مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۷

جلد ۲، شماره ۲، ص ۱۴۹-۱۶۲

خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای تصویر طرح پلاکت-برمن ۱۲ اجرایی

نبز اسمعیل‌زاده، هوشنگ طالبی

گروه آمار، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۰/۱۰ **تاریخ آخرین بازنگری:** ۱۳۸۷/۱۲/۱۸

چکیده : طرح‌های پلاکت-برمن در ادبیات مربوط به طرح به عنوان طرح‌های کسری نامنظم اشباع شده برای غربال‌کردن عامل‌های فعال شناخته می‌شدند. در دو دهه اخیر با معرفی تصویر پنهان این طرح ظرفیت آنها در برآورد اثرات متقابل دو عاملی توسط محققین متعددی مطالعه و ارایه شده است. در این تحقیق با استفاده از اصل تنک بودن اثرات قابلیت‌های جدید این طرح در شناسایی و برآورد اثرات متقابل سه عاملی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور طرح کاوش پسا مرحله‌ای معرفی شده است. این طرح امکان شناسایی و برآورد یک اثر متقابل سه عاملی را همراه با برآورد اثرات اصلی و اثرات متقابل دو عاملی که در مرحله قبل به عنوان اثرات فعال شناخته شده‌اند فراهم می‌آورد. نشان داده شده است که تصویر طرح پلاکت-برمن با ۱۲ اجرا روی ۴ و ۵ عامل یک طرح پسا مرحله‌ای است.

واژه‌های کلیدی : طرح پلاکت-برمن، طرح کاوش، تصویر یک طرح.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: هوشنگ طالبی، h-talebi@sci.ui.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲K۱۵

۱ مقدمه

در آزمایش‌های 2^m برای صرفه‌جویی در تعداد مشاهدات و در نتیجه هزینه‌ها ابتدا با اجرای کسری از ترکیبات تیماری عامل‌های فعال از میان تمامی عامل‌های مورد مطالعه غربال می‌شوند. غربال‌سازی عامل‌ها در طرح‌های کسری با فرض صفربودن تمامی اثرات متقابل انجام می‌گیرد. پس از تعیین عامل‌های فعال با اجرای آزمایش‌های جدید یا با استفاده از داده‌های آزمایش‌های اولیه جزئیات دقیق‌تری از جمله بررسی اثرات متقابل، که در آزمایش اولیه صفر فرض شده بودند، روی عامل‌های فعال انجام می‌شود. محدود کردن آزمایش به زیر مجموعه‌ای از عامل‌ها را تصویر طرح روی آن عامل‌ها گویند. طرح‌های کسری را به دو دسته منظم و نامنظم تقسیم کرده‌اند. طرح‌های منظم، کسری از ترکیبات تیماری هستند که با تعیین روابط معرف[۱] بدست می‌آیند. طرح‌های کسری که از این ویژگی برخوردار نباشند را طرح‌های نامنظم گویند. طرح‌های پلاکت-برمن[۲] (PB) (پلاکت و برمن، ۱۹۴۶) نمونه‌ای از این طرح‌ها هستند، که با N اجرا به عنوان طرح‌های اشباع شده برای غربال کردن $m = N - 1$ عامل مورد استفاده قرار می‌گیرند. تصویر طرح‌های کسری را در طرح‌های منظم تصویر هندسی گویند که با مفهوم وضوح[۳] هم معنی است. تصویر در طرح‌های نامنظم را تصویر پنهان[۴] (وانگ و وو، ۱۹۹۵) می‌نامند. در دهه گذشته برخی مزیت‌های جدید طرح‌های PB که نشان از ظرفیت بالای این طرح برای برآورد اثرات متقابل دو عاملی است، توسط محققین بدست آمده است. این ویژگی طرح، مربوط به ساختار هم‌اثری[۵] اثرات، که نوعی هم‌اثری جزئی است، می‌شود. در این نوع هم‌اثری، برخلاف هم‌اثری در طرح‌های کسری منظم که ضرایب صفر یا یک هستند، ضرایب هم اثری بین صفر و یک هستند. هامادا و وو (۱۹۹۲) نشان دادند که می‌توان از داده‌های آزمایش اولیه با اجرای این طرح‌ها ، برای برآورد اثرات اصلی و تعدادی از اثرات متقابل دو عاملی، وقتی که طرح روی

