






## Fuzzy Lee-Carter Model in Mortality Data Analysis

Chachi, J. , Akhond, M. R. , Ahmadi, S. 

Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer,  
Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

**Corresponding author:** J. Chachi, [jalal.chachi@scu.ac.ir](mailto:jalal.chachi@scu.ac.ir)

Received: 27/7/2024 Revised: 26/10/2024 Accepted and Published Online: 30/10/2024.

### Introduction

The Lee-Carter model is a useful dynamic stochastic model representing the evolution of central mortality rates over time. This model only considers the uncertainty about the coefficient related to the mortality trend over time but not the age-dependent coefficients. It is evident that the death statistics are reported at risk of all kinds of mistakes and recording errors. Incorrect statistics may be reported for the year or region, or inaccurate and misleading characteristics, such as gender or age. In addition, population data may be recorded at mid-year, which may be subject to error, as half of the observed deaths have not yet occurred. Such errors are evidence of overestimation or underestimation. Therefore, the exact mortality rate is rarely known; hence, recording and incorporating fuzzy data into the model seems justified.

### Material and Methods

This paper proposes a fuzzy extension of the Lee-Carter model that allows quantifying the uncertainty of both kinds of parameters. The variability of the time-dependent index is modeled as a stochastic fuzzy time series. Likewise, the age-dependent coefficients' uncertainty is also quantified using triangular fuzzy numbers. Considering this last hypothesis requires developing and solving a fuzzy regression model.

### Results and Discussion

Once the generalization of the desired fuzzy model is introduced, we will show how to fit the logarithm of the central mortality rate in Khuzestan

.....

province by using fuzzy numbers arithmetic during the years 1401-1383 and random fuzzy forecast in the years 1402-1406. Therefore, the results of the modeling of mortality data in Khuzestan province from 1383 to 1401 and the values of the mortality rate in the five years after that were analyzed. It was predicted by a stochastic time series model.

### Conclusion

Finally, this paper introduces a new fuzzy Lee-Carter model to represent the evolution of the central mortality rate over time. In this model, the possible uncertainty about the coefficient related to the mortality trend over time is considered. The possibility of uncertainty and/or possibility related to the age-dependent coefficients is also considered. The proposed model can have many applications in mammography, actuarial sciences, economics, finance, epidemiology, biology, medicine, or sociology. Government managers can also use mortality forecasts when planning and developing social or health policies or predicting the rate of population aging in the future.

**Keywords:** Fuzzy Lee-Carter model, Fuzzy stochastic forecasting, Fuzzy mortality data, Uncertainty.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62A80, 94D05.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۳

جلد ۱۸، شماره ۲، ص ۲۳۵ -- ۲۵۲

DOI: 10.61186/jss.18.2.12

مقاله پژوهشی

## مدل لی-کارتر فازی در تحلیل داده‌های مرگ و میر

جلال چاچی، محمدرضا آخوند، شکوفه احمدی

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

نویسنده مسئول: جلال چاچی، jalal.chachi@scu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۸/۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۸/۱۰

**چکیده:** مدل لی-کارتر یک مدل پویای تصادفی است که برای نشان دادن تکامل نرخ مرگ و میر مرکزی در طول زمان مفید است. این مدل فقط عدم قطعیت احتمالی در مورد ضریب مربوط به روند مرگ و میر در طول زمان را در نظر می‌گیرد، اما عدم قطعیت احتمالی یا امکانی مربوط به ضرایبی که به سن وابسته هستند را در نظر نمی‌گیرد. لذا در ادامه تعمیم فازی از مدل لی-کارتر پیشنهاد می‌شود که حالت عدم قطعیت امکانی هر دو نوع ضریب را فراهم می‌کند. در این مدل، تغییرپذیری شاخص وابسته به زمان به عنوان یک مدل سری زمانی-تصادفی فازی مدل‌سازی می‌شود. به همین ترتیب، عدم قطعیت امکانی ضرایب وابسته به سن نیز با استفاده از اعداد فازی مثلثی اندازه‌گیری می‌شود، که این موضوع نیازمند استفاده از یک مدل فازی است. پس از تعمیم مدل فازی مورد نظر، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان لگاریتم نرخ مرگ و میر مرکزی در استان خوزستان را با استفاده از محاسبات اعداد فازی در طی سال‌های ۱۳۸۳-۱۴۰۱ برازش و در سال‌های ۱۴۰۲-۱۴۰۶ پیش‌بینی تصادفی فازی کرد.

**واژه‌های کلیدی:** مدل لی-کارتر فازی، پیش‌بینی تصادفی فازی، داده‌های مرگ و میر فازی، عدم قطعیت امکانی.

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62A80, 94D05.



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.  
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

## ۱ مقدمه

روش‌های آماری کلاسیک متداول، مرگ و میر را تنها با در نظر گرفتن سن افراد بدون ملاحظه و بررسی سال تقویمی بررسی می‌کنند. چندین مقاله رویکردهای تصادفی پویا را برای تکامل و بررسی نرخ‌های مرگ و میر در طول زمان (سال یا زمان تقویمی  $t$ ) تعمیم و توسعه دادند. این بررسی‌ها و تحقیق‌ها منجر به پیش‌بینی دقیق‌تر نرخ یا تعداد مرگ و میرها در آینده با استفاده از این مدل‌ها شد. یکی از این مدل‌ها منسوب به لی-کارتز است، که بسیار مورد توجه و بررسی قرار گرفته است (باسلینی و همکاران، ۲۰۲۳؛ لی و کارتز، ۱۹۹۲). مدل لی-کارتز یک مدل پویای تصادفی است که برای نشان دادن تغییرات متوسط نرخ مرگ و میر در طول زمان مفید است. در این مدل فقط عدم قطعیت<sup>۱</sup> در مورد ضرایب مربوط به روند مرگ و میر در طول زمان در نظر گرفته می‌شود، اما از عدم قطعیت مربوط به ضرایبی که به سن یا گروه‌های سنی وابسته هستند چشم‌پوشی می‌شود.

