**مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۶**
**جلد ۱، شماره ۲، ص ۹۵-۱۰۸**

# مقایسه مخاطره انواع برآوردگرها در مدل رگرسیون چندگانه با خطای t چندگانه

**محمد آرشی، سید محمد مهدی طباطبایی**
**گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد**

**تاریخ دریافت: ۱۳۸۵/۱۰/۱۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۸/۱**

**چکیده** : در این مقاله، با فرض اینکه در مدل رگرسیونی خطی چندگانه، بردار خطای تصادفی دارای توزیع t چند متغیره است، برآوردگرهای کمترین توانهای دوم تعمیم‌یافته، کمترین توانهای دوم تعمیم‌یافته مقیّد و تورنجش را برای بردار پارامتر مجهول مدل رگرسیونی بدست می‌آوریم. سپس با استفاده از تابع زیانهای مربعی و مربعی موزون، مخاطره برآوردگرهای بدست آمده را با یگدیگر مقایسه می‌کنیم و نشان می‌دهیم در شرایطی خاص کدامیک از برآوردگرها بر دیگری برتری دارند.

**واژه‌های کلیدی** : کمترین توانهای دوم تعمیم‌یافته، کمترین توانهای دوم تعمیم‌یافته مقیّد، تورنجش، توزیع ویشارت معکوس.

## ۱ مقدمه

مدل خطی

$$y = X\beta + e \qquad (1)$$

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمد آرشی، m_arashi_stat@yahoo.com

را در نظر بگیرید، که در آن $y$ بردار تصادفی $n$ بعدی مقادیر پاسخ، $X$ یک ماتریس غیر تصادفی $(n \times p)$ با رتبه کامل $p$، $\beta = (\beta_۱, \cdots, \beta_p)'$ بردار ضرایب رگرسیونی و $e$ بردار خطای تصادفی $n$ بعدی می باشد. معمولاً وقتی رگرسیون کمترین توانهای دوم را با استفاده از $n$ مشاهده، برای $p$ متغیر تحت مدل خطی (۱) در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم توزیع خطاها نرمال است، در حالی که در عمل ممکن است این چنین نباشد. اگر تحلیل ما بر پایه این فرض باشد که ممکن است توزیع خطاها غیر نرمال باشد، آن گاه باید از روشهای رگرسیونی استوار[۱] و دقیقتری استفاده بکنیم. فیشر (۱۹۵۶) برای اولین بار به نتایج نامناسب استفاده از توزیع نرمال به عنوان توزیع خطای تصادفی در مدلهای خطی آماری اشاره کرد. در این روش با قبول متقارن بودن توزیع خطاها، سعی می‌شود از توزیعهایی که منحنی تابع چگالی آنها دنباله‌هایی پهن‌تر از نرمال دارند استفاده بشود. یعنی از توزیعهایی استفاده می کنیم که احتمال در دنباله‌های توزیع بیشتر از حالت نرمال است تا بتوان نقاط فرین[۲] و نقاط پرت[۳] را تحت پوشش قرار داد. زلنر (۱۹۷۶) از توزیع t به عنوان مدل خطای تصادفی در روش‌های کلاسیک و بیزی استفاده کرد و نشان داد که توزیع نرمال حالت خاصی از توزیع t است. همچنین اولا و والش (۱۹۸۴) در بهبود انواع متفاوتی از آزمون‌هایی که در مطالعات اقتصادی با استفاده از مدل t بکار می‌روند، تحقیقات زیادی انجام داده‌اند. برای آگاهی بیشتر در خصوص اهمیت استفاده از توزیع t در روش‌های آماری دقیق و مدل‌ها می‌توان به لانگ و همکاران (۱۹۸۹) و تیکو و همکاران (۱۹۹۲) مراجعه کرد.

در این مقاله فرض می کنیم که بردار خطای تصادفی در مدل خطی (۱) دارای توزیع t چند متغیره (Mt) است و بر این اساس برآوردگر کمترین توانهای دوم تعمیم یافته[۴] (GLS) و برآوردگر کمترین توانهای دوم تعمیم یافته مقّید[۵] (RGLS)

---

۱ Robust regression methods

۲ Extreme values

۳ Outliers

۴ Generalized least square

۵ Restricted generalized least square



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.6.5 ]

تحت یک فرضیه آماری در مورد بردار پارامتر $\beta$ و برآوردگر تورنجش[6] (S)، (ترکیبی از دو برآوردگر GLS و RGLS) را برای $\beta$ بدست می آوریم و در نهایت مخاطره این سه برآوردگر را تحت تابع زیان مربعی خطا با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. صالح (۲۰۰۶) ترکیبات مختلفی از برآوردگرهای فوق را تحت تئوری نرمال و در حالات مختلف ناپارامتری مورد بررسی قرار داده‌است.