[۱] Defining Relations
[۲] Plackett-Burman
[۳] Resolution
[۴] Hidden Projection
[۵] Aliasing

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

زیر مجموعه‌ای از عامل‌های فعال تصویر شود، استفاده کرد. باید توجه داشت که براساس اصل تنک بودن اثرات[۶] معمولاً تعداد اثرات اصلی و متقابل معنی‌دار اندک هستند. حال ماتریس طرح پلاکت–برمن با ۱۲ اجرا (PB12) را، که در ۱۱ ستون اول جدول ۱ با علایم + و − داده شده است، در نظر بگیرید. مسئله تصویر PB12، خواص مربوط به تعامد اثرات و همچنین ظرفیت برآورد اثرات توسط محققین متعددی از جمله لین و دراپر (۱۹۹۲)، وانگ و وو (۱۹۹۵) و میلر و سیتر (۲۰۰۴) مورد مطالعه قرار گرفته است.

جدول ۱: طرح پلاکت–برمن با ۱۲ اجرا.

مشاهدات	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۸/۵۶۷۴	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
−۲۴/۶۶۵۶	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	−
۹/۱۲۵۳	−	+	−	−	+	+	+	−	−	−	+
۷۷/۲۸۷۷	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+
۲۳/۸۵۳۵	−	−	+	−	−	+	−	−	+	+	+
۰/۱۹۰۹	−	+	−	−	+	−	−	+	+	+	−
۸۰/۱۸۹۲	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+
۱۴/۹۶۲۴	−	−	−	+	−	+	+	+	+	+	−
۵۹/۳۲۷۳	−	−	+	+	+	−	+	−	+	−	−
۳۵/۱۷۴۶	−	+	+	+	−	−	−	+	−	−	+
۳۶/۸۱۳۳	+	+	+	−	−	−	+	−	−	+	−
−۳۶/۲۷۴۲	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−

دو طرح را هم ارز ترکیبیاتی[۷] گویند هرگاه یکی را بتوان از دیگری با جابجایی سطرها، ستون‌ها یا تغییر علامت یک یا چند ستون بدست آورد. طرح PB12 را روی $m < ۱۱$ عامل تصویر می‌کنیم. سان و همکاران (۲۰۰۲) نشان دادند برای $m = ۴$ و $۷ \le m < ۱۱$ فقط یک رده از طرح‌های هم ارز ترکیبیاتی وجود دارد، در حالی‌که برای $m = ۵,۶$ دقیقاً دو رده وجود دارند. طرح‌های ساخته شده از تصویر ستون‌های ۱ تا ۵ ($PB12_{۵,۱}$) در جدول ۱ غیرهم ارز با طرح‌های ساخته شده از

[۶] Sparsity Principle of Effects

[۷] Combinatorial Isomorphic

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

ستون‌های ۷ تا ۱۱ ($PB12_{۵.۲}$) هستند. هم‌ارز بودن طرح‌های تصویر شده بررسی ویژگی‌های این طرح‌ها را آسان‌تر می‌کند. در حقیقت طرح‌های هم ارز خواص آماری و ظرفیت یکسانی در برآورد پارامترهای مدل تحت بررسی دارند.
برای تصویر روی $m = ۴$ عامل، $PB12_{۴}$، هامادا و وو (۱۹۹۲) نشان دادند که با طرح‌های بدست آمده در این رده هم‌ارزی می‌توان علاوه بر برآورد اثرات اصلی تمامی شش اثر متقابل بین هر دو عامل را برآورد کرد. میلر و سیتر (۲۰۰۴) ظرفیت برآورد[۸] در تصویر روی $m = ۵$ عامل را مطالعه کردند و نشان دادند که با طرح‌های در دو رده هم‌ارزی می‌توان علاوه بر پنج اثر اصلی، تعدادی از اثرات متقابل دو عاملی را برآورد کرد. با طرح‌های هم‌ارز در $PB12_{۵.۱}$ و $PB12_{۵.۲}$ می‌توان به ترتیب تا پنج و شش اثر متقابل دو عاملی را به همراه تمامی اثرات اصلی برآورد کرد. برای جزئیات بیشتر و همچنین ظرفیت برآورد اثرات اصلی و متقابل دو عاملی در مورد تصویر روی ۵ و ۶ عامل می‌توان به میلر و سیتر (۲۰۰۴، جدول ۳) مراجعه نمود.

