Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2024
Vol. 18, No. 2, pp 377-393
DOI: 10.52547/jss.18.2.08

Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems Comprising Modified Additive Hazard Rate Model

Lazam Razzaq, A.[1], Almasi, I.[1], Saadat Kia, G.[2]
[1] Department of Statistics, Razi University, Kermanshah, Iran.
[2] Department of Basic Science, Kermanshah University of Technology, Iran.

Corresponding author: I. Almasi, i.almasi@razi.ac.ir

Received: 24/1/2024 **Revised:** 20/10/2024 **Accepted and Published Online:** 21/10/2024.

Introduction

The order statistics $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ are obtained by arranging the variables $X_1, \ldots, X_n$ in increasing order of magnitude. They have found key applications in reliability studies, auction theory, and actuarial science. For example, in reliability applications, $X_{n-k+1:n}$ (for $k = 1, \ldots, n$) corresponds to the lifetime of a k-out-of-n system, a system that would work when at least k of the n components work. In particular, when $k = n$ and $k = 1$, we have the smallest and largest order statistics corresponding to the lifetimes of series and parallel systems, respectively. For an elaborate treatment of theory, methods, and applications of order statistics (Balakrishnan and Rao,1998a,b). Note that the lifetime distribution of produced components in a factory may differ in many practical cases. For example, populations of manufactured items in practice often have two aggregated groups: the "defective" items with shorter lifetimes and "standard" items with longer, normal lifetimes. Also, when components manufactured at different facilities are mixed or manufactured at the same facility but changing operational or environmental characteristics, etc., leading to heterogeneous populations. In such cases, the lifetime distribution of components differs from each other and follows a particular family of distributions indexed by a specific parameter. That is, the lifetime distribution of the components follows a semiparametric model. This seems reasonable in practice because the same raw materials are used to produce the products of a factory. Still, due to different work shifts, different manpower, different production lines, etc., the made products may not have the same distribution but follow a semi-parametric model.

Material and Methods
An important semi-parametric model with many applications in reliability theory is the additive hazard rate model, which has key applications in reliability theory. A random variable X is said to follow an $AH(\theta, \beta; \bar{F})$ model if its survival function is expressed as

$$\bar{F}(x; \theta, \beta) = e^{-\theta x} \bar{F}(x; \beta), \qquad x > 0, \theta > 0.$$

It is then easy in this case to see that $r(x; \theta, \beta) = \theta + r(x; \beta)$, where $r(\cdot; \beta)$ is the baseline hazard rate function. Finkelstein (2008) studied the reliability properties of the AH model and provided some applications of this model.

Results and Discussion
This paper has established stochastic comparisons of parallel and series systems consisting of independent modified additive hazard rate (MAH) components. Establishing hazard rate, reversed hazard rate, and likelihood ratio orders under some conditions on the baseline distribution and the Archimedean copula as joint distribution will be of great interest.

Conclusion
This paper introduces a new MAH model that replaces the additive hazard rate distribution in the general proportional add ratio model. Next, when two sets of random variables follow the MAH model, we establish stochastic comparisons between the series and parallel systems comprising these components.

Keywords: Modified Additive Hazard Rate Model, Weak Majorization Order, Series Systems, Parallel Systems.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۳
جلد ۱۸، شماره ۲، ص ۳۷۷ -- ۳۹۳
DOI: 10.52547/jss.18.2.08
مقاله پژوهشی

مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های مدل نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده

عقیل لزام رازق[1]، اسحاق الماسی[1] و قباد سعادت‌کیا [2]
[1]گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه
[2]گروه آمار، دانشگاه صنعتی کرمانشاه

نویسنده مسئول : اسحاق الماسی، i.almasi@razi.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۷/۲۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۷/۳۰

چکیده: اضافه شدن یک پارامتر به یک توزیع معلوم، یک روش مفید برای ساختن یک خانواده انعطاف‌پذیر از توزیع‌ها است. در این مقاله، ابتدا با جایگذاری توزیع نرخ خطر جمع‌پذیر در مدل کلی نسبت بخت‌های متناسب، توزیع نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده معرفی می‌شود. سپس براساس دو مجموعه از متغیرهای تصادفی که از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده پیروی می‌کنند به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از این مولفه‌ها پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده، ترتیب بیشاندن ضعیف، سیستم‌های سری، سیستم‌های موازی، ترتیب‌های تصادفی، شور-محدب بودن.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 90B25، 60E15.

۱ مقدمه

در بسیاری از موارد عملی به ویژه در جوامع صنعتی، توزیع طول عمر قطعات تولید شده در یک کارخانه، می‌توانند به صورت متفاوت در نظر گرفته شوند. به عنوان مثال، هنگامی که قطعات تولید شده از کارخانه‌های مختلف، در یک انبار مشترک جمع‌آوری شوند یا اینکه قطعات از یک کارخانه یکسان، تولید شوند اما ویژگی‌های عملیاتی یا محیطی تغییر کنند. در چنین مواردی، توزیع طول عمر اجزا با یکدیگر، متفاوت است و از خانواده خاصی از توزیع‌ها

پیروی می‌کنند که توسط یک پارامتر مشخص، نمایه می‌شوند. بنابراین توزیع طول عمر قطعات تولید شده را می‌توان به صورت یک مدل نیمه پارامتری در نظر گرفت که در عمل منطقی به نظر می‌رسد، زیرا از مواد اولیه یکسانی برای تولید محصولات استفاده شده است اما به دلیل شیفت‌های کاری متفاوت، نیروی انسانی متفاوت و خطوط تولید متفاوت، محصولات ساخته شده ممکن است توزیع یکسانی نداشته باشند و از یک مدل نیمه پارامتری تبعیت کنند (چا و فینکلشتاین ، ۲۰۱۳؛ حضرا و فینکلشتاین ، ۲۰۱۸).