توزیع Mt عضوی از کلاس توزیع‌های نرمال مرکب بیضی‌گون[7] (ECND) است که دارای میانگین صفر و ماتریس واریانس-کوواریانس همیشه مثبت (.p.d) $\Sigma$ می‌باشد به عبارت دیگر داریم $E(e) = 0$ و $E(ee') = \Sigma$.
کلاس ECND زیر کلاسی از خانواده توزیع‌ها با منحنی‌های تراز بیضی‌گون[8] (ECD) است که می‌توان آن را به عنوان آمیزه واریانسی توزیع‌های نرمال[9] به صورت

$$f(e) \quad = \quad \int \cdots \int_{\Sigma > 0} f_n(e|\Sigma) g(\Sigma) \; d\Sigma, \qquad (2)$$

بیان کرد، که در آن $f(e)$ تابع چگالی احتمال (pdf) بردار $e$، $f_n(e|\Sigma)$، pdf توزیع نرمال چند متغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس-کوواریانس همیشه مثبت $\Sigma$ به صورت $N_n(0, \Sigma)$ و $g(\Sigma)$ تابع چگالی احتمال $\Sigma$ برای $\Sigma$های .p.d می‌باشد. معروفترین عضوهای کلاس ECD، توزیع نرمال چند متغیره و توزیع Mt می‌باشند. برای آگاهی بیشتر در این زمینه و کاربرد این روش به موایرهد (۱۹۸۲) و گوپتا و وارگا (۱۹۹۳) مراجعه کنید.

به منظور ارائه دلیل استفاده از صورت شرطی فوق به جای استفاده مستقیم از توزیع Mt، دقت کنید به طور کلی‌تر، در شرایطی که لازم است برآوردگرهایی برای پارامترهای توزیع‌های در ECD بدست آوریم ممکن است در عمل نتوان مشاهداتی از توزیع‌های در ECD به طور مستقیم تولید کرد و یا اغلب در مطالعه صفات و پدیده‌های طبیعی با مواردی مواجه می‌شویم که توزیع مشاهدات بدست آمده نرمال

---

[6] Shrinkage

[7] Elliptical compound normal distributions

[8] Elliptically contoured distributions

[9] Variance mixture of normal distributions

می‌باشد. در این موارد ممکن است ساختار ماتریس واریانس-کوواریانس بیان کننده نوعی اطلاع بیشتر نسبت به مشاهدات بدست آمده باشد، که با استفاده از تکنیک شرطی در (۲) می‌توان با دو دسته مشاهدات، یکی از توزیع شرطی و دیگری از توزیع پیشین است بتوان پارامترها را برآورد کرد. همچنین محاسبه توابع مخاطره برآوردگرهای ذکرشده نیز ساده‌تر است. طباطبایی و همکاران (۲۰۰۴a و ۲۰۰۴b) در حالت ساده‌تری از روش شرطی در (۲)، با فرض این‌که $e \mid \tau \sim N_n(0, \tau^2 I_n)$ و $\tau^2$ دارای توزیع پیشین گامای معکوس با پارامتر $\sigma^2$ است، که توزیع Mt با ماتریس واریانس-کوواریانس $\sigma^2 I_n$ را نتیجه می‌دهد، برآوردگرهایی از نوع کمترین توانهای دوم معمولی، کمترین توانهای دوم معمولی مقید و انواع مختلفی از برآوردگرهای تورنجیده را بدست آورده‌اند. ما در این مقاله با تعمیم گامای معکوس به ویشارت معکوس برآوردگرهای موردنظر را می‌یابیم. برای این منظور با استفاده از (۲)، در لم اساسی زیر نشان می‌دهیم که اگر $e \mid \Sigma \sim N_n(0, \Sigma)$ و همچنین $\Sigma$ دارای توزیع پیشین ویشارت معکوس ($W^{-1}$) باشد آنگاه بردار خطای تصادفی $e$ دارای توزیع Mt می‌باشد. می گوییم $\Sigma$ دارای توزیع ویشارت معکوس با پارامتر مقیاس $\Psi^{-1}$ و $m$ درجه آزادی است و با $\Sigma \sim W_n^{-1}(\Psi^{-1}, m)$ نشان می‌دهیم اگر pdf آن به صورت

$$g(\Sigma) = \frac{|\Psi|^{m/2} |\Sigma|^{(m+n+1)/2} e^{-tr(\Psi\Sigma^{-1})/2}}{2^{mn/2}\Gamma_n(m/2)}, \qquad (3)$$