پس از معرفی مدل لی-کارتز تعمیم‌های زیادی برای آن از جهات مختلف پیشنهاد و بررسی شد، که همه آنها در دو ویژگی مشترک بودند (باسلینی و همکاران، ۲۰۲۳). اول، معرفی مدل کاملتر و پیچیده‌تر، که محاسبات بیشتری را شامل می‌شد. دوم، همه آنها با الگو گرفتن از مدل لی-کارتز، تغییرات زمانی مختص سن بخصوصی که توسط مدل توجیه نشده بود را در خطای تصادفی لحاظ کردند (لی، ۲۰۰۰). با این حال، منشاء تصادف ممکن است تنها منبع منحصر به فرد عدم قطعیت نباشد، بلکه عدم قطعیت می‌تواند منشاء امکانی<sup>۲</sup> داشته باشد. لذا عدم قطعیت می‌تواند از توزیع امکان (مثلاً به دلیل اطلاعات ناقص، نادرست یا مبهم) ناشی شود، که می‌تواند با مفاهیمی از نظریه مجموعه‌های فازی مدل‌سازی شود (زیمرمن، ۲۰۰۱؛ کویسی و شاپیرو، ۲۰۰۶). بنابراین، دو دلیل اصلی برای فرمول‌بندی فازی مدل لی-کارتز پیشنهاد شده است:

الف- در مدل مرسوم و متداول لی-کارتز، عبارات خطای  $x_t$  دارای توزیع نرمال با واریانس ثابت در نظر گرفته می‌شود. این فرض زیربنایی در بسیاری از کاربردها به راحتی نقض می‌شود. لذا منطق فازی می‌تواند در مدل لی-کارتز با در نظر گرفتن توزیع‌های امکانی به عنوان منشاء عدم قطعیت، به کار برده شود. مزیت این رویکرد این است که خطاها می‌توانند به عنوان ابهام مدل با منشاء توزیع امکانی در نظر گرفته شوند. بنابراین در روش فازی، برقراری فرض همگنی واریانس‌ها نیازمند بررسی نیست.

ب- علاوه بر این، میزان بزرگی واریانس در عبارت خطا، از دقت برآوردها تاثیر می‌پذیرد. در واقع، همانطور که لی (۲۰۰۰) بیان کرد "البته امیدواریم که عبارت خطا به خوبی رفتار کند و واریانس نسبتاً کمی داشته باشد". البته که این واریانس چقدر باید "کوچک" باشد، خود ابهام دارد و مورد بحث است!؛ بنابراین مفهوم کوچک بودن خود دارای ابهام است که به راحتی با مجموعه‌های فازی می‌تواند مدل شود. بنابراین به منظور بررسی ابهام در تعریف واریانس<sup>۲</sup> و نقض فرض همگنی واریانس، استفاده از فرمول فازی مدل لی-کارتز پیشنهاد می‌شود.

در ادامه، تعمیم فازی مدل لی-کارتز پیشنهاد می‌شود که امکان کمی کردن عدم قطعیت هر دو نوع پارامتر، وابسته

<sup>1</sup>Uncertainty

<sup>2</sup>Possibilistic

به سن یا زمان را فراهم می‌کند. در این مدل، تغییرپذیری شاخص وابسته به زمان به عنوان یک مدل سری زمانی  $ARIMA$  مدل‌سازی می‌شود (زارعی و همکاران، ۲۰۲۰؛ اشمولی و پولاک، ۲۰۲۴؛ محمدی و همکاران، ۱۴۰۳؛؟). به همین ترتیب، عدم قطعیت ضرایب وابسته به سن نیز با استفاده از اعداد فازی مثلثی اندازه‌گیری می‌شود (زیمرمن، ۲۰۰۱)، که نیازمند استفاده از مدل رگرسیون فازی است (چاچی و چاچی، ۱۴۰۰؛ کاظمی‌فرد و چاچی، ۲۰۲۲). هنگامی که تعمیم مدل فازی مورد نظر معرفی شد، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان برخی از متغیرهای مرتبط با نرخ مرگ و میر را با استفاده از محاسبات اعداد فازی به دست آورد یا پیش‌بینی کرد. در این خصوص به تحلیل نتایج مدل‌بندی داده‌های مرگ و میر در استان خوزستان پرداخته و مدل پیش‌بینی تصادفی فازی مقادیر نرخ مرگ و میر در سال‌های آتی بیان خواهد شد.

در بخش ۲، برخی از مفاهیم و تعاریف مورد نیاز از مجموعه‌های فازی بیان می‌شوند. در بخش ۳، به معرفی مدل لی-کارتر فازی شامل تعریف مدل، روش برآوردیابی مدل و پیش‌بینی مقادیر آتی پرداخته می‌شود. در بخش ۴، به تحلیل نتایج مدل‌بندی داده‌های مرگ و میر در استان خوزستان طی سال‌های ۱۳۸۳ تا ۱۴۰۱ پرداخته می‌شود و سپس مقادیر نرخ مرگ و میر در ۵ سال بعد از آن پیش‌بینی خواهد شد. در انتها بحث و نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

## ۲ مفاهیم پایه و نمادها

فرض کنید مجموعه اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  از  $\mathbb{R}$  با تابع عضویت  $\tilde{A}(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  مشخص می‌شود (زاده، ۱۹۶۵).  $\alpha$ -برش مجموعه فازی  $\tilde{A}$  برای هر  $\alpha \in (0, 1]$  به صورت مجموعه معمولی  $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$  تعریف می‌شود و  $A$  بستار مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) > 0\}$  است. مجموعه فازی  $\tilde{A}$  از  $\mathbb{R}$  را یک عدد فازی گویم هرگاه برای هر  $\alpha \in (0, 1]$  مجموعه‌های  $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$  ناتهی، بسته و کراندار باشند. یک رده خاص از اعداد فازی در  $\mathbb{R}$  اعداد فازی  $LR$  هستند (زیمرمن، ۲۰۰۱). یک عدد فازی  $LR$  به صورت  $\tilde{N} = (n, \ell, r)_{LR}$  نشان داده می‌شود که در آن مرکز،  $n \in \mathbb{R}$ ،  $\ell \in \mathbb{R}^+$  و  $r \in \mathbb{R}^+$  به ترتیب پهناهای چپ و راست عدد فازی و  $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  و  $R : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  به ترتیب توابع شکل نزولی چپ و راست، با شرط  $L(0) = R(0) = 1$  هستند. تابع عضویت  $\tilde{N} = (n, \ell, r)_{LR}$  به صورت

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{n-x}{\ell}\right) & \text{if } x \leq n, \\ R\left(\frac{x-n}{r}\right) & \text{if } x \geq n. \end{cases}$$

است. فرض کنید  $\tilde{M} = (m, \ell_m, r_m)_{LR}$  و  $\tilde{N} = (n, \ell_n, r_n)_{LR}$  دو عدد فازی  $LR$  و  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  یک عدد حقیقی باشد. در اینصورت حساب اعداد فازی طبق عملگرهای جمع اعداد فازی  $\oplus_F$  و ضرب اسکالر  $\otimes_F$

به صورت

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \oplus_F \widetilde{N} &= (m+n, \ell_m + \ell_n, r_m + r_n)_{LR} \\ \lambda \otimes_F \widetilde{M} &= \begin{cases} (\lambda m, \lambda \ell_m, \lambda r_m)_{LR} & \lambda > 0, \\ (\lambda m, |\lambda| r_m, |\lambda| \ell_m)_{RL} & \lambda < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

