

## آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

ملیحه عباس نژاد، داود محمدی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۵/۱۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۲/۱۰

**چکیده:** در این مقاله، ابتدا توزیع‌های مستقارن براساس تفاضل آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیر نمونه‌ها، مشخصه‌سازی می‌شوند. سپس آزمونی برای تقارن توزیع بر مبنای برآورده آنتروپی رنی آماره‌های مرتب معرفی می‌گردد. براساس روش شبیه‌سازی مونت کارلو، توان آزمون پیشنهادی محاسبه شده و با آزمون ارائه شده توسط حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. نشان داده خواهد شد آزمون پیشنهاد شده برای برخی از توزیع‌های جانشین از توان بالاتری برخوردار است.

**واژه‌های کلیدی:** آنتروپی رنی، برآورده آنتروپی رنی، آماره‌های مرتب.

### ۱ مقدمه

یکی از اساسی‌ترین معیارها برای اندازه‌گیری عدم حتمیت یک متغیر تصادفی آنتروپی شانون است که توسط شanon (۱۹۴۸) معرفی شد. آنتروپی شanon متغیر تصادفی پیوسته  $X$  باتابع چگالی احتمال  $f(x)$  برابر است با

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx.$$

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ملیحه عباس نژاد،  
کد موضوع بنای ریاضی (۲۰۰۰): 94A17, 62G30

حالت کلی تری از آنتروپی شanon توسط رنی (۱۹۶۱) به صورت

$$H_s(X) = -\frac{1}{s-1} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x) dx, \quad s > 0 \quad (\neq 1).$$

ارائه شد. به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\lim_{s \rightarrow 1} H_s(X) = H(X).$$

از آنجا که مفهوم آنتروپی کاربردهای فراوانی در مباحث آماری نظریه اطلاع و آزمون‌های نیکوئی برازش دارد، مسئله برآورد  $H(X)$  براساس مشاهدات  $x_1, \dots, x_n$  توسط محققین زیادی از جمله احمد و لین (۱۹۷۶)، واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردهای، برآوردگر واسیچک به واسطه سادگی در محاسبات و دقیق‌ترین آن بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. واقعیک و همکاران (۲۰۰۵) به روشهای مشابه واسیچک برآوردهای آنتروپی رنی به صورت

$$H_s(\omega, n) = -\frac{1}{s-1} \log \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{n}{2\omega} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n}) \right)^{1-s} \right], \quad (1)$$

معرفی نمودند، که در آن  $x_{1:n}, \dots, x_{n:n}$  آماره‌های مرتب نمونه تصادفی هستند و  $\omega$  یک عدد صحیح کوچکتر یا مساوی  $\frac{n}{2}$  است و برای  $1 < s < n$  و برای

$$x_{i:n} = x_{1:n} \quad i > n$$

برآورد آنتروپی در به دست آوردن آماره نیکوئی برازش برای توزیع نرمال ابتدا توسط واسیچک (۱۹۷۶) و سپس توسط آریزوونو و اوتا (۱۹۸۹)، علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷)، زمان زاده و ارقامی (۱۳۸۷) و یوسف زاده و ارقامی (۲۰۰۸) دادویج و ون در مولن (۱۹۸۱) برای توزیع یکنواخت و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) برای توزیع نمایی مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برآورد آنتروپی در آزمون نمایی بودن توزیع برای داده‌های سانسسور شده نوع دو توسط پارک (۲۰۰۵) و برای داده‌های سانسسور پیشرونده نوع دو توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۷) به کار رفته است. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) نیز از برآورد آنتروپی شanon آماره‌های مرتب برای آزمون تقارن توزیع کمک گرفتند. عباس‌نژاد و شکوری (۱۳۸۷) آزمونی برای توزیع نمایی

بر مبنای برآورده اطلاع رنی معروفی نمودند و نیز آزمون نیکوئی برآش برای توزیع نمایی و نرمال براساس اطلاع رنی توسط عباس‌نژاد (۲۰۱۱) ارائه شده است. در بخش دوم این مقاله برآورده آنتروپی رنی آماره‌های مرتب که تعمیمی از برآورده آنتروپی است، بیان می‌شود، سپس در بخش ۳ آزمون تقارن براساس آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیر نمونه‌های ۲ تایی ارائه و توان آزمون پیشنهادی با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. در بخش ۴ آزمون معروفی شده در بخش ۳ برای مقادیر مختلف  $k$  (حجم زیر نمونه) تعمیم داده شده و در انتهای با کمک شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که افزایش  $k$  تأثیر مثبتی بر توان آزمون دارد.