در همه این مطالعات فرض شده است اثرات متقابل سه عاملی و مراتب بالاتر صفرند. بدیهی است در صورت وجود تنها یک اثر متقابل غیر صفر از این مجموعه، اثرات برآورد شده اریب هستند. این در حالی است که بر اساس اصل تنک بودن تنها تعداد محدودی از اثرات متقابل دو عاملی غیر صفرند و در این صورت نیازی به برآورد تمامی یا تعداد زیادی از آنها نیست. این واقعیت می‌تواند محقق را به مطالعه قابلیت برآورد تعداد اندکی از اثرات متقابل، احتمالاً غیر صفر، مرتبه بالاتر با رعایت اصل سلسله مراتبی[۹]، ترغیب نماید. این در حالی است که با توجه به ثابت نگه داشتن N و در نتیجه محدودیت درجه آزادی باید ظرفیت برآورد طرح به تعداد کمتری از اثرات متقابل دو عاملی محدود شود. این نکته را نیز باید مد نظر داشت که اثرات متقابل دو و سه عاملی غیر صفر از پیش تعیین شده نیستند. از این رو مسئله جدید در این تحقیق بررسی قابلیت طرح PB در شناسایی و ظرفیت برآورد اثرات متقابل سه عاملی همراه با زیر مجموعه‌ای از اثرات متقابل دو عاملی و تمامی اثرات اصلی است. در این مقاله به طرحی که قادر به حل این مسئله باشد پرداخته،

۸ Estimation Capacity
۹ Hierachical Principle of Effects

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

آن را طرح کاوش پسا مرحله‌ای[۱۰] نامیده و نشان خواهیم داد که تصویرهای طرح PB12 روی m برابر ۴ و ۵ عامل طرح‌های کاوش پسا مرحله‌ای هستند. طرح‌های کاوش را ابتدا سریواستاوا (۱۹۷۵) معرفی کرد و جزئیات بیشتر آنها در بخش ۲ خواهد آمد. در بخش ۳ مسئله کاوش و برآورد اثرات سه عاملی را همراه با برآورد اثرات فعال اصلی و متقابل دو عاملی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش آخر نیز به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته خواهد شد.

۲ طرح کاوش

برای بردار مشاهدات $y(N \times 1)$ مدل خطی

$$y = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + e, \quad Var(e) = \sigma^2 I, \tag{1}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $A_1(N \times \nu_1)$ و $A_2(N \times \nu_2)$ ماتریس‌های معلوم طرح، $\xi_1(\nu_1 \times 1)$ و $\xi_2(\nu_2 \times 1)$ بردار پارامترها و $e(N \times 1)$ بردار خطا و I ماتریس همانی است. فرض می‌کنیم بردار ξ_1 شامل میانگین عمومی و اثراتی است که در هر حالت می‌خواهیم آنها را برآورد کنیم و ξ_2 شامل اثرات نامعلومی است که تنها تعداد اندکی از آنها غیر صفر هستند. همچنین فرض می‌کنیم حداکثر k تا از این اثرات، که نمی‌دانیم کدام یک، غیر صفر باشند. k نسبت به ν_2 کوچک است. مسئله برآورد پارامترهای بردار ξ_1 همراه با شناسایی و برآورد k پارامتر غیر صفر بردار ξ_2 است. طرحی که قادر به حل این مسئله باشد تحت عنوان طرح کاوش[۱۱] توسط سریواستاوا (۱۹۷۵) معرفی و مدل (۱) نیز مدل خطی کاوش نامیده شده است.