باشد، که در آن $\Gamma_n(t) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma[t - \frac{1}{2}(i-1)]$ تابع گامای چند متغیره است. همچنین می‌گوییم $e$ دارای توزیع Mt با پارامتر مقیاس $\Psi$ و $\nu$ درجه آزادی است و با $e \sim Mt(\Psi, \nu)$ نشان می‌دهیم اگر pdf آن به صورت زیر باشد.

$$f(e) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})|\Psi|^{-1/2}}{(\nu\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})}(1 + \frac{e'\Psi^{-1}e}{\nu})^{\frac{-(\nu+n)}{2}}. \qquad (4)$$

برای جزئیات بیشتر در رابطه با این توزیع و کاربردهای آن با استفاده از روش شرطی در (۲)، در حالاتی ساده‌تر، ناداراجا و کتز (۲۰۰۵) و یا کیبریا و جردر (۲۰۰۶) را ببینید.

**لم ۱** : فرض کنید $e \mid \Sigma \sim N_n(\circ, \nu\Sigma)$ و $\Sigma \sim W_n^{-1}(\Psi^{-1}, \nu + n - 1)$؛ در این‌صورت بردار تصادفی $e$، دارای توزیع حاشیه‌ای Mt با پارامترهای $\Psi$ و $\nu$ درجه آزادی است. برای اثبات به بخش ضمایم مراجعه کنید.

## ۲ برآورد بردار پارامتر $\beta$

در این بخش با فرض اینکه در مدل خطی (۱)، بردار خطای تصادفی دارای توزیع Mt است، ابتدا برآوردگر کمترین توانهای دوم تعمیم یافته برای بردار پارامتر $\beta$ را بدست می‌آوریم. سپس تحت قید $H\beta = h$، که در آن $H$ ماتریس معلوم $(q \times p)$ و رتبه کامل $q$ و $h$ بردار مقادیر از پیش تعیین شده با بعد $q$ است، سعی می‌کنیم با استفاده از روش می‌نیمم سازی با استفاده از ضریب لاگرانژ، برآوردگر کمترین توانهای دوم تعمیم یافته مقیّد برای بردار پارامتر $\beta$ بیابیم. در نهایت ترکیبی از دو برآوردگر ذکر شده را به عنوان برآوردگر انقباض معرفی می‌کنیم. این قیود خطی در اغلب مسائل کاربردی به صورت مقابله‌ها[۱۰] مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه این‌گونه قیدهای خطی در انواع تصادفی و غیر تصادفی، در بهبود برآوردگرهای رگرسیونی استفاده می‌شوند. با استفاده از برآوردگرهای محدود شده تحت قیود خطی می‌توان برآوردگرهای تورنجیده تعریف کرد که با وجود اریبی، دارای ریسک کمتری نسبت به برآوردگرهای محدود نشده هستند. برای آگاهی بیشتر در این زمینه به طباطبایی (۱۹۹۵)، کیبریا و صالح (۲۰۰۴) و صالح (۲۰۰۶) مراجعه کنید. برای این منظور، ابتدا فرض کنید دو شرط اول کلاسیک برای ماتریس مشاهدات $X$ در (۱) برقرار باشد:

A1. $X$ غیرتصادفی است.

A2. $y$ برداری تصادفی است به‌طوری که با شرط $\beta = \beta_\circ$ و $\Sigma_\circ > \circ$ داریم $E(y) = X\beta_\circ$ و $Var(y) = \Sigma_\circ$.

در این مقاله فرض می‌کنیم $\Sigma \sim W_n^{-1}(\Psi^{-1}, m)$ و ابرپارامترهای توزیع پیشین ($\Psi$ و $m$)، همگی معلوم هستند. توجه به این نکته ضروری است که در مسائل

[۱۰] Contrasts

کاربردی به خصوص روش‌های بیزی، در صورتی که $\Sigma$ یک توزیع پیشین معلوم داشته باشد و به اشتباه آن را در نظر نگیریم، ممکن است با مشکل بیش‌پراکنش[11] در محاسبه انحرافات استاندارد برآوردگرها یا انجام آزمون فرضیه‌های آماری روبرو شویم. لازم به ذکر است در شرایطی که ممکن است پارامترهای توزیع پیشین مجهول باشند، اگر $m$ معلوم و $\Psi$ مجهول، همان‌طور که در مقدمه ذکر شد با تکرار نمونه‌گیری، می‌توان $\Psi$ را برآورد کرد و در حالتی که هر دو ابرپارامتر $m$ و $\Psi$ مجهول هستند، با استفاده از روشهای ECM و ECME، می‌توان برآوردگرهایی برای پارامترهای توزیع پیشین بدست آورد. برای آگاهی بیشتر در این زمینه، لیو و روبین (۱۹۹۵) را ببینید.