یک مدل نیمه پارامتری مهم با کاربردهای فراوان در نظریه قابلیت اعتماد، مدل نرخ خطر جمع‌پذیر[1] (AH) است. تابع نرخ خطر این مدل به صورت $r(t) = r_{\circ}(t;\alpha) + \theta$ است. با توجه به اینکه از مواد اولیه یکسانی برای تولید محصولات ساخته شده در یک کارخانه استفاده می‌شود، اجزاء دارای نرخ خطر پایه مشترک $r_{\circ}(t;\alpha)$ هستند، اما به دلیل شیفت‌های کاری متفاوت، نیروی انسانی متفاوت و خطوط تولید متفاوت و غیره، دارای پارامترهای نرخ خطر جمع‌پذیر متفاوت θ هستند. با توجه به ارتباط بین تابع بقا و تابع نرخ خطر، می‌توان نشان داد تابع بقای این مدل به صورت

$$\bar{F}(t) = e^{-\theta t}\bar{F}_{\circ}(t;\alpha), \qquad t > \circ,\ \theta > \circ, \alpha > \circ,$$

است که در آن $\bar{F}_{\circ}(t;\alpha)$ بیانگر تابع بقا مدل پایه است. فینکلیشتاین (۲۰۰۸) به بررسی ویژگی‌های قابلیتی مدل AH پرداخت و کاربردهایی از این مدل را ارائه نمود (فینکلشتاین و ایسالوا ، ۲۰۰۱، ۲۰۰۶).

اکنون به انگیزه اصلی کار و در نظر گرفتن توزیع نسبت بخت‌های متناسب در مقایسه با توزیع پایه $\bar{G}(x)$، به عنوان توزیع مولفه‌های سیستم‌های سری و موازی پرداخته می‌شود. متغیر تصادفی X از مدل نسبت بخت‌های متناسب[2] پیروی می‌کند هرگاه

$$\frac{F(x|\gamma)}{\bar{F}(x|\gamma)} = \frac{\text{۱}}{\gamma}\frac{G(x)}{\bar{G}(x)}, \qquad x > \circ, \gamma > \circ.$$

یا به عبارت دیگر،

$$\bar{F}(x|\gamma) = \frac{\gamma\bar{G}(x)}{\text{۱} - \bar{\gamma}\bar{G}(x)}, \qquad x > \circ, \gamma > \circ, \bar{\gamma} = \text{۱} - \gamma, \tag{۱}$$

که در آن $\bar{G}(x)$ تابع بقا پایه است. در حقیقت، اضافه کردن یک پارامتر شکل به توزیع پایه، باعث انعطاف‌پذیرتر

[1] Additive Hazard Model
[2] Proportional Odds Ratio Model

شدن آن می‌شود. تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر مدل نسبت بخت‌های متناسب به ترتیب به صورت

$$f(x|\gamma) = \frac{\gamma g(x)}{(۱-\bar{\gamma}\bar{G}(x))^{۲}}, \quad r(x|\gamma) = \frac{۱}{۱-\bar{\gamma}\bar{G}(x)} r(x), \quad x > ۰,$$

هستند. یک ویژگی جالب از این خانواده از توزیع‌ها این است که انعطاف‌پذیری تابع نرخ خطر این خانواده تعمیم‌یافته، بستگی به پارامتر شکل اضافه شده دارد که باعث کاربردی‌تر شدن توزیع پایه می‌شود. به پارامتر γ پارامتر تیلت[۱] (پارامتر یکسویگی) گفته می‌شود که دلیل نامگذاری این پارامتر، در ادامه ارائه شده است. می‌توان نشان داد:

$$\frac{r(x)}{\gamma} \leq r(x|\gamma) \leq r(x), \quad x > ۰, \gamma \geq ۱,$$
$$r(x) \leq r(x|\gamma) \leq \frac{r(x)}{\gamma}, \quad x > ۰, ۰ < \gamma \leq ۱.$$

نامساوی‌های اخیر نشان می‌دهند که تابع نرخ خطر مدل نسبت بخت‌های متناسب، به ازای $\gamma \geq ۱$ پایین‌تر از تابع نرخ خطر مدل پایه و به ازای $۰ < \gamma \leq ۱$ بالاتر از تابع نرخ خطر مدل پایه قرار می‌گیرد (مارشال و اولکین ، ۲۰۰۷). باید توجه داشت که تابع توزیع (۱) می‌تواند به عنوان توزیع مینیمم یک مجموعه از متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شود که در آن حجم نمونه، یک متغیر تصادفی بوده و از توزیع هندسی پیروی می‌کند. در حالت خاص، اگر $\bar{G}(x) = e^{-\lambda x}\bar{F}(x)$ آنگاه

$$\bar{F}(x|\gamma) = \frac{\gamma e^{-\lambda x}\bar{F}(x)}{۱-\bar{\gamma}e^{-\lambda x}\bar{F}(x)}, \quad x > ۰, \lambda > ۰, \gamma > ۰, \bar{\gamma} = ۱-\gamma.$$

که به خانواده توزیع‌های نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده[۲] با پارامترهای γ و λ معروف است و با نماد $X \sim MAH(\gamma, \lambda; \bar{F}(x))$ نشان داده می‌شود.

