های طول عمر آن‌ها باید در شرایط یکسان باشند در غیر اینصورت نمی‌توان تفاوت ساختاری آنها را با هم مقایسه کرد. به عنوان مثال هرچند ساختار سیستم موازی نسبت به ساختار سیستم سری ارجحیت دارد ولی اگر توزیع مؤلفه‌های دو سیستم یکسان نباشند در این صورت سیستم سری با مؤلفه‌های با قابلیت اعتماد بالا ممکن است نسبت به سیستم موازی با مؤلفه‌های قابلیت

اعتماد کم قابلیت اعتماد بیشتری داشته باشد و ارجح‌تر باشد. بنابراین، زمانی که ویژگی‌های دو سیستم یکسان باشند، هر تفاوت احتمالی بین سیستم‌ها به ساختار و طرح آنها مرتبط است. برای اهداف مختلف، ترتیب‌های تصادفی برای انتخاب سیستم بهینه کاربرد داشتند. برای مثال، برای انتخاب یک سیستم با قابلیت اعتماد بالا از بین دو سیستم، از ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و درستنمایی ماکسیمم و ترتیب‌های دیگر استفاده می‌شد. ولی ترتیبهای تصادفی محدودیت‌هایی در مرتب کردن توزیع طول عمر سیستم‌ها از نظر احتمالی دارند که باعث می‌شود روش‌های دیگر برای مرتب کردن طول عمر سیستم‌ها جستجو شوند (کوچار و همکاران، ۱۹۹۹). قابلیت اعتماد هر سیستم دلخواه، بین قابلیت اعتماد سیستم‌های سری و موازی است یعنی $\bar{F}_{1:n}(t) \leq \bar{F}_T(t) \leq \bar{F}_{n:n}(t),\ t > 0$. بنابراین، به جای مقایسه دوتایی سیستم‌ها، می‌توان سیستمی را یافت که ساختار یا توزیع آن مشابه‌تر به سیستم موازی باشد. به بیان دیگر، کدام یک از این سیستم‌های منسجم مشابهت بیشتری با ساختار سیستم موازی و مشابهت کمتری با ساختار سیستم سری دارند؟ برای پاسخ به این سوال از معیار آنتروپی تسالیس نسبی استفاده می‌شود. آنتروپی تسالیس نسبی $f(x)$ نسبت به $g(x)$ به صورت (اسبرت و شیرمای–کالوس، ۲۰۲۲)

$$\mathcal{D}_\alpha(X:Y) = \frac{1}{\alpha - 1}\Big[\int_0^\infty \frac{f^\alpha(x)}{g^{\alpha-1}(x)}\mathrm{dx} - 1\Big],$$

تعریف می‌شود به شرطی که انتگرال متناهی باشد. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $f(x) = g(x)$ تقریباً در همه جا برقرار باشد. از طرفی تعاریف

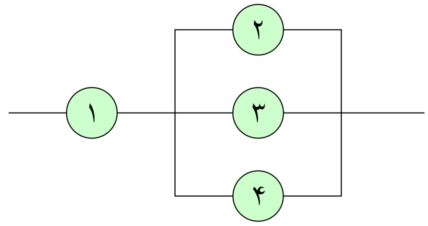
$$\mathcal{D}_\alpha(T:X_{1:n}) = \frac{1}{\alpha - 1}\Big[\int_0^\infty \frac{f_T^\alpha(x)}{f_{1:n}^{\alpha-1}(x)}\mathrm{dx} - 1\Big], \qquad (۱۲)$$

$$\mathcal{D}_\alpha(T:X_{n:n}) = \frac{1}{\alpha - 1}\Big[\int_0^\infty \frac{f_T^\alpha(x)}{f_{n:n}^{\alpha-1}(x)}\mathrm{dx} - 1\Big], \qquad (۱۳)$$

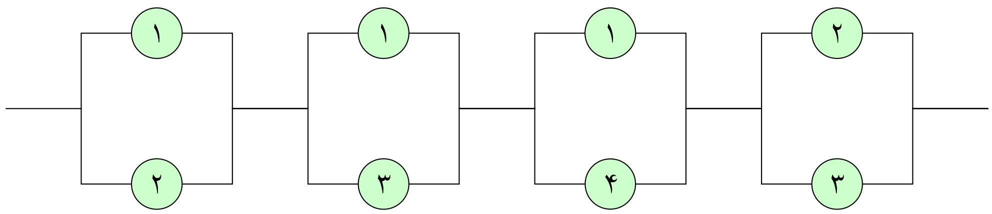
را در نظر بگیرید. اگر $\mathcal{D}_\alpha(T:X_{n:n})$ $(\mathcal{D}_\alpha(T:X_{1:n}))$، مقدار بزرگ (کوچک) داشته باشد، به این معنی است که توزیع طول عمر سیستم منسجم T از توزیع طول عمر سیستم موازی دور است. حالا معیار سیستم ترجیحی به صورت

$$\mathcal{RTS}_\alpha(T) = \frac{\mathcal{D}_\alpha(T:X_{1:n}) - \mathcal{D}_\alpha(T:X_{n:n})}{\mathcal{D}_\alpha(T:X_{1:n}) + \mathcal{D}_\alpha(T:X_{n:n})}, \qquad (۱۴)$$