قضیه ۱ (سریواستاوا، ۱۹۷۵): فرض کنید مدل (۱) بدون اغتشاش، یعنی $\sigma^2 = 0$ باشد. طرح T یک طرح کاوش است اگر و تنها اگر برای هر زیر ماتریس $A_{22}(N \times 2k)$ از A_2 داشته باشیم

$$rank[A_1; A_{22}] = \nu_1 + 2k. \tag{2}$$

---
[۱۰] Post-Stage

[۱۱] Search Design

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

اگر چه حالت $\sigma^۲ = ۰$ در عمل هرگز اتفاق نمی‌افتد، با این وجود قضیه ۱ در ساختن طرح‌های کاوش از اهمیت زیادی برخوردار است. در حقیقت شرط (۲) در حالت $\sigma^۲ > ۰$ (اغتشاش) نیز یک شرط لازم است. بنابراین در این مقاله منظور از طرح کاوش طرحی است که شرط (۲) برای آن برقرار باشد. حال اگر $\binom{\nu_۲}{k}$ زیر مدل‌های ممکن از مدل (۱) که شامل بردار $\xi_۱$ و k تا از پارامترهای بردار $\xi_۲$ باشند را در نظر بگیرید، شرط (۲) تحت شرایط قضیه ۱ ما را قادر به برآورد پارامترها و تمایز بین هر دو مدل از رده مدل‌های ممکن می‌سازد. بنابراین یک طرح کاوش، قادر به کاوش و شناسایی مدل درست، شامل k اثر غیر صفر $\xi_۲$ و سپس برآورد آنها همراه با اثرات بردار $\xi_۱$ است. در حالت $\sigma^۲ > ۰$، سریواستاوا از مجموع توان‌های دوم خطای (SSE) مدل‌ها برای شناسایی مدل درست استفاده کرد. برای این منظور در فرایند کاوش، مجموع توان‌های دوم خطای تمامی $\binom{\nu_۲}{k}$ مدل ممکن محاسبه و مدل دارای کمترین مقدار SSE به عنوان مدل درست انتخاب می‌شود.

حال تصویر PB12 روی ۴ ستون را در نظر بگیرید. همه $\binom{۱۱}{۴} = ۳۳۰$ طرح با طرح ایجاد شده از تصویر ۴ ستون اول جدول ۱ هم‌ارز هستند. حال فرض کنید در مدل (۱) بردار $\xi_۱$ شامل میانگین عمومی و اثرات اصلی و بردار $\xi_۲$ شامل اثرات متقابل دو و سه عاملی باشد. در این طرح‌ها، شرط (۲) با $\nu_۱ = ۵$ و $k = ۱,۲$ برقرار است. اثباتی ساده از برقراری شرط (۲) در طالبی و اسمعیل‌زاده (۲۰۱۰) آمده است. برای $m = ۵$، رده طرح‌های هم ارز با $\text{PB12}_{۵.۱}$ طرح کاوش برای $k = ۱$ هستند. همچنین اگر بردار $\xi_۲$ را فقط محدود به اثرات متقابل دو عاملی کنیم، طرح‌های هم ارز $(\text{PB12}_{۵.۲})$ طرح کاوش برای $k = ۱$ هستند. در همین حالت برای $m = ٦$، تمامی طرح‌های هم ارز با طرح حاصل از تصویر روی ستون‌های ۶ تا ۱۱ طرح کاوش برای $k = ۱$ هستند. برنامه‌ای در محیط نرم افزار MATLAB برای بررسی شرط (۲) در ضمیمه آمده است.

۳ خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای تصویر PB12

حل مسئله کاوش در مرحله سوم، که آن را پسا مرحله‌ای می‌نامیم، پس از طی دو مرحله غربال‌سازی و سپس تعیین اثرات متقابل دو عاملی فعال در مرحله دوم انجام

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

می‌شود. توجه داشته باشید که در هیچ یک از مراحل قبلی اثر اصلی و متقابل خاصی از قبل تعیین نشده است. در حقیقت، در هر مرحله نوعی کاوش برای تشخیص اثرات مهم همراه با برآورد آنان صورت می‌گیرد. در همه این مراحل برآورد اثرات با رعایت اصل‌های سلسله مراتبی و توارث اثرات[۱۲] انجام می‌پذیرد. حال، خاصیت کاوش و برآورد در پسا مرحله‌ای را برای طرح‌های تصویر $PB12_{۴}$ و $PB12_{۵،۱}$ بررسی می‌کنیم.