حال برای بدست آوردن برآوردگر کمترین توانهای دوم $\beta$، عبارت زیر را نسبت به $\beta$ مینیمم می‌کنیم.

$$S_1(\beta,\lambda) \quad = \quad (y-X\beta)'\Psi^{-1}(y-X\beta).$$

که با حل معادله $-2X'\Psi^{-1}(y-X\beta)=0$ بر حسب $\beta$، برآوردگر کمترین توانهای دوم تعمیم‌یافته $\beta$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\hat{\beta} \quad = \quad (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y. \tag{5}$$

حال فرض کنید اطلاعی بیشتر در مورد بردار پارامتر $\beta$ به صورت $H\beta=h$ که در آن $H$ ماتریس معلوم $(q\times p)$ و رتبه کامل $q$ و $h$ بردار مقادیر از پیش تعیین شده با $q$ مولفه است، داریم. در این صورت برای یافتن برآوردگر کمترین توانهای دوم $\beta$ تحت قید $H\beta=h$ با استفاده از روش ضریب لاگرانژ عبارت زیر را نسبت به $\beta$ و $\lambda$ مینیمم می‌کنیم.

$$S_2(\beta,\lambda) \quad = \quad (y-X\beta)'\Psi^{-1}(y-X\beta)+2\lambda'(H\beta-h).$$

با حل همزمان معادلات نرمال زیر

$$\begin{cases} -2X'\Psi^{-1}(y-X\beta)+2H'\lambda=0 \\ 2(H\beta-h)=0 \end{cases}$$

[11] Overdispersion

برآوردگر کمترین توانهای دوم تعمیم‌یافته مقیّد $\beta$ به صورت زیر

$$\widetilde{\beta} \;=\; \hat{\beta} - (X'\Psi^{-1}X)^{-1}H'[H(X'\Psi^{-1}X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta} - h). \qquad (۶)$$

بدست می‌آید. اکنون برآوردگر تورنجش $\beta$ را با $\beta^*$ نشان داده، به‌صورت

$$\beta^* \;=\; \tau\hat{\beta} + (1-\tau)\widetilde{\beta} \qquad (۷)$$

می‌نویسیم، که در آن $\tau \in \Re$. توجه کنید در صورتی که $\tau \in [0, 1]$، $\beta^*$ ترکیب محدبی از دو برآوردگر $\hat{\beta}$ و $\widetilde{\beta}$ است؛ و در غیر این‌صورت $\beta^*$ ترکیب محدبی از دو برآوردگر $\hat{\beta}$ و $\widetilde{\beta}$ نمی‌باشد و همواره داریم

$$\beta^* \mid_{(\tau=0)} = \widetilde{\beta} \quad \beta^* \mid_{(\tau=1)} = \hat{\beta}$$

اهمیت برآوردگر تورنجش در برتری آن نسبت به دو برآوردگر دیگر می‌باشد که در حالت‌های مختلفی در این مقاله در مورد آن بحث شده‌است. انواع دیگری از برآوردگر تورنجش را می‌توان به طور جامع‌تر در کارهای طباطبایی (۱۹۹۵) و صالح (۲۰۰۶) دید. در تمامی انواع مختلف برآوردگرهای تورنجش، همواره ترکیبی از دو برآوردگر کمترین توانهای دوم و کمترین توانهای دوم مقید در نظر گرفته شده‌است، لذا یکی از دلایل بدست آوردن برآوردگر کمترین توانهای دوم مقید، استفاده از آن در ساخت برآوردگر تورنجش است. در اکثر موارد از برآوردگر کمترین توانهای دوم مقید استفاده می‌شود تا برآوردگری با مخاطره‌ای کمتر از مخاطره برآوردگر کمترین توانهای دوم به دست آید.