آماره‌های مرتب $X_{۱:n}, \ldots, X_{n:n}$ که از مرتب کردن متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ حاصل می‌شود، کاربردهای زیادی در قابلیت اعتماد، نظریه مزایده، نظریه صف، بیمسنجی، مدیریت ریسک و غیره دارند. به عنوان مثال، در کاربردهای قابلیتی، آماره $X_{n-k+۱:n}$ متناظر با طول عمر یک سیستم k از n است. این سیستم تا زمانی کار می‌کند که حداقل k مولفه از سیستم، سالم باشد. به ویژه، $k = n$ و $k = ۱$ به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های سری و موازی است (بارلو و پروشان ، ۱۹۷۵). مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن، به وفور مورد توجه بسیاری از نویسندگان و آماردانان قرار گرفته است. بسیاری از نتایج به دست آمده از مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های نمایی، تعمیم داده شده است. مثلاً خالدی و کوچار (۲۰۰۶)، کوچار و زو (۲۰۰۷a)، کوچار و زو (۲۰۰۷b) و فانگ و ژانگ

[1] Tilt Parameter
[2] Modified Additive Hazard Rate Distributions

(۲۰۱۳) نتایج را برای توزیع وایبول، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) و بالاکریشنان و ژائو (۲۰۱۳) برای توزیع گاما، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) برای توزیع نمایی تعمیم‌یافته برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۷) برای توزیع وایبول–هندسی نمایی‌شده، برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) برای مدل کلی مقیاس و برمال‌زن و حیدری (۱۳۹۸) برای توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته تعمیم دادند. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۸) به مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های مستقل و ناهمگن نرخ خطر متناسب و نرخ خطر وارون متناسب تعمیم‌یافته پرداختند. اخیراً حیدری و همکاران (۲۰۲۳a) نتایجی در رابطه با مقایسه تصادفی بزرگترین آماره‌های مرتب متناظر با یک نمونه تصادفی از توزیع مقیاس، از لحاظ ترتیب میانگین مانده عمر بدست آوردند. در ادامه، حیدری و همکاران (۲۰۲۳b) به بررسی ترتیب میانگین مانده عمر سیستم‌های موازی متشکل از مولفه‌های مقیاس–تاب‌آوری با پارامترهای مقیاس محدود شده پرداختند.

این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده می‌پردازد. یکی از تفسیرهای قابلیتی از نتایج این مقاله می‌تواند به صورت زیر بیان شود. فرض کنید یک تولید کننده، قطعات مورد نیاز خود را جهت ساختن یک دستگاه که به صورت سری (یا موازی) به یکدیگر متصل شده‌اند از کارخانه شماره ۱ خریداری می کند. همچنین فرض کنید طول عمر قطعات تولید شده توسط کارخانه ۱ از توزیع MAH با پارامترهای $(\alpha; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; \bar{F}(x))$ تبیعت نماید. با توجه به برخی موارد مانند گران بودن قطعات این کارخانه یا در دسترس نبودن قطعات در یک دوره زمانی مشخص، تولید کننده تصمیم می‌گیرد قطعات مورد نیاز خود را از یک کارخانه دیگر، بنام کارخانه شماره ۲، خریداری نماید. اکنون فرض کنید طول عمر قطعات تولید شده توسط کارخانه ۲ از توزیع MAH با پارامترهای $(\alpha; \mu_1, \ldots, \mu_n; \bar{F}(x))$ پیروی نماید. در چنین موقعیتی، تغییر توزیع طول عمر قطعات ممکن است روی کیفیت و طول عمر دستگاه‌های سری (یا موازی) تاثیر بگذارد. نتایج حاصل از این مقاله، تحت شرایطی به مقایسه‌هایی میان توابع بقا، توابع نرخ خطر و توابع نرخ خطر وارون این‌گونه دستگاه‌ها متشکل از قطعات استفاده شده از کارخانه ۱ و ۲ می‌پردازد.

در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است که در بخش‌های بعدی مقاله، از آنها استفاده می‌شود. مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های مستقل مدل نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، در بخش ۳ انجام شده است. در بخش ۴ به بررسی مقایسه‌های تصادفی این‌گونه سیستم‌ها از لحاظ ترتیب نرخ خطر و نرخ خطر وارون پرداخته شده است. سرانجام، بحث و نتیجه گیری در انتهای مقاله، بیان شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم

در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی است.

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(x)$، توابع توزیع $F(x)$ و $G(x)$، توابع بقای $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$، توابع نرخ خطر $r_F(x) =$

$f(x)/\bar{F}(x)$ و $r_G(x) = g(x)/\bar{G}(x)$، توابع نرخ خطر وارون $\tilde{r}_F(x) = f(x)/F(x)$ و $\tilde{r}_G(x) = g(x)/G(x)$ باشند.

الف- X در ترتیب تصادفی معمولی[1]، بزرگتر از Y است $(X \geq_{st} Y)$، هرگاه به ازای هر $x \geq 0$، رابطه $\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x)$ برقرار باشد.

ب- X در ترتیب نرخ خطر[2]، بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$، هرگاه به ازای هر $x \geq 0$، رابطه $r_F(x) \leq r_G(x)$ برقرار باشد.

ج- X در ترتیب نرخ خطر وارون[3]، بزرگتر از Y است $(X \geq_{rh} Y)$، هرگاه به ازای هر $x \geq 0$، رابطه $\tilde{r}_F(x) \geq \tilde{r}_G(x)$ برقرار باشد.

بین ترتیب‌های تصادفی رابطه $X \geq_{hr} Y (X \geq_{rh} Y) \Longrightarrow X \geq_{st} Y$ برقرار است (مولر و استویان ، ۲۰۰۲؛ شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷). آنتروپی مانده تجمعی را رائو و همکاران (۲۰۰۴) و وانگ و همکاران (۲۰۰۳) به صورت

$$\mathcal{E}(x) = -\int_0^{\infty} \bar{F}(x)\log(\bar{F}(x))dx,$$

تعریف کردند.