حالت ۴ $m=$: فرض کنید در مرحله غربال‌کردن چهار عامل از ۱۱ عامل به‌عنوان عوامل فعال شناسایی شوند. می‌دانیم که تصویر PB12 روی هر ۴ ستون تشکیل یک رده از طرح‌های هم‌ارز را می‌دهند. بنابراین، این که کدام یک از چهار عامل فعال باشند و PB12 را روی ۴ ستون مربوط به آنها تصویر کنیم از نظر خواص طرحی تفاوتی نمی‌کند. در مرحله دوم اثرات اصلی و اثرات متقابل دو عاملی بین این ۴ عامل را در نظر می‌گیریم. نشان داده شده است که تمامی $\binom{۴}{۲} = ۶$ اثر متقابل دو عاملی به شرط قابل اغماض بودن اثرات متقابل سه عاملی و بالاتر، قابل برآورد هستند. برای اثبات این موضوع می‌توان از نتایج کلی چانگ (۱۹۹۵) در مورد تصویر طرح‌های ۲^m متعامد نیز استفاده کرد. پس ظرفیت برآورد طرح $PB12_{۴}$ در این حالت کامل است. اگر چه با این نتیجه می‌توان همه اثرات متقابل دو عاملی را برآورد کرد، اما با توجه به اصل تنک بودن، به دلیل صفر بودن تعدادی از آنها لزومی به برآورد تمامی آنها نیست. از سوی دیگر از میان اثرات متقابل سه عاملی ممکن است حداقل یک اثر غیر صفر باشد. کاوش پسا مرحله‌ای در اینجا به این معنی است که در ازای آزادسازی تعدادی درجه آزادی به دلیل صفر بودن تعدادی از اثرات متقابل دو عاملی می‌توان اثر یا اثرات متقابل سه عاملی غیر صفر را کاوش و برآورد کرد. طرحی که از عهده انجام کاوش پسا مرحله‌ای برآید را طرح کاوش پسا مرحله‌ای گویند. به عبارتی دیگر، فرض کنید $\xi_{۲i}$ و $\xi_{۳j}$ مجموعه‌ای شامل t و k اثر به ترتیب از اثرات متقابل دو عاملی و سه عاملی و $A_{۲i}$ و $A_{۲j}$ ستون‌های مربوط به آنها در ماتریس مدل $A_{۲}$ در (۱) باشند. شرط کاوش پسا مرحله ای در قالب رابطه (۲) به شرح زیر است.

[۱۲] Heredity Principle of Effects

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

تعریف ۱ : یک طرح را طرح کاوش پسا مرحله‌ای گویند هر گاه برای آن رابطه

$$rank[A_۱; A_{۲i}; A_{۳j}] = m + ۱ + t + ۲k, i = ۱, \dots, \binom{w_۲}{t}, j = ۱, \dots, \binom{w_۳}{k}, \quad (۳)$$

برقرار باشد، که در آن $w_۲ = \binom{m}{۲}$ و $w_۳ = \binom{m}{۳}$.

اگر $k = ۱$ فرض شود می‌توان نشان داد برای $t \geq ۴$ شرط (۳) برای $\mathrm{PB12}_۴$ برقرار نیست. برای حالت $t < ۴$ قضیه و نتایج زیر برقرار است.