## ۳ محاسبه مخاطره برآوردگرها

در این بخش با استفاده از تابع زیان درجه دوم و تابع زیان درجه دوم موزون، مخاطره برآوردگرهای GLS، RGLS و S بدست آمده در بخش قبل را محاسبه می‌کنیم. حال تابع زیان درجه دوم

$$L(\bar{\beta};\beta) \;=\; (\bar{\beta}-\beta)'(\bar{\beta}-\beta), \qquad (۸)$$

را در نظر بگیرید، که در آن $\bar{\beta}$ یک برآوردگر بردار پارامتر $\beta$ می‌باشد. دراین‌صورت تابع مخاطره درجه دوم با استفاده از (۸) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R(\bar{\beta};\beta) \quad = \quad E[(\bar{\beta}-\beta)'(\bar{\beta}-\beta)]. \tag{۹}$$

حال با استفاده از (۹)، مخاطره برآوردگرهای بدست‌آمده در بخش قبل را محاسبه می‌کنیم. برای سهولت در نوشتن فرض کنید

$$G_۱ = (X'\Psi^{-۱}X)^{-۱}, \qquad G_۲ = (HG_۱H')^{-۱}.$$

با توجه به اینکه $y \mid \Sigma \sim N_n(X\beta, \Sigma)$ می‌توان نتیجه گرفت

$$(\hat{\beta}-\beta) \mid \Sigma \quad \sim \quad N_p(\circ, \nu G_۱X'\Psi^{-۱}\Sigma\Psi^{-۱}XG_۱). \tag{۱۰}$$

با استفاده از $E(\Sigma) = \Psi/(\nu-۲)$ (اندرسن، ۲۰۰۳)، (۵) و (۱۰) داریم

$$\begin{aligned} R(\hat{\beta};\beta) &= EE[(\hat{\beta}-\beta)'(\hat{\beta}-\beta) \mid \Sigma] \\ &= \nu E tr(G_۱X'\Psi^{-۱}\Sigma\Psi^{-۱}XG_۱) \\ &= \frac{\nu}{\nu-۲}\, tr(G_۱). \end{aligned} \tag{۱۱}$$

همچنین با استفاده از (۶)، (۱۱) و تغییر متغیر $\delta = G_۱H'G_۲(H\beta-h)$ داریم

$$\begin{aligned} R(\widetilde{\beta};\beta) &= EE[(\widetilde{\beta}-\beta)'(\widetilde{\beta}-\beta) \mid \Sigma] \\ &= EE\{[(I_p - G_۱H'G_۲H)(\hat{\beta}-\beta) \\ &\quad -\delta]'[(I_p - G_۱H'G_۲H)(\hat{\beta}-\beta)-\delta] \mid \Sigma\} \\ &= EE[(\hat{\beta}-\beta)'(I_p - G_۱H'G_۲H)'(I_p \\ &\quad -G_۱H'G_۲H)(\hat{\beta}-\beta) \mid \Sigma] + \delta'\delta \\ &= R(\hat{\beta};\beta) - \frac{\nu}{\nu-۲}\, tr(G_۱H'G_۲HG_۱) + \delta'\delta. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

برای بدست آوردن $R(\beta^*;\beta)$ با استفاده از (۷) می‌توان نوشت

$$R(\beta^*;\beta) \quad = \quad EE[(\beta^*-\beta)'(\beta^*-\beta) \mid \Sigma]$$



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.6.5 ]

$$
\begin{aligned}
&= EE[(\tau\hat{\beta}+(1-\tau)\widetilde{\beta}-\beta)'(\tau\hat{\beta}+(1-\tau)\widetilde{\beta}-\beta)\mid\Sigma] \\
&= EE\{[(I_p-(1-\tau)G_1H'G_2H)\hat{\beta}+(1-\tau)G_1H'G_2h \\
&\quad -\beta]'[(I_p-(1-\tau)G_1H'G_2H)\hat{\beta} \\
&\quad +(1-\tau)G_1H'G_2h-\beta]\mid\Sigma\} \\
&= R(\hat{\beta};\beta)-\frac{\nu(1-\tau)^2}{\nu-2}\,tr(G_1H'G_2HG_1)+(1-\tau)^2\delta'\delta.
\end{aligned} \tag{۱۳}
$$

