روشی جدید برای اثبات حفظ ویژگی IFR در آماره‌های ترتیبی گسسته

مهدی علی‌محمدی، رضوان قره‌باغی

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا

چکیده: حدود ۶۰ سال قبل اثبات شد که اگر یک متغیر تصادفی پیوسته دارای نرخ خطر صعودی باشد، آنگاه آماره‌های ترتیبی آن نیز دارای نرخ خطر صعودی خواهند بود و این مسئله برای حالت گسسته بدون اثبات باقی مانده بود تا اینکه اخیرا روشی مبتنی بر یک نامساوی انتگرالی برای اثبات آن ارائه شد. در این مقاله، روشی کاملا متفاوت برای حل این مسئله ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های ترتیبی، تابع نرخ شکست، تحدب

۱ مقدمه

آماره‌های ترتیبی نقش بسیار مهمی در شاخه‌های مختلف آمار و احتمال ایفا می‌کنند. علاوه بر این، بررسی رفتار شاخص هایی نظیر تابع نرخ شکست (خطر) در مباحثی همچون تحلیل بقا در آمار زیستی و نظریه قابلیت اعتماد در آمار مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مطالعه این شاخص و بررسی حفظ آن در آماره‌های مختلف، طی چندین دهه توجه محققان را به خود جلب کرده است.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مهدی علی‌محمدی، m.alimohammadi@alzahra.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62G30; 60E15.

مقاله پذیرفته شده

در نظریه قابلیت اعتماد، سیستمی که عملکرد آن مستلزم کار کردن حداقل k جز از m جز آن باشد، به‌عنوان سیستم k از m شناخته می‌شود. آماره ترتیبی $(m-k+1)$- ام طول عمر چنین سیستمی را نشان می‌دهد. بررسی حفظ ویژگی نرخ خطر صعودی[1] (IFR) در این سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در حالت پیوسته، ایساری و پروشان (۱۹۶۳) اثبات کردند که اگر متغیر تصادفی X دارای ویژگی IFR باشد آنگاه آماره‌های ترتیبی آن نیز IFR خواهند بود. روش اثبات در این حالت ساده است، زیرا تابع چگالی آماره‌های ترتیبی در حالت پیوسته دارای فرم بسته‌ای است. اما چالش اصلی این است که در حالت گسسته، تابع جرم احتمال آماره‌های ترتیبی فرم بسته‌ای ندارد. علاوه بر این، ویژگی IFR در سیستم های منسجم که تعمیم‌یافته سیستم‌های k از m هستند حفظ نمی‌شود، یعنی اگر اجزا IFR باشند آنگاه سیستم منسجم IFR نخواهد بود. به همین دلیل، ویژگی دیگری به نام نرخ خطر صعودی در میانگین (IFRA) معرفی شد و بارلو و پروشان (۱۹۷۵) نشان دادند که ویژگی IFRA در سیستم‌های منسجم زمانی که طول عمر اجزا متغیرهای تصادفی پیوسته باشند حفظ می‌شود. بعد از آن، روی و گوپتا (۱۹۹۲) اثبات کردند که زمانی که طول عمر اجزا گسسته باشد آنگاه ویژگی IFRA در سیستم‌های منسجم حفظ می‌شود. دبنابراین حفظ ویژگی IFR در سیستم‌های k از m برای حالت گسسته همچنان بدون اثبات باقی مانده بود.

فرض کنید $X_1, \ldots, X_m$ یک نمونه تصادفی به حجم m از متغیر تصادفی نامنفی X باشد. برای تابع بقای آماره ترتیبی k –ام $X_{k:m}$ داریم (دیوید و ناگاراجا، ۲۰۰۴)

$$\begin{aligned}\bar{F}^{k:m}(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} F^j(x) \bar{F}^{n-j}(x) \\ &= k\binom{n}{k} \int_0^{\bar{F}(x)} y^{m-k}(1-y)^{k-1} dy. \qquad (1)\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که رابطه (۱) ارتباطی با گسسته یا پیوسته بودن توزیع X نداشته و برای هر دو حالت استفاده می شود. برای ادامه کار به چند تعریف نیاز داریم (راکفلر، ۱۹۷۰).