تعریف ۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی باشند. در این صورت X در ترتیب آنتروپی مانده تجمعی[4] بزرگتر از Y است $(X \geq_{CRE} Y)$ هرگاه نابرابری $\mathcal{E}(X) \geq \mathcal{E}(Y)$ به ازای $x \geq 0$ برقرار باشد.

زردشت (۲۰۱۵) نشان داد ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب آنتروپی مانده تجمعی را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۳. فرض کنید $a_{(n)} \leq \cdots \leq a_{(1)}$ و $b_{(n)} \leq \cdots \leq b_{(1)}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ باشند.

الف- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن[5] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای $i = 1, \ldots, n-1$، $\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}$ باشد.

ب- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از بالا[6] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای $i = 1, \ldots, n$، $\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$ باشد.

---
[1]Usual Stochastic Order
[2]Hazard Rate Order
[3]Reversed Hazard Rate Order
[4]Cumulative Residual Entropy Order
[5]Majorization
[6]Weakly SuperMajorization

مفهوم بیشاندن ارتباط نزدیکی با پراکندگی دارد. زیرا اگر $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از $\mathbf{b}$ باشد ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) آنگاه دامنه بردار $\mathbf{a}$ یعنی $a_{(n)} - a_{(1)}$ بزرگتر از دامنه بردار $\mathbf{b}$ یعنی $b_{(n)} - b_{(1)}$ است و در نتیجه بردار $\mathbf{a}$ پراکنده‌تر از بردار $\mathbf{b}$ است. باید توجه داشت که ترتیب بیشاندن، ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۴. *(مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)* تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شور-محدب[1] است، هرگاه

$$\boldsymbol{u} \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{v} \Rightarrow \phi(\boldsymbol{u}) \geq \phi(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{A}.$$

همچنین تابع ϕ روی $\mathbb{A}$ شور-مقعر[2] نامیده می‌شود هرگاه $-\phi$ روی $\mathbb{A}$ شور-محدب باشد.

لم ۱. *(مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)* فرض کنید $I \subset \mathbb{R}$ و $\Psi : I^n \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و پیوسته باشد. تابع Ψ روی I^n شور-محدب *(شور-مقعر)* است اگر و فقط اگر تابع Ψ روی I^n متقارن باش و به ازای $i \neq j$ و $\mathbf{z} \in I^n$ نابرابری

$$(z_i - z_j)\big(\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \Psi}{\partial z_j}(\mathbf{z})\big) \geq 0 \; (\leq 0),$$

برقرار باشد که در آن $\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(\mathbf{z})$ بیانگر مشتق تابع Ψ نسبت به مولفه i-ام است.

لم ۲. *(مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)* تابع حقیقی مقدار ϕ را روی $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. $\boldsymbol{u} \overset{w}{\succeq} \boldsymbol{v}$ نابرابری $\phi(\boldsymbol{u}) \geq \phi(\boldsymbol{v})$ را نتیجه می‌دهد اگر و فقط اگر ϕ تابعی نزولی و شور-محدب در $\mathbb{A}$ باشد.

۳ ترتیب تصادفی معمولی

قضیه ۱. *(پلدگر و پروشان، ۱۹۷۱)* فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به طوری که $X_i \sim \bar{F}(\cdot; \lambda_i)$ باشند که در آن $\lambda_i > 0$ و $\bar{F}(\cdot; \lambda_i)(F(\cdot; \lambda_i))$ مشتق‌پذیر باشند. اگر $\log \bar{F}(\cdot; \lambda_i)(\log F(\cdot; \lambda_i))$ یکنوا و محدب در λ_i باشند آنگاه تابع بقای $X_{k:n}$ به ازای $k = 1, \ldots, n$ تابعی شور-محدب *(شور-مقعر)* در $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ است که در آن $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ آماره‌های مرتب متناظر با X_i ها هستند.

فرع ۱. فرض کنید نمونه تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ از مدل $MAH\,(\alpha; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; \bar{F})$ و $Y_1, \ldots, Y_n$ از مدل $MAH\,(\alpha; \mu_1, \ldots, \mu_n; \bar{F})$ پیروی کنند. در این صورت به ازای $0 < \alpha \leq 1$ و $k = 1, \ldots, n$، داریم:

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n) \overset{m}{\preceq} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Longrightarrow Y_{k:n} \leq_{st} X_{k:n}.$$

[1] Schur-convex
[2] Schur-concave

برهان: بسادگی می‌توان نشان داد به ازای $0 < \alpha \le 1$،

$$\bar{F}(x;\lambda_i) = \frac{\alpha\, e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}, \qquad x>0,$$

تابعی نزولی و لوگ-محدب نسبت به λ_i است. بنابراین شرایط قضیه ۱ برقرار است و نتیجه لازم، حاصل می‌شود.

فرع ۱ نشان می‌دهد تحت شرایطی، وقتی مولفه‌ها از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تبعیت کنند آنگاه افزایش میزان پراکندگی میان پارامترها منجر به افزایش طول عمر سیستم‌های k از n خواهد شد.

قضیه زیر نشان می‌دهد نتیجه فرع ۱ می‌تواند به بزرگترین آماره مرتب با استفاده از جایگذاری بیشاندن به بیشاندن ضعیف از بالا تعمیم یابد.