## ۲ برآورده آنتروپی رنی آماره‌های مرتب

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته  $X$  دارای تابع توزیع  $F(x)$  و تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد. همچنین فرض کنید، آماره مرتب  $r$ ام با تابع توزیع  $F_{r:k}(x)$  از یک زیر نمونه تصادفی  $k$  تایی ( $k = 2, 3, \dots$ ) باشد که با روش باجایگذاری از نمونه اصلی گرفته شده است.

**لم ۱:** اگر  $H_{s,1:k}$  و  $H_{s,k:k}$  به ترتیب آنتروپی رنی اولین و  $k$  امین آماره مرتب از یک زیر نمونه  $k$  تایی باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} H_{s,1:k} &= -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x)[1-F(x)]^{s(k-1)} dx, \\ H_{s,k:k} &= -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x)[F(x)]^{s(k-1)} dx. \end{aligned}$$

برهان با کمک تعریف آنتروپی رنی، نتیجه به آسانی به دست می‌آید.  
برای محاسبه برآورده آنتروپی  $H_{s,k:k}$  و  $H_{s,1:k}$ ، با استفاده از تغییر متغیر

$$F(x) = p$$

$$\begin{aligned} H_{s,1:k} &= -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_0^1 \left[ \frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right]^{1-s} (1-p)^{s(k-1)} dp, \\ H_{s,k:k} &= -\frac{s}{s-1} \log k - \frac{1}{s-1} \log \int_0^1 \left[ \frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right]^{1-s} p^{s(k-1)} dp. \end{aligned}$$

## ۲۴ آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

بنابراین برآورد آنتروپی رنی  $X_{1:k}$  و  $X_{k:k}$  بر اساس زیرنمونه  $k$  تایی از نمونه‌ای به اندازه  $n$  برابر است با

$$\begin{aligned}\hat{H}_{s,1:k} &= -\frac{1}{s-1} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^{s(k-1)} \left(\frac{n}{2\omega}(x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})\right)^{1-s} \\ &- \frac{s}{s-1} \log k,\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{s,k:k} &= -\frac{1}{s-1} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n+1}\right)^{s(k-1)} \left(\frac{n}{2\omega}(x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})\right)^{1-s} \\ &- \frac{s}{s-1} \log k.\end{aligned}\quad (3)$$

## ۳ آزمون تقارن توزیع

در این بخش به معرفی آزمون تقارن توزیع بر اساس برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب پرداخته می‌شود. پارک (۱۹۹۵) لم زیر را برای آزمون تقارن توزیع بر اساس برآورد آنتروپی معرفی کرده است.

لم ۲ (پارک، ۱۹۹۵) فرض کنید  $D_k = E_{1:k} - E_{k:k}$ , که در آن  $E_{1:k}$  و  $E_{k:k}$  به ترتیب نشان‌دهنده آنتروپی شانون اولین و  $k$  امین آماره مرتب از یک زیر نمونه  $k$  تایی هستند. آن‌گاه برای  $k = 2, 3, \dots$ ,  $D_k = 0$  اگر و تنها اگر تابع  $f$  متقارن باشد. براساس آنتروپی رنی، لم ۲ به صورت زیر تعمیم داده می‌شود.

لم ۳ فرض کنید  $D_{k,s} = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . آن‌گاه برای  $\dots, 2, 1$  اگر  $D_{k,s} = H_{s,1:k} - H_{s,k:k}$  و تنها اگر تابع  $f$  متقارن باشد.