[1] Increasing Failure Rate

گوییم تابع پیوسته f محدب است اگر

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),\ 0<\alpha<1, \tag{2}$$

و لگ- مقعر است اگر

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq f(x)^{\alpha}f(y)^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1. \tag{3}$$

همچنین گوییم دنباله a_n محدب است اگر

$$2a_n\leq a_{n-1}+a_{n+1}, \tag{4}$$

و لگ- مقعر است اگر

$$a_n^2\geq a_{n-1}a_{n+1}. \tag{5}$$

از این به بعد برای تفاوت گذاشتن بین تابع توزیع پیوسته و گسسته به ترتیب از نماد F و F_n استفاده می‌کنیم. یک متغیر تصادفی پیوسته IFR است اگر $\bar{F}$ تابعی لگ-مقعر باشد و یک متغیر تصادفی گسسته IFR است اگر $\bar{F}_n$ دنباله ای لگ-مقعر باشد (بارلو و پروشان، ۱۹۷۵).
علی‌محمدی و ناوارو (۲۰۲۴) نشان دادند که اگر متغیر تصادفی گسسته X، IFR باشد آنگاه با توجه به روابط (۱) و (۵) داریم:

$$\begin{aligned}(\bar{F}_n^{k:m})^2&=\left(k\binom{n}{k}\int_0^{\bar{F}_n}y^{m-k}(1-y)^{k-1}dy\right)^2\\&\geq\left(k\binom{n}{k}\int_0^{\bar{F}_{n-1}}y^{m-k}(1-y)^{k-1}dy\right)\left(k\binom{n}{k}\int_0^{\bar{F}_{n+1}}y^{m-k}(1-y)^{k-1}dy\right)\\&=\bar{F}_{n-1}^{k:m}\bar{F}_{n+1}^{k:m}.\end{aligned}$$

در ادامه بر اساس روند این اثبات، علی‌محمدی و همکاران (۲۰۲۴) حدس زدند که رابطه

$$\Big(\int_a^b f(y)\,dy\Big)^{۲} \;\geq\; \Big(\int_a^b f(\epsilon y)\,dy\Big)\Big(\int_a^b f(\epsilon^{-۱} y)\,dy\Big) \qquad (۶)$$

باید برای هر تابع f که در آن $f(e^x)$ لگ- مقعر است برقرار باشد و ثابت کردند که $f(e^x)$ لگ- مقعر است اگر و تنها اگر (۶) به ازای هر $a < b$ $\circ <$ و $\epsilon > \circ$ برقرار باشد. همچنین آن‌ها ثابت کردند که $f(x)$ لگ- مقعر اگر و تنها اگر

$$\Big(\int_a^b f(y)\,dy\Big)^{۲} \;\geq\; \Big(\int_a^b f(y-\epsilon)\,dy\Big)\Big(\int_a^b f(y+\epsilon)\,dy\Big)$$

به ازای هر $a < b$ و $\epsilon > \circ$ برقرار باشد.

در این مقاله یک روش اثبات کاملا متفاوت بر اساس رابطه (۴) و گسسته‌سازی ابتکاری، روش به کار رفته در بارلو و پروشان (۱۹۷۵) ارائه می‌شود که نسبت به روش ارائه شده توسط علی‌محمدی و ناوارو (۲۰۲۴) و علی‌محمدی و همکاران (۲۰۲۴) ساده‌تر است.

۲ نتایج اصلی

فرض می‌کنید F و G نشان دهنده توابع توزیع متغیرهای تصادفی پیوسته و E نشان دهنده توزیع نمایی استاندارد (پارامتر توزیع نمایی تاثیری در روند کار ندارد) باشد. ترکیب دو تابع را نیز برای سادگی با نماد $FG = (FoG)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱. *(بارلو و پروشان، ۱۹۷۵)* گوییم توزیع F در ترتیب‌بندی محدب از G کوچکتر است و با نماد $F \leq_c G$ نشان می‌دهیم هرگاه $G^{-۱}F$ تابعی محدب باشد.