قضیه ۲. فرض کنید نمونه تصادفی $X_1,\dots,X_n$ از مدل $MAH\,(\alpha;\lambda_1,\dots,\lambda_n;\bar{F})$ و $Y_1,\dots,Y_n$ از مدل $MAH\,(\alpha;\mu_1,\dots,\mu_n;\bar{F})$ پیروی کنند. در این صورت، به ازای $0<\alpha\le 1$، داریم:

$$(\mu_1,\dots,\mu_n) \overset{w}{\preceq} (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \Longrightarrow Y_{n:n} \le_{st} X_{n:n}.$$

برهان: تابع بقای $X_{n:n}$، به صورت

$$\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = 1-\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}{1-\bar{\alpha}e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}, \qquad\qquad x>0,$$

است. براساس لم ۲ برای بدست آوردن نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود به ازای $x>0$ و $0<\alpha\le 1$، تابع $\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ نزولی و شور-محدب در λ_i است. مشتق جزیی $\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ نسبت به λ_i به صورت

$$\frac{\partial \bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i} = -\left(1-\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})\right)\frac{\alpha e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}{\Big(1-e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)\Big)\Big(1-\bar{\alpha}e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)\Big)}<0,$$

است که نشان می‌دهد $\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ تابعی نزولی در λ_i است. همچنین به ازای $i\neq j$، داریم:

$$\begin{aligned}(\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial \bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial \bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_j}\Big) &= \alpha x\left(1-\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})\right)(\lambda_i-\lambda_j)\\ &\times \Big(\phi(e^{-\lambda_j x}\bar{F}(x))-\phi(e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x))\Big),\end{aligned}$$

که در آن به ازای $0\le u<1$، $\phi(u)=u/\big(1-\bar{\alpha}\,u\big)\big(1-u\big)$ است. می‌توان نشان داد $\phi(u)$ تابعی صعودی

در $۰ \le u < ۱$ است. به ازای $\lambda_i > \lambda_j$، $۰ \le e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x) \le e^{-\lambda_j x}\bar{F}(x) < ۱$ و در نتیجه

$$(\lambda_i - \lambda_j)\Big(\frac{\partial \bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j}\Big) \ge ۰.$$

بنابراین براساس لم ۱ نتیجه می‌شود $\bar{F}_{n:n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ تابعی شور–محدب در λ_i است.

قضیه ۲ نشان می‌دهد تحت شرایطی، وقتی مولفه‌ها از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تبعیت کنند آنگاه افزایش میزان پراکندگی میان پارامترها منجر به افزایش طول عمر سیستم‌های موازی خواهد شد. چون به ازای $\alpha = ۱$، مدل MAH به مدل AH تبدیل می‌شود بلافاصله نتیجه زیر از قضیه ۲ حاصل می‌شود.

فرع ۲. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ از مدل $AH\ (\lambda_۱, \ldots, \lambda_n; \bar{F})$ پیروی کنند. همچنین فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_n$ از مدل $AH\ (\mu_۱, \ldots, \mu_n; \bar{F})$ پیروی کنند. در این صورت

$$(\mu_۱, \ldots, \mu_n) \overset{w}{\preceq} (\lambda_۱, \ldots, \lambda_n) \Longrightarrow Y_{n:n} \le_{st} X_{n:n}.$$

مثال نقض زیر نشان می‌دهد که نتیجه قضیه ۲ ممکن است برای سایر آماره‌های مرتب برقرار نباشد.

مثال ۱. فرض کنید $\bar{F}(x) = e^{-x}$، $x > ۰$ باشد. فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim MAH(۰/۱, \lambda_i; \bar{F}(x))$ باشد $(i = ۱,۲,۳)$ که در آن $(\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳) = (۰/۱, ۱, ۷/۹)$، و $Y_۱, Y_۲, Y_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل با $Y_i \sim MAH(۰/۱, \mu_i; \bar{F}(x))$، باشد $(i = ۱,۲,۳)$ که در آن $(\mu_۱, \mu_۲, \mu_۳) = (۱, ۳, ۷)$ است. بسادگی مشاهده می‌شود $(\mu_۱, \mu_۲, \mu_۳) \overset{w}{\preceq} (\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳)$ است. توابع بقا $X_{۱:۳}$ و $Y_{۱:۳}$ در روابط

$$\bar{F}_{۱:۳}(۰/۰۰۵; \boldsymbol{\lambda}) \approx ۰/۶۷۵۴ < ۰/۶۹۰۵ \approx \bar{F}_{۱:۳}(۰/۰۰۵; \boldsymbol{\mu}),$$
$$\bar{F}_{۱:۳}(۰/۰۸; \boldsymbol{\mu}) \approx ۰/۰۳۳۸ < ۰/۰۵۱۵ \approx \bar{F}_{۱:۳}(۰/۰۸; \boldsymbol{\lambda}),$$

صدق می‌کنند، که نشان می‌دهد $X_{۱:۳}$ و $Y_{۱:۳}$ نمی‌توانند از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی مقایسه شوند.