برهان بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید تابع  $f$  نسبت به صفر متقارن باشد. در این صورت  $X_{i:n} \stackrel{d}{=} -X_{n-i+1:n}$  (آذرنوش، ۱۳۷۹). بنابراین برای  $k = 2$  (حجم زیر نمونه) داریم

$$X_{1,2} \stackrel{d}{=} -X_{2,1},$$

از طرفی  $H_s(X_{1:2}) = H_s(-X_{2:2}) = H_s(X_{2:2})$ , در نتیجه

$$D_{k,s} = H_s(X_{1:2}) - H_s(X_{2:2}) = 0.$$

برعکس فرض کنید  $D_{k,s} = 0$ , در این صورت  $H_s(X_{1:2}) = H_s(X_{2:2})$  یا  $H_s(X_{1:2}) = H_s(-X_{2:2})$ . حال اگر قرار داده شود  $X = -X$ , آن‌گاه

$$-X_{2:2} = Y_{1:2}$$

بنابراین

$$H_s(X_{1:2}) = H_s(Y_{1:2}),$$

با توجه به قضیه ۲ براتپور و همکاران (۲۰۰۸) داریم

$$X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow X \stackrel{d}{=} -X,$$

و اثبات تمام است.

بنابراین مقدار  $D_{k,s}$  معیار حوبی برای تشخیص تقارن توزیع داده‌هاست، از این رو برای آزمون تقارن توزیع در مقابل توزیع‌های نامتقارن (چوله) می‌توان از  $D_{k,s}$  به عنوان آماره آزمون استفاده کرد. در ادامه آماره آزمون  $D_{k,s}$  را با کمک روابط (۲) و (۳) به صورت

$$D_{k,s}(n, \omega) = -\frac{1}{s-1} \log \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \frac{i}{n+1})^{s(k-1)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}{\sum_{i=1}^n (\frac{i}{n+1})^{s(k-1)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}, \quad (4)$$

برآورد می‌شود.

مقادیر بزرگ  $|D_{k,s}|$  از  $H_1$  پشتیبانی می‌کنند، بنابراین فرضیه  $H_0$  به نفع  $H_1$  در سطح معنی‌داری  $\alpha$  رد می‌شود اگر  $|D_{k,s}(\alpha)| > d_{k,s}(\alpha)$ , که در آن مقدار بحرانی  $d_{k,s}(\alpha)$  به وسیله چندک  $\alpha - 1$  ام از توزیع آماره  $D_{k,s}$  تحت فرضیه  $H_0$  محاسبه می‌شود. از آنجا که توزیع  $D_{k,s}$  تحت فرضیه  $H_0$  پیچیده است، برای تخمین چندک‌های توزیع آماره آزمون برای محاسبه مقادیر بحرانی و همچنین در بخش بعدی برای محاسبه توان‌های تجربی آزمون از روش مونت کارلو استفاده می‌شود.

## ۲۶ آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنس

برای این منظور به ازای مقادیر مختلف  $s$  و مقادیر  $\frac{n}{s}$   $< 10000$  نمونه تصادفی به حجم  $n$  از توزیع نرمال استاندارد تولید نموده و چندک  $\alpha - 1$  ام به عنوان مقدار بحرانی تعیین می‌شود. لازم به ذکر است که چون آماره آزمون نسبت به تبدیل مکان-مقیاس پایا است، توزیع نرمال به صورت استاندارد در نظر گرفته شده است.

### ۱.۳ توان آزمون

در این بخش توان آزمون پیشنهادی با توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. برای این منظور، توزیع‌های جانشین زیر در نظر گرفته می‌شوند.

- توزیع کی دو با درجه آزادی ۱ و ۴ و ۱۰.
- توزیع گاما با پارامتر شکل  $1/5$  و ۲.
- توزیع وایبول با پارامتر شکل  $1/5$  و ۰/۵ و ۲.