تعریف ۲. گوییم توزیع F_n در ترتیب‌بندی محدب از G کوچکتر است و با نماد $F_n \leq_c G$ نشان می‌دهیم هرگاه $G^{-۱}F_n$ دنباله‌ای محدب باشد.

اثبات سه لم زیر مشابه بارلو و پروشان (۱۹۷۵) است و برای تکمیل کار در این‌جا آورده می‌شود.

لم ۱. اگر f تابعی محدب و غیر نزولی و a_n دنباله‌ای محدب باشد آنگاه fa_n دنباله‌ای محدب است.

برهان: از محدب بودن a_n داریم $a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ و چون f غیر نزولی است داریم $f(a_n) \leq f(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n+1}}{2})$. حال چون f محدب است طبق رابطه (۲) به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ داریم $f(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n+1}}{2}) \leq \frac{1}{2}f(a_{n-1}) + \frac{1}{2}f(a_{n+1})$. در نتیجه $2fa_n \leq fa_{n-1} + fa_{n+1}$.

لم ۲. اگر $F_n \leq_c F$ و $F \leq_c G$، آنگاه $F_n \leq_c G$.

برهان: اگر در لم ۱ به جای f و a_n به‌ترتیب $G^{-1}F$ و $F^{-1}F_n$ قرار داده شود، آنگاه داریم $G^{-1}FF^{-1}F_n = G^{-1}F_n$، که دنباله‌ای محدب است.

لم ۳. اگر $F_n \leq_c G$، آنگاه $F_n^{k:m} \leq_c G^{k:m}$.

برهان: بر اساس رابطه (۱) می‌توان نوشت $F_n^{k:m} = B^{k:m}F_n$، که در آن

$$B^{k:m}(x) = k\binom{n}{k}\int_0^x y^{k-1}(1-y)^{m-k}dy.$$

در نتیجه $G^{k:m^{-1}}F_n^{k:m} = (B^{k:m}G)^{-1}B^{k:m}F_n = G^{-1}B^{k:m^{-1}}B^{k:m}F_n = G^{-1}F_n$.

قضیه ۱. *IFR* بودن متغیر تصادفی گسسته X با $F_n \leq_c E$ معادل است.

مقاله پذیرفته شده

برهان: چون $E^{-1}(x) = -\ln(1-x)$، طبق تعریف ۲ و رابطه (۴) داریم

$$
\begin{aligned}
&-2\ln(1-F_n) \leq -\ln(1-F_{n-1}) - \ln(1-F_{n+1})\\
&\leftrightarrow \ln(\bar{F}_n)^2 \geq \ln(\bar{F}_{n-1}) + \ln(\bar{F}_{n+1})\\
&\leftrightarrow \ln(\bar{F}_n)^2 \geq \ln(\bar{F}_{n-1}\bar{F}_{n+1})\\
&\leftrightarrow (\bar{F}_n)^2 \geq \bar{F}_{n-1}\bar{F}_{n+1},
\end{aligned}
$$

و اثبات تمام است.

قضیه ۲. اگر متغیر تصادفی گسسته X، *IFR* باشد آنگاه آماره ترتیبی $X_{k:m}$ به ازای $1 \leq k \leq m$، *IFR* است.

برهان: طبق قضیه ۱ کافی است نشان دهیم که $F_n^{k:m} \leq_c E$. طبق قضیه ۱، IFR بودن X معادل است با $F_n \leq_c E$ و در نتیجه بر اساس لم ۳ داریم $F_n^{k:m} \leq_c E^{k:m}$ از طرفی تابع چگالی آماره‌های ترتیبی از توزیع نمایی، لگ- مقعر هستند و چون لگ- مقعر بودن، IFR بودن را نتیجه می‌دهد (علی‌محمدی و همکاران، ۲۰۱۶) داریم $E^{k:m} \leq_c E$. در نهایت طبق لم ۲ نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید و اثبات تمام است.