براساس فرع ۱ تابع بقا کوچکترین آماره مرتب متشکل از نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده تابعی شور–محدب در $۰ < \alpha \le ۱$ است. قضیه بعدی، خاصیت شور–مقعر بودن تابع بقا به ازای $\alpha \ge ۱$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۳. فرض کنید نمونه تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ از مدل $MAH\ (\alpha; \lambda_۱, \ldots, \lambda_n; \bar{F})$ و $Y_۱, \ldots, Y_n$ از مدل $MAH\ (\alpha; \mu_۱, \ldots, \mu_n; \bar{F})$ پیروی کند. در این صورت به ازای $\alpha \ge ۱$، داریم:

$$(\mu_۱, \ldots, \mu_n) \overset{m}{\preceq} (\lambda_۱, \ldots, \lambda_n) \Longrightarrow X_{۱:n} \le_{st} Y_{۱:n}.$$

برهان: تابع بقا $X_{1:n}$ به صورت

$$\bar{F}_{1:n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\alpha^n\, e^{-x\,\sum_{i=1}^n \lambda_i}\, \bar{F}^n(x)}{\prod_{i=1}^n \Big(1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)\Big)}, \qquad x>0,$$

است. واضح است به ازای $x>0$ که $e^{-x\,\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ یک تابع شور–ثابت در λ_i است. بنابراین برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود تابع متقارن $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ که به صورت

$$\psi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{i=1}^n \Big(1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)\Big)$$

تعریف شده است، تابعی شور–محدب در λ_i به ازای $\alpha \geq 1$ و $x>0$ است. مشتق جزیی ψ نسبت به λ_i به صورت

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i} = \bar{\alpha}\, x\, \psi(\boldsymbol{\lambda})\, \frac{e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)},$$

است. بنابراین به ازای $i\neq j$،

$$\begin{aligned}(\lambda_i-\lambda_j)\Big(\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_j}\Big) &= \bar{\alpha}\, x\, \psi(\boldsymbol{\lambda})\,(\lambda_i-\lambda_j)\\ &\times \Big(\frac{e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}-\frac{e^{-\lambda_j x}\bar{F}(x)}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda_j x}\bar{F}(x)}\Big).\end{aligned}$$

چون $\alpha \geq 1$ و تابع $(e^{-\lambda x}\bar{F}(x))/\Big(1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}\bar{F}(x)\Big)$ تابعی نزولی در λ است در نتیجه، عبارت اخیر نامنفی است و بنابر لم ۱ نتیجه می‌شود $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ تابعی شور–محدب در λ_i است.
از قضیه ۳ برای ساختن یک کران بالا برای تابع بقای یک سیستم سری متشکل از مولفه‌های ناهمگن و مستقل MAH متناظر با یک نمونه مستقل و همگن استفاده می‌شود. به صورت دقیق‌تر، چون $(\bar{\lambda},\dots,\bar{\lambda}) \stackrel{m}{\preceq} (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ است در نتیجه یک کران بالا برای $X_{1:n}$ عبارت است از

$$\bar{F}_{1:n}(x;\boldsymbol{\lambda}) \leq \frac{\alpha^n\, e^{-x\,n\bar{\lambda}}\,\bar{F}^n(x)}{\big(1-\bar{\alpha}\, e^{-\bar{\lambda}x}\bar{F}(x)\big)^n}, \quad x>0,$$

فرع ۳. فرض کنید نمونه تصادفی $X_1,\dots,X_n$ از مدل $MAH\,(\alpha;\lambda_1,\dots,\lambda_n;\bar{F})$ و $Y_1,\dots,Y_n$ از مدل

$MAH\,(\alpha;\mu_1,\dots,\mu_n;\bar{F})$ پیروی کند. در این صورت به ازای $\alpha \geq 1$، داریم

$$(\mu_1,\dots,\mu_n) \overset{m}{\preceq} (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \Longrightarrow X_{1:n} \leq_{CRE} Y_{1:n},$$

فرع ۳ یک نتیجه مستقیم از قضیه ۳ است که کمک می‌کند بتوان سیستم‌های سری با مولفه‌های ناهمگن را از لحاظ ترتیب آنتروپی مانده تجمعی مقایسه کرد. این فرع برای ساختن یک کران بالا برای آنتروپی مانده تجمعی متشکل از مولفه‌های ناهمگن و مستقل MAH متناظر با با یک نمونه مستقل و همگن استفاده می‌شود. به صورت دقیق‌تر، چون $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \overset{m}{\preceq} (\bar{\lambda},\dots,\bar{\lambda})$ است در نتیجه یک کران بالا برای $X_{1:n}$، به ازای $\alpha \geq 1$، عبارت است از

$$\mathcal{E}(X_{1:n}) \leq -\int_0^\infty \frac{\alpha^n\, e^{-x\, n\bar{\lambda}}\bar{F}^n(x)}{\big(1-\bar{\alpha}\, e^{-\bar{\lambda}x}\bar{F}(x)\big)^n}\ \log\Big(\frac{\alpha^n\, e^{-x\, n\bar{\lambda}}\bar{F}^n(x)}{\big(1-\bar{\alpha}\, e^{-\bar{\lambda}x}\bar{F}(x)\big)^n}\Big)\, dx.$$

مثال ۲. فرض کنید نمونه تصادفی X_1,X_2,X_3 از مدل $MAH\,(\alpha;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3;\bar{F})$ و Y_1,Y_2,Y_3 از مدل $MAH\,(\alpha;\mu_1,\mu_2,\mu_3;\bar{F})$ پیروی کنند. اگر $\alpha=2$، $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0/1,1,1/9)$ و $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=(1,2,5)$ باشد واضح است که $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \overset{w}{\preceq} (\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ است. توابع بقا $X_{1:3}$ و $Y_{1:3}$ در روابط

$$\bar{F}_{1:3}(0/008;\boldsymbol{\lambda}) \approx 0/9942 \quad < \quad 0/9949 \approx \bar{F}_{1:3}(0/008;\boldsymbol{\mu}),$$
$$\bar{F}_{1:3}(0/2;\boldsymbol{\mu}) \approx 0/1835 \quad < \quad 0/2268 \approx \bar{F}_{1:3}(0/2;\boldsymbol{\lambda}),$$

صدق می‌کنند که نشان می‌دهد توابع بقاهای فوق، همدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین $X_{1:3}$ و $Y_{1:3}$ نمی‌توانند از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی با یکدیگر مقایسه شوند.