مجدداً تأکید می‌شود که چون آماره آزمون مقیاس-پایا است، پارامتر مقیاس در توزیع‌های گاما و وایبول مقدار یک در نظر گرفته شده است. به منظور محاسبه توان آزمون پیشنهادی،  $10000$  نمونه به حجم‌های  $n = 10, 20$  از توزیع‌های جانشین تولید می‌شود. در جدول ۱ توان آزمون پیشنهادی  $D_{k,s}$  و آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) به ازای  $k = 2, n = 10, 20$  ارائه شده‌اند.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند مقادیر  $s$  که منجر به ماکسیمم توان آزمون می‌شود مشابه مقادیر ارائه شده توسط پارک (۱۹۹۹) است. از این رو توان آزمون برای  $n = 10$  به ازای  $s = 3$  و برای  $n = 20$  به ازای  $s = 4$  ارائه شده است. لازم به ذکر است، توان آزمون به ازای مقادیر مختلف  $s$  محاسبه شده و مشاهده شد که در حالت کلی مقدار بهینه  $s$  به توزیع جانشین بستگی دارد. بنابراین نمی‌توان یک مقدار قطعی برای  $s$  تعیین نمود. در اینجا مقدار  $s = 0/5$  پیشنهاد می‌شود که براساس نتایج شبیه‌سازی برای بیشتر توزیع‌های جانشین بیشترین توان را می‌دهد. در جدول ۱ مقدار  $s = 0/5$  در نظر گرفته شده است. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که آماره ارائه شده در مورد توزیع‌های کی دو با درجه آزادی ۴ و ۱۰ و همچنین به ازای  $n = 10$  در مقابل توزیع وایبول با پارامتر ۵ و ۲، و توزیع گاما با پارامتر  $1/5$

و ۲، توان بيشتری نسبت به آزمون حبيبی و ارقامی (۱۳۸۶) دارد، گرچه اين اختلافها بسیار ناچیز هستند.

جدول ۱: مقایسه توانها ( $\times 100$ ) برای  $n = 10, 20$  و  $\alpha = 0.05$

توان آزمون		$n$	توزيع
$D_k$	$D_{k,s}$		
۸۰/۶۳	۷۸/۴۷	۱۰	$\chi^2(1)$
۹۹/۴۴	۹۸/۹۸	۲۰	
۲۵/۴۳	۲۶/۲۶	۱۰	$\chi^2(4)$
۵۸/۴۳	۵۸/۸۴	۲۰	
۱۱/۹۴	۱۲/۴۶	۱۰	$\chi^2(10)$
۲۵/۵۱	۲۷/۷۷	۲۰	
۳۴/۳۳	۳۴/۸۳	۱۰	$Gam(1/5)$
۷۴/۵۳	۷۳/۱۰	۲۰	
۲۵/۳۷	۲۵/۷۳	۱۰	$Gam(2)$
۵۸/۴۹	۵۷/۹۴	۲۰	
۹۳/۱۱	۹۱/۸۸	۱۰	$Wei(0/5)$
۹۹/۹۸	۹۹/۹۵	۲۰	
۱۹/۱۰	۱۹/۵۱	۱۰	$Wei(1/5)$
۴۷/۶۵	۴۷/۲۵	۲۰	
۸/۳۱	۸/۳۶	۱۰	$Wei(2)$
۱۷/۷۶	۱۷/۷۵	۲۰	

#### ۴ توسعه آزمون تقارن توزيع

همان طور که در بخش ۳ به آن اشاره شد، مقدار آماره آزمون در رابطه (۴) فقط برای  $k=2$  محاسبه و به دنبال آن توان آزمون نيز تنها برای  $k=2$  محاسبه شده است. در اين بخش توان آزمون برای مقادير مختلف  $k$  محاسبه شده و مقداري از  $k$  که توان آزمون را ماكسيم کند معروفی می شود.

در اين بخش با توجه به آماره آزمون حبيبی و ارقامی (۱۳۸۶) تفاضل آنتروپی

## ۲۸ آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

رنی آماره‌های مرتب که به یک فاصله از دو انتهای زیرنمونه‌ها قرار دارند به عنوان آماره آزمون در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$D_{k,s}(r) = H_{s,r:k} - H_{s,k-r+1:k} \quad ; \quad k = 2, 3, \dots, \quad r = 1, 2, \dots, [\frac{k}{\alpha}].$$

با اثباتی مشابه لم ۳ برای آماره آزمون فوق، از آن نیز می‌توان به عنوان آماره آزمون تقارن توزیع استفاده نمود، با این تفاوت که می‌توان توان آزمون را برای مقادیر مختلف  $k$  و همچنین  $r$  محاسبه نمود. حال آماره آزمون فوق مشابه روابط (۲) و (۳) به صورت

$$D_{k,s}(r) = -\frac{1}{s-1} \log \frac{\sum_{i=1}^n ((1-t)^{s(r-1)} t^{s(k-r)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n}))^{1-s}}{\sum_{i=1}^n t^{s(r-1)} (1-t)^{s(k-r)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}. \quad (5)$$