۳ یک کاربرد از قضیه ۲

طول عمر یک سیستم k از m توسط آماره ترتیبی $(m-k+1)$- ام تعیین می‌شود (بارلو و پروشان، ۱۹۷۵). تابع نرخ خطر در حالت گسسته

$$h_n = \frac{\bar{F}_{n-1} - \bar{F}_n}{\bar{F}_{n-1}} = 1 - \frac{\bar{F}_n}{\bar{F}_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

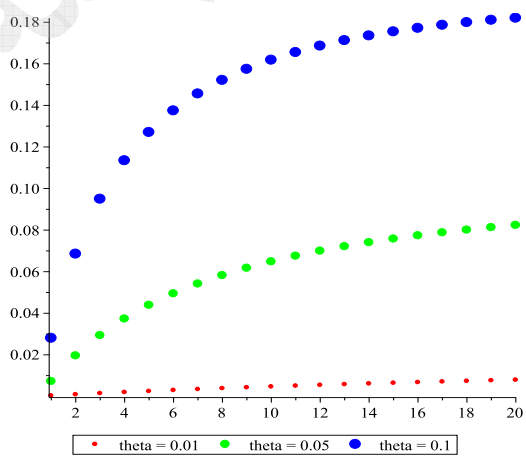
بنابراین برای نرخ خطر سیستم k از m داریم

$$h_n^{m-k+1:m} = 1 - \frac{\bar{F}_n^{m-k+1:m}}{\bar{F}_{n-1}^{m-k+1:m}},\ n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

ابتدا سیستمی را مثال می‌زنیم که در آن طول عمر اجزا، تعداد دفعات روشن و خاموش شدن تا زمان خرابی است (دمبینسکا، ۲۰۱۸). یک سیستم ۲ از ۳ که طول عمر اجزای آن دارای توزیع هندسی با پارامتر θ است را در نظر بگیرید. در اینجا متغیر تصادفی هندسی تعداد دفعات انجام صحیح وظیفه محوله تا زمان خرابی است، به عبارت دیگر موفقیت در اینجا خراب شدن جز است. طبق رابطه (۱) و (۷) داریم

$$\begin{aligned} h_n^{2:3} &= 1 - \frac{\bar{F}_n^{2:3}}{\bar{F}_{n-1}^{2:3}} \\ &= 1 - \frac{(1-\theta)^{3n} + 3(1-(1-\theta)^n)(1-\theta)^{2n}}{(1-\theta)^{3(n-1)} + 3(1-(1-\theta)^{n-1})(1-\theta)^{2(n-1)}}. \end{aligned}$$

در شکل ۱ تابع نرخ خطر سیستم به ازای θ های مختلف رسم شده است که همگی نشان دهنده IFR بودن آن است. لازم به ذکر است که توزیع هندسی هم IFR و هم DFR است، زیرا نرخ خطر آن ثابت



شکل ۱: تابع نرخ خطر سیستم ۲ از ۳ با اجزای هندسی به ازای $\theta = 0/01, 0/05, 0/1$

مقاله پذیرفته شده

است. اما همان‌طور که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود، نرخ خطر سیستم IFR است.

به عنوان مثالی دیگر، در مبحث قابلیت اعتماد سلاح‌ها، تعداد گلوله‌های شلیک‌شده تا خرابی، مهم‌تر از عمر سلاح است (شیکد و همکاران، ۱۹۹۵). در نتیجه در اینجا نیز با یک متغیر تصادفی طول عمر گسسته سر و کار داریم. فرض کنید یک اسلحه سبک (در حالت ساده) از دو جز ماشه و گلنگدن تشکیل شده باشد که طول عمر هر کدام تعداد دفعاتی است که وظیفه خود را به درستی انجام می‌دهند. از آنجایی که عمل شلیک گلوله زمانی با موفقیت انجام می‌شود که هر دو جز به درستی کار کنند، با یک سیستم سری یا به عبارتی با یک سیستم ۲ از ۲ سر و کار داریم. طبق رابطه (۱) و (۷) داریم

$$h_n^{1:2} = 1 - \frac{\bar{F}_n^{1:2}}{\bar{F}_{n-1}^{1:2}} = 1 - \frac{(1-\theta)^{2n}}{(1-\theta)^{2(n-1)}} = 1 - (1-\theta)^2,$$