است. فرض کنید کلاس تمام اعداد فازی  $LR$  باشد. با توجه به شکل تابع عضویت، مجموعه فازی  $\widetilde{A} = (a, \ell, r)_{LR}$  را می‌توان به صورت منحصر به فرد بر حسب تابع  $s: \mathcal{F}_{LR} \rightarrow \mathbb{R}^3$  تعیین کرد، به گونه‌ای که  $s(\widetilde{A}) = (a, \ell, r) \in \mathbb{R}^3$  یا  $s(\widetilde{A}) = (a - \ell, a, a + r) \in \mathbb{R}^3$  (کروس و میر، ۱۹۸۷؛ فارو، ۲۰۱۷). تبدیل  $s$  فضای  $\mathcal{F}_{LR}$  را با حفظ برخی خصوصیات (توپولوژی و متریک) در  $\mathbb{R}^3$  جابجایی می‌کند (کراشم، ۲۰۰۱). لذا در این مقاله، با توجه به تبدیلات صورت گرفته، عملگرهای حسابی جمع  $\oplus$  تفاضل  $\ominus$  و ضرب  $\otimes$  بین  $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  و  $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \vec{A} \oplus \vec{B} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ \vec{A} \ominus \vec{B} &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \\ \vec{A} \otimes \vec{B} &= (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3) \\ \lambda \otimes \vec{A} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### ۳ مدل لی-کارتر فازی

همان‌طور که در بخش ۱ بیان شد، ابهام در تعریف عبارت خطا و تخطی از فرض همگنی واریانس، استفاده از فرمولبندی فازی برای مدل لی-کارتر را توجیه می‌کند (کوئسی و شاپیرو، ۲۰۰۶). این بخش به بررسی رویکرد جدیدی در مدل لی-کارتر در محیط فازی به منظور پیش‌بینی مقادیر متوسط نرخ مرگ و میر فازی می‌پردازد. مدل لی-کارتر در محیط فازی به صورت

$$\widetilde{M}_{x,t} = \widetilde{F_{x,t}(\widetilde{r}_t)}, \quad x = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن

$$\widetilde{M}_{x,t} = \underbrace{\left( \log(m_{x,t}), \ell_{x,t}^M, r_{x,t}^M \right)}_{M_{x,t}} \Big|_{LR} \quad (1)$$

است.

۲.  $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{N_{x,t}}$ : متوسط نرخ مرگ و میر در سن یا گروه سنی  $x$  و زمان  $t$  است و  $D_{x,t}$  و  $N_{x,t}$  به ترتیب تعداد مرگ و میرها و تعداد کل جمعیت در معرض مرگ و میر، مربوط به سن  $x$  و زمان  $t$  هستند.

۳.  $\widetilde{F}_{x,t}(\widetilde{\kappa}_t)$ : مدل فازی است که خروجی آن پیش‌بینی مقادیر  $\widetilde{M}_{x,t}$  در زمان‌های آتی بر اساس زمان‌های مشاهده شده است.

۴.  $\widetilde{\kappa}_t$ : شاخص فازی وابسته به اندیس زمان است.

۵.  $N$ : تعداد گروه‌های سنی است.

به منظور برآورد مدل (۱) ابتدا تغییر متغیر  $\vec{M}_{x,t} = (M_{x,t}, G(\ell_{x,t}^M), G(r_{x,t}^M)) \in \mathbb{R}^3$  بر روی مشاهدات فازی  $\widetilde{M}_{x,t}$  اعمال می‌شود، که در آن  $G: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی معکوس‌پذیر است (فرارو، ۲۰۱۷؛ چاچی، ۲۰۱۹؛ چاچی و همکاران، ۲۰۲۱، ۲۰۲۲؛ دورسو و چاچی، ۲۰۲۲).

این تغییر متغیر به مشاهدات فازی اعمال می‌شود تا در انتها پهناهای مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل نامنفی برآورد شوند. همچنین پارامترها بدون هیچ قید محدود کننده‌ای، از جمله نامنفی بودن پهناهای برآورد شده در کمیت‌های فازی، در توابع هدف برآورد شوند. لازم به ذکر است که توابع مختلفی برای انتخاب  $G$  وجود دارد. در این مقاله از تابع  $G(\cdot) = \log(\cdot)$  استفاده می‌شود که برای مدل‌سازی داده‌های مرگ و میر نیز انتخاب مناسبی است. عملکرد توابع مختلفی در نیکویی برازش مدل‌های فازی توسط فرارو (۲۰۱۷) بررسی شده است. لذا در ادامه، مدل

$$\begin{aligned} \vec{M}_{x,t} &= \vec{A}_x \oplus (\vec{B}_x \otimes \vec{\kappa}_t), \\ &= (A_x, \ell_x^A, r_x^A) \oplus ((B_x, \ell_x^B, r_x^B) \otimes (\kappa_t, \ell_t^\kappa, r_t^\kappa)) \\ &= (A_x + B_x \times \kappa_t, \ell_x^A + \ell_x^B \times \ell_t^\kappa, r_x^A + r_x^B \times r_t^\kappa). \end{aligned} \quad (2)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن پارامترهای  $\vec{A}_x = (A_x, \ell_x^A, r_x^A)$  و  $\vec{B}_x = (B_x, \ell_x^B, r_x^B)$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  هستند که در ادامه برآورد می‌شوند. همچنین  $\vec{\kappa}_t = (\kappa_t, \ell_t^\kappa, r_t^\kappa)$  شاخصی است که باید در زمان‌های مشاهده شده  $t$  محاسبه و در زمان‌های آینده پیش‌بینی شود.

### ۳.۱ برآوردیابی مدل لی-کارتر فازی

برای برآوردیابی مدل لی-کارتر فازی، ابتدا ماتریس (یا تنسور)<sup>۱</sup>  $\vec{M} = [\vec{M}_{x,t}]_{N \times T}$  که هر درایه آن یک بردار سه تایی در  $\mathbb{R}^3$  است، ساخته می‌شود (جیمز و همکاران، ۲۰۲۳). میانگین هر سطر به صورت

$$\hat{\vec{A}} = \left[ \frac{1}{T} \bigoplus_t \vec{M}_{x,t} \right]_{N \times 1} = \underbrace{\left[ \left( \frac{1}{T} \sum_t M_{x,t}, \frac{1}{T} \sum_t \log(\ell_{x,t}^M), \frac{1}{T} \sum_t \log(r_{x,t}^M) \right) \right]}_{\hat{\vec{A}}_x} \Big]_{N \times 1}$$

برآورد  $\hat{\vec{A}}$  را تشکیل می‌دهد. اکنون ماتریس جدید

$$\vec{\mu} = \vec{M} \ominus \hat{\vec{A}}$$

$$= \underbrace{\left[ \left( M_{x,t} - \frac{1}{T} \sum_t M_{x,t}, \log(\ell_{x,t}^M) - \frac{1}{T} \sum_t \log(\ell_{x,t}^M), \log(r_{x,t}^M) - \frac{1}{T} \sum_t \log(r_{x,t}^M) \right) \right]}_{\vec{\mu}_{x,t}} \Big]_{N \times T},$$

ساخته می‌شود. حال باید برای برآورد پارامترهای مدل، معادلات

$$\vec{\mu}_{x,t} = \vec{B}_x \otimes \vec{\kappa}_t = (B_x, \ell_x^B, r_x^B) \otimes (\kappa_t, \ell_t^\kappa, r_t^\kappa), \quad x = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T.$$