برآورد می‌شود، که در آن  $t = \frac{i}{n+1}$  است. حال با استفاده از رابطه (۵) مقادیر بحرانی آزمون  $|D_{k,s}(r)|$  را براساس روش مونت کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی کرده و سپس توان آزمون در سطح  $\alpha = 0.05$  برای نمونه‌هایی به حجم  $(\omega = 20, n = 20)$  و  $(\omega = 4, n = 20)$  برای مقادیر مختلف  $r$  و  $k$  در مقابل توزیع‌های جانشین معرفی شده در بخش ۳ محاسبه شده است. نتایج در جدول ۲ ارائه شده‌اند. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) برای  $n = 10, k = 4, r = 2$  و  $n = 20, k = 10, r = 5$  را پیشنهاد کردند. توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) به ازای این مقادیر نیز در جدول ۲ آورده شده است.

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که افزایش  $k$  تأثیر مثبتی بر توان آزمون داشته، به نحوی که ماکسیمم توان در اکثر موارد برای  $n = 10$  به ازای  $k = 4$  و برای  $n = 20$  به ازای  $k = 10$  به دست می‌آید. به ازای مقدار ثابت  $k$ ، با افزایش  $r$  توان آزمون در بعضی موارد کاهش یافته و در مواردی نیز افزایش می‌یابد. بنابراین نمی‌توان به طور کلی در مورد تأثیر  $r$  بر توان آزمون اظهار نظر کرد. نتایج جدول ۲، در بیشتر موارد کاهش توان آزمون را به ازای افزایش  $r$  نشان می‌دهند.

با مقایسه توان‌های آزمون مبتنی بر  $D_{k,s}(r)$  با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مشاهده می‌شود که آزمون معرفی شده برای  $n = 10$ ، به ازای همه توزیع‌های جانشین به جز توزیع کی دو با درجه آزادی یک و توزیع واپول با درجه آزادی ۲

توان بالاتری دارد، گرچه اين اختلاف در توانها ناچيز است. برای  $n = 20$ ، در همه موارد آزمون ارائه شده توان بيشتری دارد. علاوه بر اين اختلاف توانها در مقاييسه با حالت  $n = 10$  بيشتر است.

همچنین می‌توان گفت که در مقابل توزيع‌های جانشين کی دو هر چقدر درجه آزادی بيشتر می‌شود، یا به عبارتی توزيع به سمت تقارن می‌رود، اختلاف توان آزمون مبتنی بر آنتروپی رنی با توان آزمون حبيبي و ارقامي (۱۳۸۶) بيشتر می‌شود.

## ۵ بحث و نتیجه‌گيري

در اين مقاله، با استفاده از تفاضل آنتروپي رنی آماره‌های مرتب زيرنمونه‌ها، آزمونی برای تقارن توزيع ارائه شد. اين آزمون به ازاي  $k = 2$  (زيرنمونه‌هاي ۲ تايی) تفاوت چشمگيری با آزمون حبيبي و ارقامي (۱۳۸۶) که بر اساس آنتروپي شanon معرفی شده بود، ندارد. اما به ازاي ساير مقادير  $k$  و همچنین مقادير مختلف  $s$ ، بخصوص برای  $n = 20$ ، آزمون پيشنهادي عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. هر چند به طور کلی نمي‌توان شرایطی را مشخص کرد که تحت آنها آزمون پيشنهادي همواره نسبت به آزمون رقيب بهتر عمل کند، اما استفاده از آنتروپي رنی به عنوان آماره آزمون به علت داشتن پaramتر  $s$  در مقاييسه با آنتروپي شanon اين امكان را فراهم می‌سازد که با تغيير  $s$ ، آزمون پرتongan تری به دست آورده شود.

بر اساس نتایج شبيه سازي انجام شده مقدار  $s = 0/5$  پيشنهاد می‌شود. علاوه بر اين با توجه به جدول ۲، توصيه می‌شود برای  $n = 10$  از  $k = 4$  و برای  $n = 20$  از  $k = 10$  استفاده شود.