که مقداری ثابت (و در نتیجه IFR) است. البته این مسئله اتفاقی نبوده و به این خاطر است که طبق یک مشخصه سازی، متغیر تصادفی گسسته X دارای توزیع هندسی است اگر و تنها اگر $X_{1:m}$ دارای توزیع هندسی باشد (دیوید و ناگاراجا، ۲۰۰۴).

بحث و نتیجه‌گیری

یکی از مسائل مهم در تحلیل بقا و قابلیت اعتماد بسته بودن ویژگی‌های سالخوردگی در آماره‌های گوناگون از جمله آماره‌های ترتیبی است. بسته بودن ویژگی IFR در آماره‌های ترتیبی از مسائل جالبی است که فاصله زمانی اثبات آن برای حالت پیوسته و گسسته به بیش از شش دهه می‌رسد. در این مقاله یک اثبات متفاوت از آنچه که اولین بار علی‌محمدی و ناوارو (۲۰۲۴) مطرح کرده بودند با استفاده از تعریف ترتیب‌بندی محدب، اثبات چندین لم در این زمینه و تعریف IFR بودن متغیر تصادفی گسسته بر اساس ترتیب‌بندی محدب با متغیر تصادفی نمایی ارائه شد.

تقدیر و تشکر

از سردبیر محترم، داوران گرامی و ویراستار مجله که مقاله را داوری کردند و نظرات ارزنده آن ها باعث بهبودی مقاله شد قدردانی می‌شود.

مراجع

Alimohammadi, M., Alamatsaz, M.H. and Cramer, E. (2016), Convolutions and Generalization of Logconcavity: Implications and Applications, *Naval Research Logistics*, **63**(2), 109-123.

Alimohammadi, M., Balakrishnan, N. and Simon, T. (2024), An Inequality for Log-concave Functions and Its Use in the Study of Failure Rates, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **38**(4), 695-704.

Alimohammadi, M. and Navarro, J. (2024), Resolving an Old Problem on the Preservation of the IFR Property Under the Formation of k-out-of-n Systems with Discrete Distributions, *Journal of Applied Probability*, **61**(2), 644-653.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, New York: Holt, Rinehart and Winston.

David, H.A. and Nagaraja, H.N. (2004), *Order Statistics*, John Wiley & Sons.

Dembińska, A. (2018), On Reliability Analysis of k-out-of-n Systems Consisting of Heterogeneous Components with Discrete Lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability*, **67**(3), 1071-1083.

Esary, J.D. and Proschan, F. (1963), Relationship Between System Failure Rate and Component Failure Rates, *Technometrics*, **5**(2), 183-189.

Rockafellar, R. (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.

Roy, D. and Gupta, R.P. (1992), Classifications of Discrete Lives, *Microelectronics Reliability*, **32**(10), 1459-1473.

Shaked, M., Shanthikumar, J.G., and Valdez-Torres, J.B. (1995), Discrete Hazard Rate Functions, *Computers & Operations Research*, **22**(4), 391-402.

مقاله پذیرفته شده

A New Method for Proving the Preservation of IFR Property in Discrete Order Statistics

Mahdi Alimohammadi, Rezvan Gharebaghi

Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Alzahra University, Tehran, Iran.

Abstract: It was proved about 60 years ago that if a continuous random variable X has an increasing failure rate then its order statistics will also be increasing failure rate, and this problem remained unproved for the discrete case until recently a proof method using an integral inequality was provided. In this article, we present a completely different method to solve this problem.

Keywords: Order statistics, Failure rate function, Convexity.

Mathematics Subject Classification (2010): 62G30; 60E15.

مقاله پذیرفته شده