قضیه ۲ : طرح $\mathrm{PB12}_۴$ یک طرح کاوش پسا مرحله‌ای برای $t = ۳$ است.
برهان برای اثبات باید نشان داده شود رابطه (۳) برای $A_۱$، هر زیر ماتریس $A_{۲i}(۱۲ \times ۳)$ از $A_۲$ مربوط به ستون‌های اثرات متقابل دو عاملی و هر زیر ماتریس $A_{۳j}(۱۲ \times ۲)$ از ستون‌های اثرات متقابل سه عاملی در $A_۲$ برقرار است. تعداد حالات ممکن در این قضیه برابر با $\binom{۶}{۳} \times \binom{۴}{۲}$ است. با استفاده از برنامه نویسی کامپیوتری این حالات کنترل و برقراری رابطه (۳) قابل دسترسی است و اثبات کامل است.

فرع ۱ : قضیه برای $t < ۳$ برقرار است.

فرع ۲ : اگر $t \leq ۲$ و $\xi_{۳j}$ بردار پارامترهای اثرات سه عاملی و بالاتر باشد برای $k = ۱$ رابطه (۳) برقرار است.

حالت ۵ = m: طرح تصویر $\mathrm{PB12}_{۵.۱}$ را در نظر بگیرید. میلر و سیتر (۲۰۰۴) نشان دادند، طرح‌های هم ارز این رده قادرند تمامی اثرات را در مدل‌هایی که شامل کلیه اثرات اصلی همراه با هر سه اثر متقابل دو عاملی باشند، برآورد نمایند. نشان می‌دهیم که $\mathrm{PB12}_{۵.۱}$ دارای خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای برای یک اثر $(k = ۱)$ متقابل سه عاملی، برای $t = ۳$، است. برای این منظور باید نشان داد رابطه (۳) برای این طرح نیز برقرار است. برقراری این شرط با استفاده از برنامه نوشته شده در نرم افزار MATLAB قابل حصول است. پس قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۳ : طرح $\mathrm{PB12}_{۵.۱}$ یک طرح کاوش پسا مرحله‌ای برای $t = ۳$، وقتی $k = ۱$، است.

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]

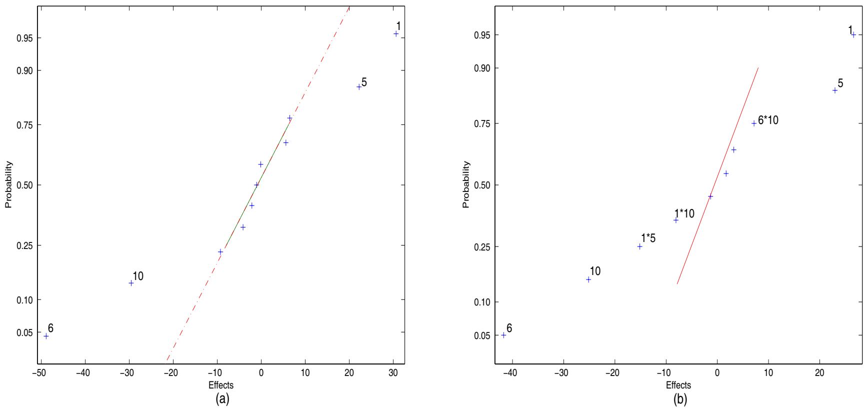
فرع ۱ نیز در اینجا صادق است. در ادامه به منظور تشریح نتایج مربوط به خاصیت طرح پلاکت-برمن مثالی می‌آوریم. این مثال برای $m = ۴$ وقتی سه اثر متقابل دو عاملی، که از قبل تعیین نشده باشند، غیر صفرند ارایه شده است.