تحت شرایط

$$\sum_t \kappa_t = 0, \quad \sum_t \ell_t^\kappa = 0, \quad \sum_t r_t^\kappa = 0,$$

$$\sum_x B_x = 1, \quad \sum_x \ell_x^B = 1, \quad \sum_x r_x^B = 1.$$

<sup>۱</sup>Tensor



حل شوند (لی، ۲۰۰۰؛ لی و کارتر، ۱۹۹۲). برای تعیین مقادیر برآوردهای  $\vec{B}_x$  و  $\vec{\kappa}_t$  از روش تجزیه مقادیر منفرد<sup>۱</sup> استفاده می‌شود (سوکادا و همکاران، ۲۰۲۳؛ ایگناتاویچیوتی و همکاران، ۲۰۱۲). در این روش ابتدا ماتریس‌های

$$\mathbf{C} = [c_{x,t}]_{N \times T}, \quad \mathbf{L} = [\ell_{x,t}]_{N \times T}, \quad \mathbf{R} = [r_{x,t}]_{N \times T},$$

محاسبه می‌شوند. اکنون فرض کنید  $\mathbf{U}_C = [u_1, \dots, u_T]'_{T \times 1}$  و  $\mathbf{V}_C = [v_1, \dots, v_N]'_{N \times 1}$  بردارهای ویژه نرمال شده، به ترتیب متناظر با بزرگترین مقادیرهای ویژه ماتریس‌های  $\mathbf{C}'\mathbf{C}$  و  $\mathbf{C}\mathbf{C}'$  باشند. برآوردهای  $B_x$  برای  $x = 1, \dots, N$  و همچنین مقادیر  $\kappa_t$  به صورت

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{B}} &= [\widehat{B}_1, \dots, \widehat{B}_N]' = \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|} \\ \widehat{\boldsymbol{\kappa}} &= [\widehat{\kappa}_1, \dots, \widehat{\kappa}_T]' = \lambda \|\mathbf{V}_A\| \mathbf{U}_A \end{aligned}$$

تعیین می‌شوند، که در آن  $\lambda$  بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $\mathbf{C}\mathbf{C}'$  است. همچنین فرض کنید  $\mathbf{U}_L = [u_1, \dots, u_T]'_{T \times 1}$  و  $\mathbf{V}_L = [v_1, \dots, v_N]'_{N \times 1}$  بردارهای ویژه نرمال شده، به ترتیب متناظر با بزرگترین مقادیرهای ویژه ماتریس‌های  $\mathbf{L}'\mathbf{L}$  و  $\mathbf{L}\mathbf{L}'$  باشند. برآوردهای  $\ell_x^B$  برای  $x = 1, \dots, N$  و همچنین مقادیر  $\kappa_t^\ell$  به صورت

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\ell}}^B &= [\widehat{\ell}_1^B, \dots, \widehat{\ell}_N^B]' = \frac{\mathbf{V}_L}{\|\mathbf{V}_L\|} \\ \widehat{\boldsymbol{\kappa}}^\ell &= [\widehat{\kappa}_1^\ell, \dots, \widehat{\kappa}_T^\ell]' = \lambda^\ell \|\mathbf{V}_L\| \mathbf{U}_L \end{aligned}$$

تعیین می‌شوند، که در آن  $\lambda^\ell$  بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $\mathbf{L}\mathbf{L}'$  است.

در انتها فرض کنید  $\mathbf{U}_R = [u_1, \dots, u_T]'_{T \times 1}$  و  $\mathbf{V}_R = [v_1, \dots, v_N]'_{N \times 1}$  بردارهای ویژه نرمال شده، به ترتیب متناظر با بزرگترین مقادیرهای ویژه ماتریس‌های  $\mathbf{R}'\mathbf{R}$  و  $\mathbf{R}\mathbf{R}'$  باشند. برآوردهای  $r_x^B$  برای  $x = 1, \dots, N$  و همچنین مقادیر  $\kappa_t^r$  به صورت

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{r}}^B &= [\widehat{r}_1^B, \dots, \widehat{r}_N^B]' = \frac{\mathbf{V}_R}{\|\mathbf{V}_R\|} \\ \widehat{\boldsymbol{\kappa}}^r &= [\widehat{\kappa}_1^r, \dots, \widehat{\kappa}_T^r]' = \lambda^r \|\mathbf{V}_R\| \mathbf{U}_R \end{aligned}$$

تعیین می‌شوند و برای حل مسایل بالا از نرم‌افزار پایتون استفاده شده است (سوکادا و همکاران، ۲۰۲۳). اکنون با

<sup>1</sup>Singular Vector Decomposition

جایگذاری

$$\widehat{A}_x = (\widehat{A}_x, \widehat{\ell}_x^A, \widehat{r}_x^A) \in \mathbb{R}^3, \quad \widehat{B}_x = (\widehat{B}_x, \widehat{\ell}_x^B, \widehat{r}_x^B) \in \mathbb{R}^3, \quad \widehat{\kappa}_t = (\widehat{\kappa}_t, \widehat{\ell}_t^{\kappa}, \widehat{r}_t^{\kappa}) \in \mathbb{R}^3,$$

در مدل (۲) مقادیر  $\vec{M}_{x,t}$  به صورت

$$\vec{M}_{x,t} = \widehat{A}_x \oplus \widehat{B}_x \otimes \widehat{\kappa}_t = (\widehat{A}_x + \widehat{B}_x \widehat{\kappa}_t, \widehat{\ell}_x^A + \widehat{\ell}_x^B \widehat{\kappa}_t, \widehat{r}_x^A + \widehat{r}_x^B \widehat{\kappa}_t).$$

برازش می‌شوند. همچنین مقدار فازی  $\widehat{M}_{x,t}$  با استفاده از حساب اعداد فازی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\widehat{M}_{x,t} = (\widehat{A}_x + \widehat{B}_x \widehat{\kappa}_t, e^{\widehat{\ell}_x^A + \widehat{\ell}_x^B \widehat{\kappa}_t}, e^{\widehat{r}_x^A + \widehat{r}_x^B \widehat{\kappa}_t})_{LR}.$$

## ۳.۲ پیش‌بینی مدل لی-کارتر فازی در زمان‌های آتی

توجه کنید که برای برآورد مدل نیاز به تعیین مقادیر  $\widehat{\kappa}_t$  بر اساس ماتریس مشاهدات و در زمان‌های مشاهده شده است، اما به منظور پیش‌بینی نرخ مرگ و میر پویا، لازم است  $\widehat{\kappa}_t$  در زمان آینده پیش‌بینی شود. این پیش‌بینی را می‌توان از یک مدل گام زدن تصادفی با یک چرخش<sup>۱</sup> به صورت

$$\begin{aligned} \widehat{\kappa}_t &= \widehat{\kappa}_{t-1} \oplus \vec{\theta} \oplus \underbrace{(\epsilon_t, \circ, \circ)}_{\vec{\epsilon}_t} \quad t = T+1, T+2, \dots, \\ \epsilon_t &\sim N(\circ, \sigma_\epsilon^2), \quad t = T+1, T+2, \dots, \end{aligned}$$