حال فرض کنید تابع زیان در (۸)، تابع زیان درجه دوم موزون بصورت

$$L(\bar{\beta};\beta) = (\bar{\beta}-\beta)'W(\bar{\beta}-\beta), \tag{۱۴}$$

باشد، که در آن $W$ ماتریس وزن درجه دوم معلوم و ناویژه[۱۲] با بعد $p$ است. با قراردادن $W=G_1^{-1}=X'\Psi^{-1}X$ و استفاده از (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$R(\hat{\beta};\beta) = \frac{\nu}{\nu-2}\,tr(WG_1)=\frac{\nu}{\nu-2}\,tr(I_p)=\frac{\nu p}{\nu-2}, \tag{۱۵}$$

$$
\begin{aligned}
R(\widetilde{\beta};\beta) &= R(\hat{\beta};\beta)-\frac{\nu}{\nu-2}\,tr(WG_1H'G_2HG_1)+\delta'W\delta \\
&= \frac{\nu(p-q)}{\nu-2}+(H\beta-h)'G_2(H\beta-h),
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

$$
\begin{aligned}
R(\beta^*;\beta) &= R(\hat{\beta};\beta)-\frac{\nu(1-\tau)^2}{\nu-2}\,tr(WG_1H'G_2HG_1) \\
&\quad +(1-\tau)^2\delta'W\delta \\
&= \frac{\nu[p-q(1-\tau)^2]}{\nu-2} \\
&\quad + (1-\tau)^2(H\beta-h)'G_2(H\beta-h).
\end{aligned} \tag{۱۷}
$$

---

[۱۲] Non-singular



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.6.5 ]

## بحث و نتیجه‌گیری

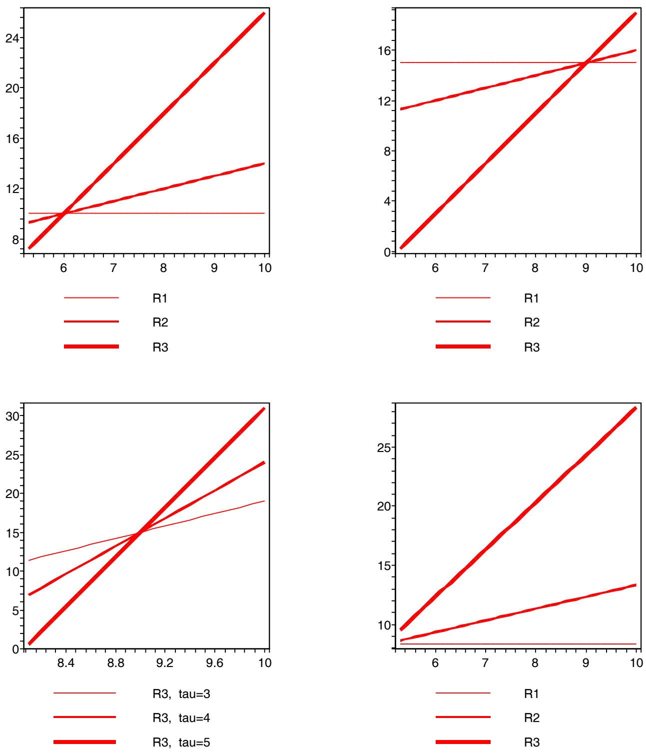
در این مقاله با فرض این‌که در مدل رگرسیون چندگانه، بردار خطای تصادفی دارای توزیع t چندمتغیره است، برآوردگرهایی از نوع کمترین توان‌های دوم تعمیم‌یافته بدست آوردیم. همچنین با استفاده از توابع زیان درجه دوم و زیان درجه دوم موزون مخاطره آن‌ها را محاسبه کردیم. برآوردگر تورنجش ترکیبی از دو برآوردگر محدود نشده و محدود شده تحت یک مجموعه قیود خطی است. معمولاً در مسائل کاربردی، در زمینه برآورد، همواره به‌دنبال برآوردگری هستیم که مخاطره آن کمترین مقدار ممکن را در بین بقیه برآوردگرها داشته باشد، لذا انتخاب نوع برآوردگر از اهمیت بسزایی برخوردار است. با توجه به ضریب تورنجش $\tau$ در رابطه (۷)، می‌توان نوع برآوردگر $\beta^*$ را طوری تعیین کرد که بهترین کارایی را نسبت به دو برآوردگر $\hat{\beta}$ و $\widetilde{\beta}$ داشته باشد. در زیر نشان می‌دهیم که حتی در شرایطی انتخاب مقدار منفی برای $\tau$ باعث برتری $\beta^*$ نسبت به دو برآوردگر دیگر می‌شود. بدیهی است که تحت قید $H\beta = h$ برای مقادیر $\nu > ۲$، براساس (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} R(\widetilde{\beta};\beta) &< R(\hat{\beta};\beta), \\ R(\beta^*;\beta) &< R(\hat{\beta};\beta), \\ R(\beta^*;\beta) &< R(\widetilde{\beta};\beta), \quad \forall\ \tau \in (-\infty, ۰) \cup (۲, \infty). \end{aligned}$$