مثال ۱ : ستون مشاهدات ساختگی و شبیه‌سازی شده براساس ماتریس طرح جدول ۱ را در نظر بگیرید. این داده ها به نحوی ساخته شده‌اند که ۴ عامل، ۳اثر متقابل ۲-عاملی و حداقل یک اثر متقابل ۳-عاملی، معنی‌دار (غیر صفر) باشند. برآورد اثرات اصلی ۱ تا ۱۱ به ترتیب برابر ۳۰/۶۵، ۶/۴۷، ۲/۱۵-، ۹/۲۹-، ۲۲/۲۴، ۴۸/۹۱-، ۴/۱۵-، ۵/۵۹، ۱/۰۷-، ۲۹/۵۶- و ۰/۱۲- است. از نمودار احتمال نرمال اثرات شکل ۱(a) مشاهده می‌شود که اثرات اصلی ۱، ۵، ۶ و ۱۰ اثرات فعال هستند. در مر حله دوم، با استفاده از نمودار احتمال نرمال شکل ۱(b)، برای اثرات فعال و اثرات متقابل دو عاملی متناظر آنها، اثرات ۵×۱، ۱۰×۱ و ۱۰×۶ به عنوان سه اثر متقابل دو عاملی فعال، شناسایی می‌شوند. حال از قضیه ۲ می‌توان وجود یک اثر متقابل سه عاملی غیر صفر را کاوش و شناسایی کرد. در این مرحله، مدل شامل اثر متقابل ۱۰×۶×۱، دارای کمترین SSE است، پس فرایند کاوش سریواستاوا مدل زیر را به عنوان مدل درست انتخاب می‌کند:

$$\begin{aligned} y &= ۲۳/۱ + ۱۳/۹x_۱ + ۱۰/۱x_۵ - ۲۰/۵x_۶ - ۱۱/۸x_{۱۰} - ۸/۸۱x_۱x_۵ \\ &\quad -۳/۱۹x_۱x_{۱۰} + ۴/۲۵x_۶x_{۱۰} + ۱/۹۰x_۱x_۶x_{۱۰}. \end{aligned}$$

تذکر ۱ : مثال ۱ خاصیت مهمی را در طرح پلاکت-برمن روشن می‌سازد. یعنی، اگر به جای ۴ عامل ۱، ۵، ۶ و ۱۰ هر چهار عامل دیگر یا هر سه اثر متقابل دو عاملی دیگر به همراه یک اثر متقابل سه عاملی در مدل منظور شوند ماتریس مدل پررتبه است. این خاصیت ما را قادر به برآورد پارامترهای مدل یعنی اثرات می‌سازد.

[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]



شکل ۱: نمودار احتمال نرمال اثرات

بحث و نتیجه‌گیری

طرح‌های PB، که بر پایه ماتریس‌های هادامارد ساخته می‌شوند، از مزیت‌های متعددی در طرح آزمایش‌ها برخوردارند، که خاصیت ظرفیت برآورد اثرات بوسیله آنها یکی از مهمترین خواص آنها است. ظرفیت برآورد اثرات متقابل بین دو عامل در تصویر طرح‌های PB، روی عامل‌های فعال که در مرحله غربال‌سازی معین شده‌اند، در این دو دهه بخش وسیعی از تحقیقات را در زمینه طرح به خود اختصاص داده است. در این زمینه هدایت و پسوتان (۱۹۹۷ و ۲۰۰۷) نیز ساختن طرح‌هایی را بر اساس ماتریس-g برای برآورد یکی از اثرات متقابل دو عاملی از پیش تعیین شده به همراه اثرات اصلی بیان و طرح بهینه را ارایه کردند. در تمامی این تحقیقات ظرفیت برآورد به اثرات اصلی و متقابل دو عاملی محدود می‌شود. هر چند در میلر و سیتر (۲۰۰۴) به خاصیت شناسایی اثرات غیر صفر، که به نوعی طرح کاوش را تداعی می‌کند اشاره شده است، لیکن باز هم این خاصیت برای کاوش به اثرات متقابل دو عاملی محدود شده است. طالبی و اسمعیل‌زاده (۲۰۱۰) خاصیت کاوش را در این طرح برای اثرات دو و سه عاملی، برای $m = ۴$ مطالعه و ارایه کردند، اما در آن از ظرفیت برآورد بالقوه طرح استفاده نکردند. در این مقاله با