به دست آورد، که  $\vec{\theta} = (\theta, l^\theta, r^\theta)$  براساس مقادیر  $\widehat{\kappa}_t$  در زمان‌های گذشته، از کمینه کردن تابع خطای

$$\sum_{t=+1}^T \|\vec{\epsilon}_t\|^2 = \sum_{t=+1}^T \|(\widehat{\kappa}_t \ominus \widehat{\kappa}_{t-1}) \ominus \vec{\theta}\|^2 \quad (۳)$$

<sup>۱</sup>Random Walk with a Drift

برآورد می‌شود، که در آن  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی است. می‌توان نشان داد که برای

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} &= \frac{1}{T-1} \bigoplus_{t=+1}^T (\widehat{\kappa}_t \ominus \widehat{\kappa}_{t-1}). \\ &= \left( \underbrace{\frac{1}{T-1} \sum_{t=+1}^T (\widehat{\kappa}_t - \widehat{\kappa}_{t-1})}_{\widehat{\theta}}, \underbrace{\frac{1}{T-1} \sum_{t=+1}^T (\widehat{\ell}^{\kappa_t} - \widehat{\ell}^{\kappa_{t-1}})}_{\widehat{\ell}^{\theta}}, \underbrace{\frac{1}{T-1} \sum_{t=+1}^T (\widehat{r}^{\kappa_t} - \widehat{r}^{\kappa_{t-1}})}_{\widehat{r}^{\theta}} \right), \end{aligned}$$

تابع خطای (۳) کمینه می‌شود. اکنون  $\widehat{\epsilon}_t = \widehat{\kappa}_t \ominus \widehat{\kappa}_{t-1} \ominus \widehat{\theta}$  خطاهای مشاهده شده در زمان‌های گذشته  $t = 1, \dots, T$  هستند. حال باید در معادله

$$\widehat{\kappa}_t = \widehat{\kappa}_{t-1} \oplus \widehat{\theta} \oplus \widehat{\epsilon}_t \quad t = T+1, T+2, \dots$$

یعنی  $\widehat{\epsilon}_t = (\epsilon_t, \circ, \circ)$  در زمان‌های آتی به صورت تصادفی تولید شود،

$$\epsilon_t \sim N(\circ, \widehat{\sigma}_\epsilon^2), \quad t = T+1, T+2, \dots,$$

$$\widehat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=+1}^T (\widehat{\kappa}_t - \widehat{\kappa}_{t-1} - \widehat{\theta})^2.$$

اکنون مقادیر پیش‌بینی در زمان‌های آتی از مدل

$$\widehat{M}_{x,t} = \widehat{A}_x \oplus \widehat{B}_x \otimes \widehat{\kappa}_t, = (\widehat{A}_x + \widehat{B}_x \widehat{\kappa}_t, \widehat{\ell}_x^A + \widehat{\ell}_x^B \widehat{\ell}^{\kappa_t}, \widehat{r}_x^A + \widehat{r}_x^B \widehat{r}^{\kappa_t}),$$

حاصل می‌شوند. همچنین مقدار پیش‌بینی فاز  $\widetilde{M}_{x,t}$  با استفاده از حساب اعداد فازی، در زمان‌های آتی، به صورت  $\widetilde{M}_{x,t} = (\widehat{A}_x + \widehat{B}_x \widehat{\kappa}_t, e^{\widehat{\ell}_x^A + \widehat{\ell}_x^B \widehat{\ell}^{\kappa_t}}, e^{\widehat{r}_x^A + \widehat{r}_x^B \widehat{r}^{\kappa_t}})_{LR}$  به دست می‌آید.

## ۴ معرفی داده‌های مرگ و میر

میزان مرگ و میر و الگوی سنی آن یکی از شاخص‌های توسعه است و جوامع مختلف با اجرای برنامه‌های مختلف بهداشتی و توسعه سعی می‌کنند با کاهش مرگ و میر به سطوح بالای رشد و تعالی برسند. مدل‌سازی و شناخت نحوه تغییرات گذشته مرگ و میر همچنین به امر پیش‌بینی مرگ و میر در آینده کمک می‌نماید. پیش‌بینی میزان‌های مرگ و میر، تأثیرات احتمالی برنامه‌های توسعه و توفیق آن‌ها در زمینه‌ی مرگ و میر را نشان می‌دهند. مطالعه‌ی حاضر

در نظر دارد ابتدا تغییرات مرگ و میر در ایران را در فاصله سالهای ۱۳۸۳ تا ۱۴۰۱ را در استان خوزستان بررسی نموده و با شناخت الگوی تغییرات، در مرحله بعدی، به پیش‌بینی میزان‌های مرگ و میر در سالهای آتی بپردازد. با داشتن میزان‌های مرکزی مرگ و میر به تفکیک گروه‌های سنی (جدول ۱ مربوط به سال ۱۴۰۱ را برای نمونه ببیند) جداول عمر سالانه برازش شده برای دوره ۱۳۸۳ تا ۱۴۰۱ ساخته و این مقادیر برای سال‌های آینده پیش‌بینی خواهد شد. روش‌شناسی این پژوهش در راستای دستیابی به اهداف آن شامل دو مرحله کلی است. در مرحله نخست، داده‌های موجود در زمینه مرگ و میر مورد ارزیابی قرار گرفته تا میزان درستی و اعتبار آنان نتیجه شود. این داده‌ها از منابع مختلف جمعیتی شامل داده‌های سازمان ثبت احوال کشور و آمار و اطلاعات مرکز آمار ایران مانند سرشماری‌ها به دست آمده‌اند. بعد از اطمینان از صحت داده‌های مرگ و میر روند تغییرات مرگ‌ومیر در فاصله سال‌های ۱۳۸۳ تا ۱۴۰۱ مدل‌سازی می‌شود. مرحله دوم روش‌شناسی شامل استفاده از مدل‌های برآورد شده مرگ و میر در مرحله قبلی برای پیش‌بینی میزان‌های مرگ‌ومیر سالهای آتی است. در ادامه این دو مرحله بر اساس روش لی-کارتر فازی اجرا می‌شود. در مرحله مدل‌سازی در روش لی و کارتر از داده‌های میزان‌های مرکزی مرگ‌ومیر به تفکیک گروه‌های سنی  $x$  و زمان  $t$  استفاده می‌شود (جدول ۱). در این روش بجای استفاده مستقیم از میزان‌های مرکزی مرگ و میر از لگاریتم طبیعی این میزان‌ها استفاده می‌شود. دلیل استفاده از لگاریتم این میزان‌ها به جای میزان‌های مرکزی، جلوگیری از ارزش‌های منفی پیش‌بینی شده مرگ و میر است. در این مطالعه لگاریتم نرخ مرگ و میر یک کمیت فازی و غیر دقیق در نظر گرفته شده است.