یعنی تحت قید $H\beta = h$، دو برآوردگر $\widetilde{\beta}$ و $\beta^*$ بر $\hat{\beta}$ برتری دارند، که با $\hat{\beta} \prec \widetilde{\beta}$ و $\hat{\beta} \prec \beta^*$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه اگر $\tau \in (-\infty, ۰) \cup (۲, \infty)$، آنگاه $\widetilde{\beta} \prec \beta^*$. تعبیر این نتیجه در مسائل کاربردی بدین صورت است، در شرایطی که مجموعه قید خطی $H\beta = h$ بر روی فضای پارامتر مدل رگرسیون چندگانه اعمال شده است، به ازای مقادیر منفی $\tau$ یا مقادیر $\tau \in (۲, \infty)$، انتخاب برآوردگر تورنجش در (۷) نتیجه بهتری نسبت به انتخاب یکی از دو برآوردگر $\hat{\beta}$ یا $\widetilde{\beta}$ دارد. با توجه به این‌که فرمول مخاطره برآوردگرها صورت بسته‌ای دارد، در عین حال به‌منظور نشان دادن صحت نتایج بدست آمده فوق (تحت زیان درجه دوم موزون)، توابع مخاطره را برای مقادیر مختلف $p$، $q$، $\tau$ و $\nu$ به روش نموداری با یکدیگر مقایسه شده، که در



[ DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.2.6.5 ]




شکل ۱: $p$، $q$ و $\tau$ ثابت است و $\nu$ افزایش می‌یابد.

نمودارهای شکل ۱ آمده است. در این نمودارها محور افقی نشان دهنده مقادیر $\theta = (H\beta - h)'G_۲(H\beta - h)$ و محور عمودی مقادیر مخاطره

$$R۱ = R(\hat{\beta};\beta), \quad R۲ = R(\widetilde{\beta};\beta), \quad R۳ = R(\beta^*;\beta)$$

است. بدیهی است که $\theta$ یک صورت درجه دوم است و $\theta \in [۰,\infty)$. انتخاب $\theta$ به صورت فوق به این دلیل است که در بررسی روند برتری برآوردگرها نسبت به یکدیگر تنها فاصله $H\beta$ از مقادیر از پیش تعیین شده $h$ اهمیت دارد نه علامت آن، و همچنین به دلیل انتخاب زیان درجه دوم موزون، وزن $G_۲$ در این فاصله تأثیر دارد.

با توجه به نتایج بدست آمده از نمودارهای حاصل می‌توان نتیجه گرفت:

۱. با افزایش مقدار $\tau$، $R۳$ ابتدا یک روند نزولی و سپس صعودی دارد. و هر چه

مقدار $\tau$ زیاد شود مینیمم نسبی $R۳$ در مقادیر بزرگتر $\theta$ رخ می‌دهد.
۲. ابتدا روند برتری سه برآوردگر به صورت $\hat{\beta} \succ \widetilde{\beta} \succ \beta^*$ است و هر چه به مقدار $\nu$ افزوده شود روند برتری به به $\beta^* \succ \widetilde{\beta} \succ \hat{\beta}$ گرایش پیدا می‌کند. یعنی انتخاب مقادیر کوچک $\nu$ نتیجه بهتری در استفاده از برآوردگر تورنجش می‌دهد.

## ضمایم

**اثبات لم ۱**: از آنجایی که انتگرال pdf، $\Sigma$ برای $\Sigma > \circ$ برابر ۱ است، می‌توان نتیجه گرفت

$$\int\cdots\int_{\Sigma>\circ}|\Sigma|^{-(\nu+۲n)/۲}\exp[\frac{-tr(\Psi\Sigma^{-۱})}{۲}]\,d\Sigma = (۲^{-n}|\Psi|)^{-(\nu+n-۱)/۲} \times\Gamma_n(\frac{\nu+n-۱}{۲}).$$

