تاثیر ضریب همبستگی بر میزان تغییر آنتروپی توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی

شهرام منصوری[۱]، عین اله پاشا[۲]

[۱]مرکز علوم پایه، دانشگاه صنعت آب و برق (عباسپور)

[۲]گروه ریاضی، دانشگاه تربیت معلم

چکیده : در این مقاله روشی برای بدست آوردن تابع توزیع احتمال توأم دو متغیره به طور تصادفی مرتب شده با معلوم بودن توزیع‌های حاشیه‌ای و ضریب همبستگی ارائه شده و نحوه اجرای آن در مثالی توضیح داده شده است. سپس به محاسبه میزان کاهش آنتروپی توزیع احتمال توام ماکسیمم آنتروپی با حاشیه‌ای‌های معین، وقتی قید ضریب همبستگی نیز لحاظ گردد، پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی : متغیرهای به طور تصادفی مرتب شده، اصل ماکسیمم آنتروپی، فاصله کولبک لیبلر.

۱ مقدمه

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توابع چگالی احتمال $G(x)$ و $H(y)$ باشند، گوییم X و Y متغیرهای بطور تصادفی مرتب شده هستند، هرگاه $X \leq Y \quad a.s.$ باشد، در این صورت به ازای هر z ,$G(z) \leq H(z)$. می‌دانیم توابع چگالی احتمال توأم مختلفی می‌توانند دارای توزیع‌های احتمال حاشیه‌ای مشابهی باشند. در این مقاله با رهیافت اصل ماکسیمم آنتروپی، توزیع توأم معین می‌شود. تابع توزیع ماکسیمم آنتروپی یک متغیره و چند متغیره تحت برخی قیود توسط بسیاری از محققان مانند جینز (۱۹۶۸) و کاپور (۱۹۸۹) مورد مطالعه قرار گرفته است.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: شهرام منصوری، mansoury456@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲B۱۰

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

میویسین و همکاران (1993a) توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی با حاشیه‌ای‌های معلوم و ضریب همبستگی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین میویسین و همکاران (1993b) و (۱۹۹۴) تاثیر استقلال متغیرهای تصادفی را روی عدم حتمیت مطالعه کردند. میویسین و همکاران (۱۹۹۵) با شرط رتبه همبستگی، توزیع با حداقل اطلاع را برای استفاده در تحلیل عدم قطعیت بکار بردند. منصوری و همکاران (۲۰۰۵)، یک فرم کلی برای تابع توزیع احتمال چند متغیره ماکسیمم آنتروپی بیزی را با شرط معلوم بودن توابع چگالی حاشیه‌ای و ماتریس کوواریانس متغیرهای تصادفی ارائه کردند. توزیع توأم ماکسیمم آنتروپی برای متغیرهای بطور تصادفی مرتب شده توسط استراسن (۱۹۶۵) و کامایی و همکاران (۱۹۷۷) مورد مطالعه قرار گرفته است. کیفیر (۲۰۰۹)، روشی برای به دست آوردن توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی برای داده‌های بطور تصادفی مرتب شده ارائه داد. در بخش ۲ این مقاله با روشی دیگر به همان نتایج کیفیر (۲۰۰۹)، می‌رسیم و با مثالی روش ارائه شده توضیح داده می‌شود. در بخش ۳ آنتروپی توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی مقایسه می‌شوند. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۴ بیان خواهد شد.

۲ توزیع توأم احتمال ماکسیمم آنتروپی دو متغیره به طور تصادفی مرتب شده

در این بخش نتایج لازم برای تعیین تابع توزیع احتمال ماکسیمم آنتروپی بیان می‌شود.

قضیه ۱ : (منصوری و همکاران ۲۰۰۵) اگر L^2 مجموعه توابع اندازه پذیر باشد که مربع آن‌ها انتگرال پذیر است، آنگاه برای هر دو تابع h_1 و h_2 در L^2، $h_1 \overset{a.s.}{=} h_2$ است اگر و تنها اگر برای هر تابع دلخواه K تساوی

$$\int_R K(x)h_1(x)dx = \int_R K(x)h_2(x)dx \tag{1}$$

برقرار باشد.