تعریف می‌شود که برای هر $\alpha > 0, \alpha \neq 0$ برقرار است. واضح است که $-1 \leq \mathcal{RTS}_\alpha(T) \leq 1$. بنابراین، توزیع T به توزیع سیستم موازی شبیه‌تر است اگر $\mathcal{RTS}_\alpha(T)$ به ۱ نزدیک باشد و به توزیع سیستم سری شبیه‌تر است اگر $\mathcal{SJ}_\alpha(T)$ به -1 نزدیک باشد. لذا، هنگامی که $T = X_{n:n}$ رابطه $\mathcal{RTS}_\alpha(T) = 1$ و هنگامی که $T = X_{1:n}$ رابطه $\mathcal{RTS}_\alpha(T) = -1$ برقرار است.



شکل ۵. سیستم منسجم با اثر مشخصه $\mathbf{s}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$



شکل ۶. سیستم منسجم با اثر مشخصه $\mathbf{s}_2 = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

تعریف ۳. فرض کنید T_1 و T_2 طول عمر دو سیستم منسجم n مؤلفه‌ای با مؤلفه‌های مستقل و همتوزیع و اثرمشخصه‌های به ترتیب $\mathbf{s}_1$ و $\mathbf{s}_2$ باشند. آنگاه T_2 از نظر آنتروپی تسالیس نسبی RTS ارجح تر از T_1 است و با $T_2 \leq_{RTS} T_1$ نشان داده می‌شود اگر و فقط اگر $\mathcal{RTS}_\alpha(T_1) \leq \mathcal{RTS}_\alpha(T_2)$.

با استفاده از تغییر متغیر $u = F(x)$ معادله‌های (۱۲) و (۱۳) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(T : X_{1:n}) &= \frac{1}{\alpha - 1}[\int_0^1 \frac{g_V^\alpha(v)}{g_{1:n}^{\alpha-1}(v)}\mathrm{dv} - 1],\\
\mathcal{D}_\alpha(T : X_{n:n}) &= \frac{1}{\alpha - 1}[\int_0^1 \frac{g_V^\alpha(v)}{g_{n:n}^{\alpha-1}(v)}\mathrm{dv} - 1],
\end{aligned}$$

بازنویسی کرد. ملاحظه می‌شود که عبارت‌هاي فوق به توزیع F بستگي ندارد و فقط به تابع ساختار سیستم از طریق اثرمشخصه سیستم بستگي دارد. بنابراین معیار خوبي براي انتخاب سیستم ارجح بر مبناي اثرمشخصه سیستم است.

مثال ۵. فرض کنید T_1 و T_2 طول عمر دو سیستم منسجم به ترتیب با اثر مشخصه‌های $\mathbf{s}_1 = (1/4, 1/4, 1/2, 0)$ و $\mathbf{s}_2 = (0, 2/3, 1/3, 0)$ باشند. ساختارهای دوسیستم در نگاره‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است.

می‌توان نشان داد که این دو اثرمشخصه با هیچکدام از ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و ماکسیمم درستنمایی قابل مقایسه نیستند یعنی روابط $\mathbf{s}_1 \nleq_{st} \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \nleq_{hr} \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \nleq_{lr} \mathbf{s}_2$ برقرار است (کوچار و همکاران، ۱۹۹۹). بنابراین معیار پیشنهادی در این بخش می‌تواند بسیار مفید باشد. با استفاده از

(۱۴)، مقدار $\mathcal{RTS}_\alpha(T)$ برای مقدار $\alpha = ۰/۲$ و دو سیستم با طول عمر $T_۱$ و $T_۲$ به ترتیب $\mathcal{RTS}_{۰/۲}(T_۱) =$ $-۰/۳۳۴۷$ و $\mathcal{RTS}_{۰/۲}(T_۲) = -۰/۱۶۲۴$ است. این نشان می‌دهد که $T_۱ \leq_{RTS} T_۲$ یا به عبارتی سیستم با طول عمر $T_۲$ دارای شباهت بیشتری به سیستم موازی است و در نتیجه سیستم ارجح‌تری از نظر ساختاری نسبت به سیستم با طول عمر $T_۱$ محسوب می‌شود.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