#### ۴.۱ برآورد پارامترها و خطای برازش

مقادیر برآورد پارامترهای مدل (۲) در جداول ۲ و ۳ ارائه شده است، که در آن

$$1. \quad \widehat{M}_{x,t} = \underbrace{\left( \log(m_{x,t}), \ell_{x,t}^M, r_{x,t}^M \right)}_{M_{x,t}}_{LR} \quad \text{میر در سن } x \text{ و در سال } t.$$

$$2. \quad m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{N_{x,t}} \quad \text{برای هر گروه سنی } x \text{ و سال‌های } 1383, 1384, \dots, 1401.$$

$$3. \quad \ell_{x,t}^M = |M_{x,t}| \times U_{x,t} \quad \text{که در آن } U_{x,t} \sim \text{Uniform}(0,1,0,2) \text{ یک مقدار تصادفی است.}$$

$$4. \quad r_{x,t}^M = |M_{x,t}| \times U'_{x,t} \quad \text{که در آن } U'_{x,t} \sim \text{Uniform}(0,1,0,2) \text{ یک مقدار تصادفی است.}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر برآورد شده  $\widehat{A}_x$ ،  $\widehat{B}_x$ ، و  $\widehat{\kappa}_t$  به ترتیب از جداول ۲ و ۳، در مدل (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{x,t} &= \widehat{A}_x \oplus (\widehat{B}_x \otimes \widehat{\kappa}_t), \\ &= \underbrace{(\widehat{A}_x + \widehat{B}_x \times \widehat{\kappa}_t)}_{\widehat{M}_{x,t}} \underbrace{(\ell_x^A + \ell_x^B \times \ell_t^\kappa)}_{\log(\ell_{x,t}^M)} \underbrace{(r_x^A + r_x^B \times r_t^\kappa)}_{\log(r_{x,t}^M)}. \end{aligned}$$

جدول ۱. داده‌های خام مرگ و میر سال ۱۴۰۱ (استان خوزستان)

سن $x \downarrow$	مرگ کل $D_{x,1401}$	مرگ مردان	مرگ زنان	جمعیت کل $N_{x,1401}$	جمعیت مردان	جمعیت زنان
۴-۰	۸۲۷	۴۵۰	۳۷۷	۵۳۶۲۹۳	۲۷۸۶۷۲	۲۵۷۶۲۱
۹-۵	۱۸۳	۹۸	۸۵	۴۹۶۰۳۴	۲۵۴۶۷۰	۲۴۱۳۶۴
۱۴-۱۰	۲۱۹	۱۲۷	۹۲	۳۶۳۹۲۱	۱۸۸۱۹۷	۱۷۵۷۲۴
۱۹-۱۵	۴۰۷	۳۲۱	۸۶	۲۰۵۶۹۹	۱۰۵۶۶۴	۱۰۰۰۳۵
۲۴-۲۰	۳۲۲	۲۲۲	۹۸	۲۶۹۰۰۰	۱۳۹۵۷۳	۱۲۹۴۲۷
۲۹-۲۵	۴۵۷	۳۳۰	۱۲۷	۴۸۹۹۷۰	۲۴۵۷۴۵	۲۴۴۲۲۵
۳۴-۳۰	۶۱۲	۴۳۱	۱۸۱	۶۲۰۴۶۲	۳۱۳۲۴۶	۳۰۷۲۱۶
۳۹-۳۵	۷۰۴	۴۷۶	۲۲۸	۴۸۵۵۰۸	۲۴۵۰۴۸	۲۴۰۴۶۰
۴۴-۴۰	۷۴۵	۵۱۳	۲۳۲	۳۳۸۲۷۹	۱۷۱۵۱۱	۱۶۶۷۶۸
۴۹-۴۵	۸۳۷	۵۲۴	۳۱۳	۳۰۹۵۹۹	۱۵۸۸۰۳	۱۵۰۷۹۶
۵۴-۵۰	۱۱۱۴	۷۰۴	۴۱۰	۲۱۱۳۳۳	۱۰۷۳۹۶	۱۰۳۹۳۷
۵۹-۵۵	۱۳۳۲	۸۱۴	۵۱۸	۲۰۰۳۶۴	۱۰۳۹۷۶	۹۶۳۸۸
۶۴-۶۰	۱۸۶۷	۱۰۹۶	۷۷۱	۱۶۴۳۲۶	۸۵۶۵۰	۷۸۶۷۶
۶۹-۶۵	۲۳۴۰	۱۳۲۵	۱۰۱۵	۱۰۳۸۴۰	۴۸۱۶۱	۵۵۶۷۹
۷۴-۷۰	۲۲۵۱	۱۱۴۳	۱۱۰۸	۴۳۱۷۴	۱۸۵۲۱	۲۴۶۵۳
۷۵-۷۰	۷۶۰۱	۳۷۹۱	۳۸۱۰	۸۷۱۱۶	۴۶۷۲۰	۴۰۳۹۶

خطای مدل برآورد شده در برازش به داده‌های مشاهده شده عیارت است از

$$\begin{aligned} \frac{1}{N \times T} \|\vec{M} \ominus \widehat{\vec{M}}\|^2 &= \frac{1}{16 \times 19} \sum_{x,t} [(M_{x,t} - \widehat{M}_{x,t})^2 + (\log(\ell_{x,t}^M) - \log(\widehat{\ell}_{x,t}^M))^2 \\ &+ (\log(r_{x,t}^M) - \log(\widehat{r}_{x,t}^M))^2] = ۰,۰۳۱۸ + ۰,۰۷۸۸ + ۰,۰۸۲۷ \\ &= ۰,۱۹۳۴. \end{aligned}$$

در انتها می‌توان  $\widehat{M}_{x,t} = (\log(m_{x,t})_{M_{x,t}}, \ell_{x,t}^M, r_{x,t}^M)_{LR}$  را به صورت

$$\widehat{M}_{x,t} = \left( \underbrace{\widehat{A}_x \oplus \widehat{B}_x \otimes \widehat{\kappa}_t}_{\widehat{M}_{x,t}}, \underbrace{e^{\widehat{\ell}_x^A \oplus \widehat{\ell}_x^B \otimes \widehat{\ell}_t^{\kappa}}}_{\widehat{\ell}_{x,t}^M}, \underbrace{e^{\widehat{r}_x^A \oplus \widehat{r}_x^B \otimes \widehat{r}_t^{\kappa}}}_{\widehat{r}_{x,t}^M} \right)_{LR}$$

محاسبه کرد. خطای مدل برآورد شده در برازش به داده‌های فازی مشاهده شده به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{N \times T} \|\widetilde{M} \ominus \widehat{\widetilde{M}}\|^2 &= \frac{1}{16 \times 19} \sum_{x,t} [(M_{x,t} - \widehat{M}_{x,t})^2 + (\ell_{x,t}^M - \widehat{\ell}_{x,t}^M)^2 + (r_{x,t}^M - \widehat{r}_{x,t}^M)^2] \\ &= ۰,۰۳۱۸ + ۰,۰۵۳۴ + ۰,۰۴۰۳ = ۰,۱۲۵۶. \end{aligned}$$