## تقدير و تشکر

نويسندگان از پيشنهادهای ارزنده داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر اين مقاله شد کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند. در ضمن از حمایت مالي قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز قدردانی و تشکر می‌شود.

جدول ۳: توان آزمون  $(\times 100)$  برای  $n = 10, 20$  و  $s = 0/5$

$\tilde{\Delta}$	$Wei(\gamma)$	$Wei(\lambda, \delta)$	$Wei(\delta)$	$Gam(\gamma)$	$Gam(\lambda, \delta)$	$\chi^2(10)$	$\chi^2(4)$	$\chi^2(1)$	$r$	$k$	$n$	$\alpha$
۸/۲۹	۱۹/۲۷	۹۲/۲۷	۲۹/۳۳	۳۳/۳۳	۱۳/۷۹	۲۴/۱۷	۷۷/۷۹	۱	۲	۱۰	$D_{k,s}$	
۸/۱۶	۱۹/۲۲	۹۳/۲۷	۲۵/۴۲	۳۳/۴۲	۱۲/۵۵	۲۷/۵۱	۷۷/۴۹	-	۲	۱۰		
۸/۰۳	۱۹/۲۲	۹۱/۵۰	۲۹/۴۳	۳۴/۸۹	۱۲/۴۵	۲۹/۹۲	۷۸/۷۹	-	۴	۱۰		
۱۷/۸۴	۴۲/۸۶	۹۹/۹۵	۵۹/۷۸	۱۳/۲۳	۲۹/۷۵	۵۹/۰۱	۹۸/۹۰	-	۲	۱۰		
۱۷/۹۴	۴۲/۹۷	۹۹/۹۷	۵۸/۹۲	۲۳/۹۵	۲۶/۳۰	۵۹/۳۹	۹۸/۹۹	-	۴	۱۰		
۱۸/۳۹	۴۵/۰۵	۹۹/۸۹	۵۹/۲۷	۱۷/۲۸	۲۷/۰۷	۵۸/۳۲	۹۸/۸۸	-	۲	۱۰		
۱۸/۱۲	۳۷/۹۱	۹۹/۹۸	۵۹/۳۳	۱۷/۷۱	۲۶/۴۹	۵۹/۸۱	۹۹/۱۴	-	۲	۱۰		
۱۸/۰۳	۴۲/۱۷	۹۹/۹۲	۵۸/۵۳	۱۷/۱۶	۲۷/۲۷	۵۹/۶۸	۹۸/۸۲	-	۲	۱۰		
۱۷/۳۶	۴۲/۴۲	۹۹/۹۰	۵۹/۳۰	۱۷/۴۴	۲۷/۴۴	۹۰/۳۴	۹۸/۴۸	-	۲	۱۰		
۱۷/۹۲	۴۵/۸۱	۹۹/۹۵	۵۹/۶۱	۱۷/۰۷	۲۶/۴۴	۵۹/۸۴	۹۸/۹۹	-	۱	۱۰		
۱۷/۳۶	۴۲/۲۴	۹۹/۹۴	۵۹/۰۰	۱۷/۳۳	۲۷/۴۷	۵۸/۹۴	۹۹/۰۱	-	۲	۱۰		
۱۷/۳۱	۴۵/۷۲	۹۹/۸۹	۵۸/۷۰	۱۷/۹۱	۲۷/۱۹	۵۷/۸۹	۹۸/۵۷	-	۲	۱۰		
۱۷/۲۸	۴۴/۴۴	۹۹/۹۰	۵۸/۴۷	۱۷/۸۴	۲۶/۱۲	۵۷/۷۴	۹۸/۲۶	-	۴	۱۰		
۱۷/۰۲	۴۲/۱۴	۹۹/۹۸	۵۸/۱۹	۱۷/۳۹	۲۷/۴۰	۵۷/۹۴	۹۸/۰۱	-	۸	۱۰		
۱۸/۸۱	۴۲/۱۷	۹۹/۹۲	۵۹/۰۴	۱۷/۷۲	۲۷/۷۲	۵۹/۶۸	۹۸/۴۸	-	۲	۱۰		
۱۷/۰۲	۴۲/۰۵	۹۹/۹۴	۵۸/۰۰	۱۷/۳۳	۲۷/۴۷	۵۷/۹۴	۹۸/۰۱	-	۸	۱۰		
۱۹/۰۹	۴۳/۹۹	۹۹/۸۹	۵۷/۹۴	۱۷/۸۰	۲۶/۹۷	۵۷/۲۱	۹۸/۱۳	-	۲	۱۰		
۱۹/۹۸	۴۳/۲۴	۹۹/۸۴	۵۷/۷۲	۱۷/۷۷	۲۶/۱۷	۵۷/۰۰	۹۷/۹۳	-	۲	۱۰		
۱۹/۰۹	۱۹/۰۹	۹۲/۸۷	۲۹/۳۸	۳۴/۳۸	۱۲/۵۷	۲۷/۳۳	۷۹/۳۹	-	۴	۱۰	$D_k$	
۱۳/۴۵	۳۳/۴۲	۹۹/۰۸	۴۴/۹۲	۵۷/۰۰	۱۹/۰۶	۴۴/۴۲	۹۷/۸۳	-	۵	۱۰	$D_k$	

آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی ..... ۳۰

## مراجع

- آذرنوش، ح. (۱۳۷۹)، نحسستین درس در آماره‌های ترتیبی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد. ص ۴۰.
- حبيبی راد، آ.، ارقامی، ن. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر مبنای آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد ۱، شماره ۲، ۱۰۹-۱۲۰.
- زمان‌زاده، ا.، ارقامی، ن. (۱۳۸۷)، آزمون‌های نیکویی برآزش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۲، ۱۷۹-۲۰۰.
- Abbasnejad, M., Shokouri, M. (1387), آزمون نیکویی برآزش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۲، ۲۱۱-۲۰۱.
- عليزاده، ن. ه.، عليزاده، ن. ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برآزش بر مبنای آنتروپی با سایر روش‌ها، مجله علوم آماری، جلد ۲، شماره ۱، ۹۷-۱۱۳.

Abbasnejad, M. (2011), Some Goodness of Fit Tests Based on Renyi Information, *Applied Mathematical Sciences*, **39**, 1921-1936.

Ahmad, I. A. and Lin, P. E. (1976), A Nonparametric Estimation of the Entropy of the Absolutely Continuous Distributions, *IEEE Transaction on Information Theory*, **22**, 327-375.

Arizono, I. and Ohta, H. (1989), A Test for Normality Based on Kullback-leibler Information, *The American Statistician*, **43**, 20-23.

آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی ..... ۳۲

- Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **56**, 301-307.
- Baratpour, S. and Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2008), Characterizations based on Renyi Entropy of Order Statistics and Record Values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 2544-2551.
- Correa, J. C. (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **24**, 2439-2449.
- Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974.
- Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, **54**, 739-748.
- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics & Probability Letters*, **20**, 225-234.
- Park, S. (1995), The Entropy of Consecutive Order Statistics, *IEEE Transaction Information Theory*, **41**, 2003-2007.
- Park, S. (1999), A Goodness-of-fit Test for Normality Based on the Sample Entropy of Order Statistics, *Statistics and Probability Letters*, **44**, 359-363.
- Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **54**, 22-26.

Renyi, A. (1961), On Measures of Entropy and Information, *In Proceeding of Fourth Berkeley Symposioum*, Vol. I, UC Press, Berkeley, 547-561.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communications, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423; 623-656.

Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, **38**, 54-59.

Wachowiak, M. P. and Smolikova, R. and Tourassi, G. D. and Elmaghhraby, A. S. (2005), Estimation of Generalized Entropies with Sample Spacing, *Pattern Annal Applic*, **8**, 95-101.

Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **37**, 1479-1499.

## A Test for Symmetric Distributions Based on Renyi Entropy

Abbasnejad, M. and Mohammadi, D.

Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

**Abstract:** In this paper, we characterize symmetric distributions based on Renyi entropy of order statistics in subsamples. A test of symmetry proposed based on the estimated Renyi entropy. Critical values of the test are computed by Monte Carlo simulation. Also we compute the power of the test under different alternatives and show that it behaves better than the test of Habibi and Arghami (1386).

**Keywords:** Renyi Entropy, Estimated Renyi entropy, Order statistics.

**Mathematics Subject Classification (2000):** 94A17, 62G30.