یک فرمول محاسباتي برای آنتروپی تسالیس طول عمر سیستم منسجم در صورتی که مؤلفه‌های سیستم دارای توزیع طول عمر یکسان و مستقل از هم باشند، به دست آمد. از این عبارت برای مقایسه دو سیستم با اثر مشخصه یکسان ولي مؤلفه‌هایي با توزیع‌هاي متفاوت وقتي که این توزیع‌ها تحت ترتیب تصادفي پراکندگي و آنتروپي تسالیس هستند، استفاده گردید. براي اهمیت قضیه‌هاي بدست آمده مثالهایي بیان شد. زماني که تعداد مؤلفه‌هاي سیستم زیاد باشد یا سیستم داراي ساختار پیچیده‌اي باشد محاسبه عبارت بدست آمده به راحتي امکان‌پذیر نخواهد بود، لذا کران‌هایي ارائه گردید. در بخش پایانی، یک معیار جدید برای انتخاب سیستم ارجح با استفاده از مفهوم تسالیس نسبی معرفی شد. این معیار به عنوان روشی برای انتخاب سیستمی که ساختار آن به ساختار سیستم موازی نزدیکتر و از سیستم سری دورتر باشد، مورد استفاده قرار گردید و توانست سیستمی با قابلیت اعتماد بالا از لحاظ ساختاری انتخاب کند. علاوه بر این، نتایج این مقاله می‌تواند به بسیاری از معیارهای دیگر آنتروپی از جمله آنتروپی رنی، اکستروپی، آنتروپی تسالیس تجمعی باقیمانده و غیره تعمیم داده شوند. در آینده، بررسی آنتروپی تسالیس سیستم‌های منسجم تحت این شرط که تمام مؤلفه‌های سیستم در زمان مشخص از قبل تعیین شده t فعال هستند، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین، تعمیم رابطه فوق برای آنتروپی تسالیس سیستم‌های منسجم تحت این شرط که تمام مؤلفه‌های سیستم در زمان از قبل تعیین شده t غیرفعال هستند، نیز مورد کاوش و بررسی قرار خواهد گرفت.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از داوران گرانقدر، سردبیر، اعضای هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود سطح کیفی و افزایش غنای مقاله شده اند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

احراری، و.، براتپور، س. و حبیبی راد، آ. (۱۳۹۵)، آنتروپی مانده تسالیس و اندازه واگرایی آن مبتنی بر تابع چندک، مجله علوم آماری، ۱۲، ۳۲۱-۲۹۵.

صانعی طبس، م. و محتشمی برزادران، غ. (۱۳۹۶)، توسیع ایده آنتروپی ماکسیمم برای اندازه‌های اطلاع تعمیم‌یافته، مجله علوم آماری، ۱۱، ۱۰۱–۱۱۸.

Abbasnejad, M. and Arghami, N. R. (2011) Renyi Entropy Properties of Order Statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods* **40**, 40-52.

Alomani, G. and Kayid, M. (2023), Further Properties of Tsallis Entropy and Its Application. *Entropy*, **25**(2), 199.

Bagai, I. and Kochar, S. C. (1986), On Tail-ordering and Comparison of Failure Rates. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **15**(4), 1377-1388.

Baratpour, S. and Khammar, A. (2016), Tsallis Entropy Properties of Order Statistics and Some Stochastic Comparison, *Journal of Statistical Physics*, **52**, 479–487.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life testing*, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Ebrahimi, N., Soofi, E. S. and Zahedi, H. (2004) Information Properties of Order Statistics and Spacings, *Communications in Statistics-Theory and Methods* **40**, pp. 40-52.

Kayid, M. and Alshehri, M. A. (2023), Tsallis Entropy of a Used Reliability System at the System Level, *Entropy*, **25**(4), 550.

Kayid, M. and Alshehri, M. A. (2023), Tsallis Entropy for the Past Lifetime Distribution with Application, *Axioms*, **12**(8), 731.

Kochar, S. C., Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. (1999) The Signature of a Coherent System and its Application to Comparisons Among Systems, *Naval Research Logistics* **4**, 507-523.

Renyi, A. (1961) On Measures of Entropy and Information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,*. University of California Press, Berkeley. 547–561.

Samaniego, F. J. (2007), *System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability*, New York: Springer, International Series in Operations Research and Management Science, 110.

Sbert, M. and Szirmay-Kalos, L. (2022), Robust Multiple Importance Sampling with Tsallis -Divergences, *Entropy*, **24**(9), 1240.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders.*, Springer Science and Business Media, 2007.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, **27**(3), 379–423.

Toomaj, A. and Doostparast, M. (2014), A note on Signature-based Expressions for the Entropy of Mixed r-out-of-n Systems, *Naval Research Logistics*, **61**(3), 202–206.

Toomaj, A., and Doostparast, M. (2015), Comparisons of Mixed Systems with Decreasing Failure Rate Component Lifetimes using Dispersive Order, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **31**(6), 801-808.

Toomaj, A. (2017), Renyi Entropy Properties of Mixed Systems, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**(2), 906–916.

Tsallis, C. (1988), Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics., *Journal of statistical Physics*, **52**, 479–487.

Wong, K. M. and Chen, S. H. (1990), The Entropy of Ordered Sequences and Order Statistics, *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, 276–284.