جدول ۲. برآورد ضرایب سه گانه  $\widehat{B}_x \in \mathbb{R}^3$  و  $\widehat{A}_x \in \mathbb{R}^3$

$\widehat{B}_x = (\widehat{B}_x, \widehat{\ell}^B_x, \widehat{r}^B_x)$	$\widehat{A}_x = (\widehat{A}_x, \widehat{\ell}^A_x, \widehat{r}^A_x)$	سن
(-۲۵/۰, ۲۶/۰, -۰۲/۰)	(-۴۶/۵, -۱۲/۱۱, -۸۸/۱۰)	۴-۰
(-۱۱/۰, ۵۳/۰, ۲۴/۰)	(-۰۳/۷, -۸۸/۱۰, -۷۶/۱۰)	۹-۵
(۱۲/۰, ۲۶/۰, ۱۰/۰)	(-۹۸/۶, -۹۴/۱۰, -۸۹/۱۰)	۱۴-۱۰
(۲۷/۰, -۰۱/۰, -۳۹/۰)	(-۱۹/۶, -۸۷/۱۰, -۰۸/۱۱)	۱۹-۱۵
(۰۶/۰, -۲۸/۰, -۴۸/۰)	(-۰۷/۶, -۸۷/۱۰, -۱۳/۱۱)	۲۴-۲۰
(-۰۵/۰, ۱۰/۰, -۰۶/۰)	(-۱۲/۶, -۰۸/۱۱, -۰۶/۱۱)	۲۹-۲۵
(-۰۵/۰, -۳۷/۰, ۵۷/۰)	(-۰۴/۶, -۸۵/۱۰, -۱۷/۱۱)	۳۴-۳۰
(۰۶/۰, ۱۰/۰, ۴۰/۰)	(-۸۳/۵, -۹۵/۱۰, -۰۹/۱۱)	۳۹-۳۵
(۱۳/۰, ۰۶/۰, -۵۶/۰)	(-۵۱/۵, -۰۵/۱۱, -۹۷/۱۰)	۴۴-۴۰
(۰۲/۰, ۱۵/۰, ۰۶/۰)	(-۱۱/۵, -۰۵/۱۱, -۱۵/۱۱)	۴۹-۴۵
(۱۰/۰, -۲۱/۰, -۳۱/۰)	(-۵۹/۴, -۱۵/۱۱, -۳۴/۱۱)	۵۴-۵۰
(-۰۰/۰, -۱۰/۰, ۳۲/۰)	(-۱۳/۴, -۳۴/۱۱, -۳۰/۱۱)	۵۹-۵۵
(۰۳/۰, -۰۸/۰, ۴۳/۰)	(-۶۳/۳, -۵۲/۱۱, -۵۳/۱۱)	۶۴-۶۰
(۱۷/۰, ۱۲/۰, ۰۲/۰)	(-۱۳/۳, -۶۶/۱۱, -۶۱/۱۱)	۶۹-۶۵
(۳۷/۰, ۰۸/۰, ۴۷/۰)	(-۶۳/۲, -۷۴/۱۱, -۸۸/۱۱)	۷۴-۷۰
(۰۹/۰, ۳۹/۰, ۲۰/۰)	(-۷۹/۱, -۲۱/۱۲, -۱۴/۱۲)	۱۰۰-۷۵

### ۴.۲ پیش‌بینی لگاریتم متوسط نرخ مرگ و میر در سال‌های آتی

برای پیش‌بینی لگاریتم متوسط نرخ مرگ و میر در ۵ سال آتی، یعنی سال‌های ۱۴۰۲ تا ۱۴۰۶، ابتدا مقادیر  $\widehat{\theta}$  ( $\widehat{\theta}, \widehat{\ell}^\theta, \widehat{r}^\theta$ ) و  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  بر اساس نتایج جدول ۳، به صورت

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{18} \sum_{t=1384}^{t=1401} (\widehat{\kappa}_t - \widehat{\kappa}_{t-1}) = 0,2225, \quad \widehat{\ell}^\theta = \frac{1}{18} \sum_{t=1384}^{t=1401} (\widehat{\ell}^{\kappa}_t - \widehat{\ell}^{\kappa}_{t-1}) = -0,0113$$

$$\widehat{r}^\theta = \frac{1}{18} \sum_{t=1384}^{t=1401} (\widehat{r}^{\kappa}_t - \widehat{r}^{\kappa}_{t-1}) = 0,0613, \quad \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{18} \sum_{t=1384}^{t=1401} (\widehat{\kappa}_t - \widehat{\kappa}_{t-1} - \widehat{\theta})^2 = 0,5635$$

محاسبه می‌شوند. سپس گام‌های زیر تکرار می‌شود:

۱. قرار دهید  $t = 1402$ .

۲. مقدار  $\varepsilon_t \sim N(0, 0,5635)$  را تولید کنید.

۳. قرار دهید  $\widehat{\kappa}_t = \widehat{\kappa}_{t-1} \oplus (0,2225, -0,0113, 0,0613) \oplus (\varepsilon_t, 0, 0)$

۴. پیش‌بینی فازی را به صورت زیر محاسبه کنید

$$\widehat{M}_{x,t} = (\widehat{A}_x + \widehat{B}_x \widehat{\kappa}_t, e^{\widehat{\ell}_x^A + \widehat{\ell}_x^B \widehat{\ell}^{\kappa}_t}, e^{\widehat{r}_x^A + \widehat{r}_x^B \widehat{r}^{\kappa}_t})_{LR}, \quad x = 1, \dots, N.$$

۵. قرار دهید  $t + 1$  اگر  $t \leq 1406$  باشد، گام‌های ۲ تا ۵ را تکرار کنید.