قضیه ۴. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ از مدل $AH\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n;\bar{F})$ و $Y_1,\dots,Y_n$ از مدل $MAH\,(\alpha;\mu_1,\dots,\mu_n;\bar{F})$ پیروی کنند. در این صورت به ازای $0 < \alpha \leq 1$، داریم:

الف– $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \overset{w}{\preceq} (\mu_1,\dots,\mu_n)$ نتیجه می‌دهد $Y_{n:n} \leq_{st} X_{n:n}$؛

ب– $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \overset{m}{\preceq} (\mu_1,\dots,\mu_n)$ نتیجه می‌دهد $Y_{1:n} \leq_{st} X_{1:n}$.

برهان: فرض کنید $Z_1,\dots,Z_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل $MAH\,(\alpha;\lambda_1,\dots,\lambda_n;\bar{F})$ پیروی می‌کنند. به عبارت دیگر

$$F_{Z_i}(x) = \frac{1-e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}{1-\bar{\alpha}e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)}, \qquad \lambda_i > 0, \bar{\alpha} = 1-\alpha$$

الف– چون $F_{X_i}(x) = 1-e^{-\lambda_i x}\bar{F}(x)$ است بسادگی مشاهده می‌شود به ازای $0 < \alpha \leq 1$ و هر $x > 0$،

نابرابری $F_{X_i}(x) \le F_{Z_i}(x)$ برقرار است $(i=۱,\dots,n)$. بنابراین $\prod_{i=۱}^{n} F_{X_i}(x) \le \prod_{i=۱}^{n} F_{Z_i}(x)$ که معادل با $X_{n:n} \le_{st} Z_{n:n}$ است. از طرف دیگر، با استفاده از قضیه ۱ داریم

$$(\mu_۱,\dots,\mu_n) \overset{w}{\preceq} (\lambda_۱,\dots,\lambda_n) \Rightarrow Y_{n:n} \le_{st} Z_{n:n}.$$

با استفاده از نتایج حاصل شده، نتیجه لازم بدست می‌آید.
ب- به ازای $۰ < \alpha \le ۱$، بسادگی می‌توان نشان داد $\bar{F}_{Z_i}(x) \le \bar{F}_{X_i}(x)$ است. در نتیجه به ازای $۰ < \alpha \le ۱$، نابرابری $\prod_{i=۱}^{n} \bar{F}_{Z_i}(x) \le \prod_{i=۱}^{n} \bar{F}_{X_i}(x)$ برقرار است که معادل نابرابری تصادفی $Z_{۱:n} \le_{st} X_{۱:n}$ است. فرض کنید $(\lambda_۱,\dots,\lambda_n) \overset{m}{\preceq} (\mu_۱,\dots,\mu_n)$ باشد. بنابراین با استفاده از قضیه ۳، نتیجه می‌شود به ازای $۰ < \alpha \le ۱$، $Y_{۱:n} \le_{st} Z_{۱:n}$ برقرار است. اکنون با ترکیب نابرابری‌های تصادفی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۴ ترتیب‌های نرخ خطر و نرخ خطر وارون

لم ۳. (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $J \subset \mathbb{R}$ و $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد آنگاه $\sum_{i=۱}^{n} g(x_i)$ تابعی شور- محدب است.

قضیه ۵. فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده $MAH\,(\alpha_۱,\dots,\alpha_n;\lambda,\dots,\lambda;\bar{F})$ و $Y_۱,\dots,Y_n$ یک مجموعه دیگر از متغیرهای تصادفی مستقل باشند که از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده $MAH\,(\nu_۱,\dots,\nu_n;\lambda,\dots,\lambda;\bar{F})$ پیروی می‌کنند. در این صورت
الف- $(\nu_۱,\dots,\nu_n) \overset{w}{\preceq} (\alpha_۱,\dots,\alpha_n) \Longrightarrow X_{۱:n} \le_{hr} Y_{۱:n}$
ب- $(\nu_۱,\dots,\nu_n) \overset{w}{\preceq} (\alpha_۱,\dots,\alpha_n) \Longrightarrow X_{n:n} \le_{rh} Y_{n:n}$

برهان: فرض کنید r تابع نرخ خطر متناظر با تابع بقای $\bar{F}$، $H(x) = -\log \bar{F}(x)$ و $\bar{\alpha}_i = ۱ - \alpha_i$ باشد.
الف- تابع نرخ خطر $X_{۱:n}$ به صورت

$$r_{۱:n}(x;\boldsymbol{\alpha}) = (\lambda + r(x)) \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱ - \bar{\alpha}_i\, e^{-\lambda\, x}\, \bar{F}(x)}, \quad x > ۰,$$

است. به منظور رسیدن به نتیجه لازم، براساس لم ۲، کافی است

$$\phi(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱ - \bar{\alpha}_i\, e^{-\lambda\, x}\, \bar{F}(x)},$$

تابعی نزولی و شور–محدب در α_i است. تابع $1/\Big(1-(1-\alpha)\,e^{-\lambda\,x}\bar{F}(x)\Big)$ تابعی صعودی از $\alpha > 0$ است که به نوبه خود نتیجه می‌دهد $\phi(\boldsymbol{\alpha})$ تابعی نزولی در α_i است. همچنین $1/\Big(1-(1-\alpha)\,e^{-\lambda\,x}\bar{F}(x)\Big)$ تابعی محدب در $\alpha > 0$ است. اکنون شور–محدب بودن $\phi(\boldsymbol{\alpha})$ با استفاده از لم ۳ حاصل می‌شود.