با استفاده از فرع A.3.1 در اندرسن (۲۰۰۳) داریم

$$|ee'+\nu\Psi| = \nu^n|\Psi|(۱+\frac{e'\Psi^{-۱}e}{\nu}),$$

با استفاده از (۲)، (۳) و (۴)، pdf بردار تصادفی $e$ عبارتست از

$$\begin{aligned} f(e) &= \int\cdots\int_{\Sigma>\circ} f(e|\Sigma)g(\Sigma)\,d\Sigma \\ &= \frac{(۲\pi)^{-n/۲}\nu^{-n/۲}|\Psi|^{(\nu+n-۱)/۲}\nu^{-n/۲}}{۲^{n(\nu+n-۱)/۲}\Gamma_n(\frac{\nu+n-۱}{۲})} \\ &\quad\times\int\cdots\int_{\Sigma>\circ}|\Sigma|^{-(\nu+۲n)/۲}\exp\{\frac{-tr[(\frac{ee'}{\nu}+\Psi)\Sigma^{-۱}]}{۲}\}\,d\Sigma \\ &= \frac{(۲\pi)^{-n/۲}\nu^{-n/۲}۲^{n(\nu+n)/۲}\Gamma_n(\frac{\nu+n}{۲})}{۲^{n(\nu+n-۱)/۲}\Gamma_n(\frac{\nu+n-۱}{۲})} \\ &\quad\times|ee'+\nu\Psi|^{-(\nu+n)/۲}|\Psi|^{(\nu+n-۱)/۲} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{۲})|\Psi|^{-۱/۲}}{[\nu\pi]^{n/۲}\Gamma(\frac{\nu}{۲})}(۱+\frac{e'\Psi^{-۱}e}{\nu})^{-(\nu+n)/۲} \end{aligned}$$

بنابراین $e$ دارای توزیع Mt با پارامتر $\Psi$ و $\nu$ درجه آزادی است. □

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادات و نظرات ارزنده داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده‌ای در محتوا و ارائه بهتر مقاله شده‌است، کمال تشکر و قدردانی را دارند. از حمایت مالی قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی نیز قدردانی می‌گردد.

## مراجع

Anderson, T. W. (2003), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3rd Ed., John Wiley, New York.

Fisher, R. A. (1956), *Statistical Methods in Scientific Inference.* Oliver and Boyd, London.

Gupta, A. K. and Varga, T. (1993), *Elliptically Contoured Models in Statistics*, Kluwer Academic Pres London.

Lange, K. L., Little, R. J. A. and Taylor, J. M. G. (1989), *Robust Statistical Modeling using the t Distribution*, Journal of American Statistical Association, **84**, 881-896.

Liu, Ch. and Rubin, D. B. (1995), ML Estimation of the t Distribution using EM and its Exrensions, ECM and ECME, *Statistica Sinica*, **5**, 19–39.

Kibria, B. M. G. and Joarder, A. H. (2006), A Short Review of Multivariate t Distribution, J. Statist. Res., **40**(1), 59-72.

Kibria, B. M. Golam and Saleh, A. K. Md. E. (2004), Preliminary Test Ridge Regression Estimators with Student's t Errors and Conflicting Test Statistics, *Metrika*, **59**, 105-124.

Muirhead, R. J. (1982), *Aspect of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley, New York.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2005), *Mathematical Properties of the Multivariate t Distribution*, Acta Appl. Math. **89**, 53-84.

Saleh, A. K. Md. E. (2006), *Theory of Preliminary Test and Stein-type Estimation with Applications*, John Wiley, New York.

Tabatabaey, S. M. M., (1995), *Preliminary Test Approach Estimation: Regression Model with Spherically Symmetric Errors*, Ph.D. Thesis, Carleton University, Canada.

Tabatabaey, S. M. M., Saleh, A. K. Md. E. and Kibria, B. M. Golam, (2004a), *Estimation Strategies for Parameters of the Linear Regression Models with Spherically Symmetric Distributions*, J. Statist. Res., **38**(1), 13-31.

Tabatabaey, S. M. M., Saleh, A. K. Md. E. and Kibria, B. M. Golam, (2004b), *Simultaneous Pstimation of Regression Parameters with Spherically Symmetric Errors under Possible Stochastic Constraints*, Int. J. Statist. Sci., **3**, 1-20.

Tiku, M. L., Tan, W. Y. and Balakrishnan, N. (1992), *Robust Inference*, Marcel Dekker, New York.

Ullah, A. and Walsh, V. Z. (1984), *On the Robustness of LM, LR and W Tests in Regression Models*, Econometrica, **52**, 1055-1066.

Zellner, A. (1976), *Bayesian and Non-Bayesian Analysis of the Regression Model with Multivariate Student-t Error Term*, Journal of American Statistical Association, **66**, 601-616.