جدول ۳. مقادیر برآورد شده  $\widehat{\bar{K}}_t \in \mathbb{R}^3$

سال تقویمی	$\widehat{\bar{K}}_t = (\widehat{K}_t, \widehat{L}_t, \widehat{r}_t)$	$\widehat{K}_t - \widehat{K}_{t-1}$	$\widehat{K}_t - \widehat{K}_{t-1} - \widehat{\theta}$
۱۳۸۳	(-۹۶/۰ ، ۶۶/۰ ، -۰۸/۲)	×	×
۱۳۸۴	(-۹۹/۰ ، ۶۲/۲ ، ۴۱/۰)	-۰۲۸/۰	-۲۵/۰
۱۳۸۵	(-۸۸/۰ ، ۱۶/۰ ، -۳۷/۰)	۱۰۳/۰	-۱۱/۰
۱۳۸۶	(-۷۴/۰ ، ۲۰/۲ ، -۲۴/۰)	۱۴۴/۰	-۰۷/۰
۱۳۸۷	(-۲۱/۱ ، -۵۶/۱ ، ۸۲/۰)	-۴۷۱/۰	-۶۹/۰
۱۳۸۸	(-۳۷/۱ ، ۰/۱ ، ۹۷/۱)	-۱۶۳/۰	-۳۸/۰
۱۳۸۹	(-۶۳/۰ ، -۱۹/۳ ، -۹۲/۲)	۷۴۷/۰	۵۲/۰
۱۳۹۰	(-۵۶/۱ ، -۹۴/۱ ، -۲۹/۰)	-۹۳۱/۰	-۱۵/۱
۱۳۹۱	(-۸۹/۰ ، -۹۲/۳ ، -۶۶/۲)	۶۶۶/۰	۴۴/۰
۱۳۹۲	(-۶۸/۰ ، ۷۵/۰ ، -۶۲/۰)	۲۱۱/۰	-۰/۱
۱۳۹۳	(-۶۷/۰ ، -۴۸/۲ ، ۳۱/۰)	۰/۲	-۲۰/۰
۱۳۹۴	(-۰۳/۱ ، ۵۹/۳ ، -۲۲/۱)	-۳۶۷/۰	-۵۸/۰
۱۳۹۵	(-۲۳/۰ ، ۰۹/۳ ، ۲۹/۱)	۸۰۵/۰	۵۸/۰
۱۳۹۶	(۰۶/۰ ، ۲۹/۲ ، ۶۱/۲)	۲۹۴/۰	۰/۷
۱۳۹۷	(۳۱/۰ ، -۵۶/۱ ، ۹۶/۱)	۲۵۴/۰	۰/۳
۱۳۹۸	(۰/۱ ، ۸۴/۴ ، ۰۳/۱)	۶۹۴/۰	۴۷/۰
۱۳۹۹	(۱۷/۳ ، -۵۷/۴ ، ۸۶/۲)	۱۶۳/۲	۹۴/۱
۱۴۰۰	(۲۷/۴ ، -۹۲/۰ ، -۷۱/۱)	۱۰۲/۱	۸۸/۰
۱۴۰۱	(۰۴/۳ ، -۰۷/۰ ، -۱۴/۱)	-۲۳۳/۱	-۴۵/۱

مقادیر پیش‌بینی‌های فازی لگاریتم نرخ مرگ و میر برای سال‌های ۱۴۰۲ تا ۱۴۰۶ در جدول ۴ آمده است.

## بحث و نتیجه‌گیری

رویکرد فازی امکان پرداختن به موضوع عدم قطعیت امکانی را با در نظر گرفتن توابع عضویت در ساختارهای فازی مدل (مانند پارامترها، مشاهدات و روابط فازی) فراهم می‌کند. به روشنی مشهود است که آمار مرگ و میر در معرض انواع اشتباهات و خطاهای ثبتي گزارش می‌شود. آمارهای اشتباه ممکن است برای سال، منطقه، یا ویژگی‌های نادرست و جابجا، به عنوان مثال، جنسیت یا سن، گزارش شوند. علاوه بر این، داده‌های جمعیت ممکن است مربوط به اواسط سال باشند، که این مقادیر خود نیز موضوع خطا هستند، زیرا هنوز نیمی از مشاهدات مرگ و میر هنوز رخ نداده‌اند. چنین خطاهایی اغلب منجر به بیش‌برآوردی و یا کم‌برآوردی مقادیر پارامترها می‌شوند. بنابراین، نرخ دقیق مرگ و میر به ندرت شناخته شده است، از این رو ثبت و ترکیب داده‌های فازی در مدل موجه به نظر می‌رسد. بنابراین در این مقاله یک تعمیم فازی از مدل لی-کارتر بیان شد که برای پیش‌بینی در زمان‌های آتی از یک مدل سری زمانی-تصادفی فازی استفاده کرد. سپس به تحلیل نتایج مدل‌بندی داده‌های مرگ و میر در استان خوزستان طی سال‌های ۱۳۸۳ تا ۱۴۰۱ پرداخته شد و مقادیر نرخ مرگ و میر در ۵ سال بعد از آن توسط یک مدل سری زمانی تصادفی پیش‌بینی شد. مدل پیشنهادی می‌تواند در زمینه‌هایی مانند اموگرافی، علوم اکچوئری، اقتصاد، امور مالی، اپیدمیولوژی، زیست‌شناسی، پزشکی یا جامعه‌شناسی کاربردهای زیادی داشته باشد. همچنین مدیران دولتی





- Chachi, J., Kazemifard, A. and Jalalvand, M. (2021), A Multi-Attribute Assessment of Fuzzy Regression Models, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **18**(4), 131-148.
- Chachi, J., Taheri, S. M. and D'Urso, P. (2022), Fuzzy Regression Analysis Based on M-Estimates, *Expert Systems with Applications*, **187**, 115891.
- D'Urso, P. and Chachi, J. (2022), OWA Fuzzy Regression, *International Journal of Approximate Reasoning*, **142**, 430-450.
- Ferraro, M. B. (2017). On the Generalization Performance of a Regression Model with Imprecise Elements, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **25**(5), 723-740.
- Ignataviciute, E., Mikalauskaite-Arminiene, R. and Siaulys, J. (2012), Lee-Carter Mortality Forecasting, *Lithuanian Journal of Statistics*, **51**(1), 22-35.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R. and Taylor, J. (2023), *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in Python*, Cham: Springer International Publishing.
- Kazemifard, A. and Chachi, J. (2022), MADM Approach to Analyse the Performance of Fuzzy Regression Models, *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, **13**(8), 4019-4031.
- Koissi, M. C. and Shapiro, A. F. (2006), Fuzzy Formulation of the Lee-Carter Model for Mortality Forecasting, *Insurance: Mathematics and Economics*, **39**(3), 287-309.
- Krätschmer, V. (2001), A Unified Approach to Fuzzy Random Variables, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**, 1-9.
- Kruse, R. and Meyer, K. D. (1987), *Statistics with Vague Data*. Springer Science & Business Media.
- Lee, R. D. (2000), The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications, *North American Actuarial Journal*, **1**(4), 80-91.

- Lee, R. D. and Carter, L. R. (1992), Modeling and Forecasting U.S. Mortality, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **419** (87), 659-675.
- Shmueli, G. and Polak, J. (2024), *Practical Time Series Forecasting with R: A Hands-on Guide*, Axelrod schnall publishers.
- Szymanski, A. and Rossa, A. (2021), The Modified Fuzzy Mortality Model Based on the Algebra of Ordered Fuzzy Numbers, *Biometrical Journal*, **63**(3), 671-689.
- Tsukada, M., Kobayashi, Y., Kaneko, H., Takahasi, S. E., Shirayanagi, K. and Noguchi, M. (2023), *Linear Algebra with Python*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, Springer, Singapore.
- Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 338-353.
- Zarei, R., Akbari, M. G. and Chachi, J. (2020), Modeling Autoregressive Fuzzy Time Series Data Based on Semi-Parametric Methods, *Soft Comput*, **24**, 7295-7304.
- Zimmermann, H. J. (2011), *Fuzzy Set Theory-and Its Applications*, Springer Science and Business Media.