ب– تابع نرخ خطر وارون $X_{n:n}$ به صورت

$$\tilde{r}_{n:n}(x;\boldsymbol{\alpha}) = \frac{e^{-\lambda x}\bar{F}(x)\,(\lambda + r(x))}{1 - e^{-\lambda\,x}\bar{F}(x)}\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i\,e^{-\lambda\,x}\bar{F}(x)}, \quad x > 0,$$

است. اکنون برای بدست آوردن نتیجه لازم، براساس ۲، کافی است نشان داده شود

$$\psi(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i\,e^{-\lambda\,x}\bar{F}(x)},$$

تابعی صعودی و شور–مقعر در α_i است. بقیه اثبات همانند بند (الف) است. بنابراین از ارائه آن خودداری می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های نرخ خطر جمع‌پذیر اصلاح شده پرداخته شد. برخی از نتایج این مقاله نشان می‌دهند که تحت شرایطی، وقتی مولفه‌ها از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تبعیت کنند آنگاه افزایش میزان پراکندگی میان پارامترها باعث افزایش طول عمر سیستم‌های سری و موازی خواهد شد. بررسی سایر ترتیب‌های تصادفی مانند ترتیب نرخ خطر، نرخ خطر وارون و نسبت درستنمایی برای این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های وابسته و تحت مفصل ارشمیدسی، می‌تواند به عنوان یکی از مطالعات آینده برای پژوهشگران علاقمند در این زمینه مطرح شود. لازم به ذکر است که کلیه نتایج ارائه شده در این مقاله، با فرض یکسان بون تابع توزیع پایه ارائه شده است و مقایسه‌های تصادفی براساس تغییر پارامترها انجام شده است. نتایج برای زمانی که توزیع‌های پایه متفاوت هستند می‌تواند به عنوان یک ایده جدید، در آینده به آن پرداخته شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران محترم و ویراستار ارجمند مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند.

مراجع

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس،، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶-۱۸۹.

برمال‌زن، ق. حیدری. (۱۳۹۸)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های مستقل و ناهمگن تحت نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته، مجله علوم آماری، ۱۳، ۳۳۸-۳۱۹.

Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2018), Modified Proportional Hazard Rates and Proportional Reversed Hazard Rates Models via Marshall-Olkin Distribution and Some Stochastic Comparisons, *Journal of the Korean Statistical Society*, **47**, 127-138.

Balakrishnan, N., Haidari, A. and Masoumifard, K. (2015), Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Generalized Exponential Components, *IEEE Transactions on Reliability,* **64**, 333-348.

Balakrishnan, N. and Zhao, P. (2013), Hazard Rate Comparison of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components, *Journal of Multivariate Analysis*, **113**, 153-160.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2017), Orderings for Series and Parallel Systems Comprising Heterogeneous Exponentiated Weibull-Geometric Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9869-9880.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Silver Spring, Maryland.

Finkelstein, M. (2008), *Failure Rate Modelling for Reliability and Risk*, Springer

Finkelstein, M. and Esaulova, V. (2001), Modelling a Failure Rate for a Mixture of Distribution Function, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **15**, 383-400.

Finkelstein, M. and Esaulova, V. (2006), On Mixture Failure Rates Ordering, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**, 1943-1955.

Cha, J.H. and Finkelstein, M. (2013), The Failure Rate Dynamics in Heterogeneous Populations, *Reliability Engineering & System Safety,* **112**, 120-128.

Fang, L. and Zhang, X. (2013), Stochastic Comparison of Series Systems with Heterogeneous Weibull Components, *Statistics & Probability Letters*, **83**, 1649-1653.

Haidari, A., Sattari, M. and Barmalzan, G. (2023a), Mean Residual Life Order among Largest Order Statistics arising from Resilience-Scale Models with Reduced Scale Parameters, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **37**, 72-85.

Haidari, A., Sattari, M., Saadat Kia, G. and Balakrishnan, N. (2023b), MRL Ordering of Largest Order Statistics from Heterogeneous Scale Variables, *Statistics*, **57**, 354-374.

Hazra, N.K. and Finkelstein, M. (2018), On Stochastic Comparisons of Finite Mixtures for some Semiparametric Families of Distributions, *Test*, **27**, 988-1006.

Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. (2006), Weibull Distribution: Some Stochastic Comparisons Results, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3121-3129.

Kochar, S.C. and Xu, M. (2007a), Some Recent Results on Stochastic Comparisons and Dependence Among Order Statistics in the case of PHR Model, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **6**, 125-140.

Kochar, S.C. and Xu, M. (2007b), Stochastic Comparisons of Parallel Systems when Components Have Proportional Hazard Rates, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **21**, 597-609.

Marshall, A.W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions*, Springer-Verlag, New York.

Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications,* Springer, New York.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks,* John Wiley & Sons, New York.

Pledger, G. and Proschan, F. (1971). Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogeneous Distributions, *In Optimizing Methods in Statistics*, (pp. 89-113). Academic Press.

Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B.C. and Wang, F. (2004), Cumulative Residual Entropy: A New Measure of Information, *Information Theory, IEEE Transactions on Information Theory,* **50**, 1220–1228.

Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.

Wang, F., Vemuri, B.C., Rao, M. and Chen, Y. (2003), A New and Robust Information Theoretic Measure and Its Applications to Image Alignment. *In: International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, 3880-4000.

Zardasht, V. (2015), A Test for the Increasing Convex Order Based on the Cumulative Residual Entropy, *Journal of the Korean Statistical Society*, **44**, 491-497.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011), New Results on Comparisons of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components, *Statistics & Probability Letters*, **81**, 36-44.