معرفی طرح کاوش پسا مرحله‌ای قابلیت کاوش طرح برای یک اثر متقابل سه عاملی همراه با استفاده از ظرفیت طرح در برآورد اثرات متقابل دو عاملی ارایه شده است. کار هدایت و پسوتان (۱۹۹۷ و ۲۰۰۷) ساختن و ارایه طرحی است که در آن برآورد اثر متقابل دو عاملی از پیش تعیین شده‌ای را برای $۴ \leq m \leq ۸$ مد نظر قرار می‌دهد. لیکن در مورد تصویر طرح PB12 روی m عامل $۴ \leq m \leq ٦$، محدویت از پیش تعیین بودن اثر متقابل دو عاملی وجود ندارد. این مزیت به علاوه خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای، که نتیجه این تحقیق است، کارایی و ظرفیت طرح PB12 را از دو نقطه نظر، شناسایی و برآورد، نشان می‌دهد. در حقیقت، نشان داده شد که تصویر طرح PB12 روی $m = ۴,۵$ قادر است علاوه بر داشتن ظرفیت شناسایی و برآورد یک اثر متقابل سه عاملی، تمامی اثرات اصلی و حداکثر تا سه اثر از اثرات متقابل دو عاملی، که احتمالاً غیر صفرند، را برآورد نماید.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مراتب قدردانی خود را از داوران محترم برای ارایه نقطه نظراتشان و هیئت تحریریهٔ محترم مجله علوم آماری اعلام می‌دارند. همچنین از حمایت دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان سپاسگزاریم. نویسنده اول از دانشگاه کردستان به خاطر حمایتشان سپاسگزار است.

مراجع

Cheng, C. S., (1995), Some Projection Properties of Orthogonal Arrays, *Annals of Statistics*, **23**, 1223-1233.

Hamada, M. and Wu, C. F. J., (1992), Analysis of Designed Experiments with Complex Aliasing, *Journal of Quality Technology*, **24**, 130-137.

Hedayat, A. S. and Pesotan, H., (1997), Designs for Two-Level Factorial Experiments with Linear Models Containing Main Effects and Selected Two Factor Iterations, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **64**, 109-124.

Hedayat, A. S. and Pesotan, H., (2007), Tools for Constructing Optimal Two-Level Factorial Designs for a Linear Model Containing Main Effects and One Two-Factor Interaction, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137** , 1452-1463.

Lin, D. K. J. and Draper, N., (1992), Projection Properties of Plackett and Burman Designs, *Technometrics*, **34**, 423-428.

Miller, A. and Sitter, R. R., (2004), Choosing Columns from the 12-run Plackett-Burman Design, *Statistics and Probability Letters*, **67**, 193-201.

Plackett, R. L. and Burman, J. P., (1946), The Design of Optimum Multifactorial Experiments, *Biometrika*, **33**, 305-325.

Srivastava, J. N. (1975), Designs for Searching Non-Negligible Effects, In: Srivastava, J. N. (Ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Models, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 507-519.

Sun, D., Li, W. and Ye, K. Q., (2002), An Algorithm for Sequentially Constructing Non-Isomorphic Orthogonal Designs and its Applications, Technical Report, Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, SUNYSB-AMS-01-13 http://www.ams.sunysb.edu/papers/papers02.html.

Talebi, H. and Esmailzadeh, N., (2010), Weighted Searching Probability for Classes of Equivalent Search Designs Comparison, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, In Press.

Wang, J. C. and Wu, C. F. J., (1995), A Hidden Projection Property of Plackett-Buraman and Related Designs, *Statistica Sincia*, **5**, 235-250.

ضمیمه

```
function result = Srivastava(A1,A2,k, rnk)
    m_size = size(A2);
    m_rows = m_size(1);
    m_cols = m_size(2);
    ns = [1:m_cols];
    combs = combnk(ns,2*k);
    combs_size = size(combs);
    combs_rows = combs_size(1);
    ma_size=size(A1);
    ma_cols=ma_size(2);
    out = zeros(m_rows, (2*k+ma_cols));
    c1=0;
    for i = 1:combs_rows
           out(:,(1:(2*k+ ma_cols))) = [A1 m(:,combs(i,:))];
        if (rank(out) ~= rnk)
           break;
       end
       c1=c1+1;
    end
    if (c1==combs_rows)
       fprintf( 'It is a search design %d\n\n');
      else
       fprintf( 'It is NoT a search design %d\n\n');
    end
end
```


[DOR: 20.1001.1.17358183.1387.2.2.2.8]