تعریف ۱ : با معیار شانون آنتروپی دو متغیر تصادفی پیوسته (X,Y) با تابع چگالی احتمال $f(x,y)$ که با نماد $H(X,Y)$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$H(X,Y) = E(-\ln f(X,Y)) = -\int\int_{R^2} f(x,y)(\ln f(x,y))dxdy. \tag{2}$$

تعریف شده است.

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

تعریف ۲ : فاصله کولبک لیبلر اندازه‌ای است که فاصله بین دو توزیع را تعیین می‌کند. برای دو تابع چگالی (جرم) احتمال $f(x)$ و $g(x)$ این فاصله به صورت

$$D(f \parallel g) = E_f \ln \frac{f(X)}{g(X)}$$

تعریف می‌شود. بدیهی است که اگر $f = g$، آنگاه $D(f \parallel g) = 0$.

قضیه ۲ : اگر $g,\ h \in L^2$ توابع چگالی حاشیه‌ای یک کلاس از توزیع احتمال توأم دو متغیر بطور تصادفی مرتب شده بصورت $X \le Y \quad a.s.$ باشند، آنگاه تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی بطور یکتا دارای فرم کلی

$$f_M(x,y) = f_1(x) f_2(y) I(x \le y) \tag{3}$$

است، که در آن f_1 و f_2 از حل دستگاه معادلات تابعی

$$\begin{cases} \int_R f_1(x) f_2(y) I(x \le y) dy = g(x) \\ \int_R f_1(x) f_2(y) I(x \le y) dx = h(y) \end{cases} \tag{4}$$

به دست می‌آیند.

برهان چون توابع چگالی حاشیه‌ای $f(x,y)$ معلوم هستند بنابراین برای توابع دلخواه N و M میانگین‌های

$$\mu_1 = E(M(X)), \quad \mu_2 = E(N(Y)) \tag{5}$$

معلوم خواهند بود. با توجه به قضیه ۱ معلوم بودن h و g معادل معلوم بودن $E(N(Y))$ و $E(M(X))$ است. لذا برای تعیین تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی تحت شرایط (۵) باید (۲) ماکسیمم گردد. حال با استفاده از روش اویلر-لاگرانژ (کاپور، ۱۹۸۹)، لاگرانژین به صورت

$$\begin{aligned} L &= \int\int_{R^2} f(-\ln f) dxdy + \lambda_1 \Big(\int\int_{R^2} M(x) f dxdy - \mu_1\Big) \\ &\quad + \lambda_2 \Big(\int\int_{R^2} N(y) f dxdy - \mu_2\Big) \\ &= \int\int_{R^2} \{-f \ln f + (\lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)) f\} dxdy - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2. \end{aligned}$$

است. چون $-f \ln f + (\lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)) f$ تابعی مقعر و پیوسته بر حسب f است جواب بهینه، بطور یکتا آنتروپی را ماکسیمم می‌کند. لذا تابع چگالی احتمال

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

ماکسیمم آنتروپی جواب معادله

$$\frac{\partial}{\partial f}\{-f\ln f+(\lambda_۱ M(x)+\lambda_۲ N(y))f\}=۰$$

است. بنابراین

$$f_M(x,y)=e^{\lambda_۱ M(x)}e^{\lambda_۲ N(y)}I(x\leq y)$$

واضح است که f_M حاصل ضرب دو تابع بر حسب x و y به صورت

$$f_M(x,y)=f_۱(x)f_۲(y)I(x\leq y)$$

است. از آنجا که h و g توابع چگالی حاشیه‌ای هستند، $f_۱$ و $f_۲$ از (۴) قابل حصول می‌باشند.

قضیه ۳ : اگر $h\in L^۲$ و g توابع چگالی حاشیه‌ای یک کلاس از توزیع احتمال توأم دو متغیر بطور تصادفی مرتب شده بصورت $X\leq Y \quad a.s.$ و با ضریب همبستگی ρ باشند، آنگاه تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی بطور یکتا دارای فرم کلی

$$f_M(x,y)=f_۱(x)f_۲(y)e^{\lambda xy}I(x\leq y),$$

است، که در آن λ، $f_۱$ و $f_۲$ از حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases}\int_R f_۱(x)f_۲(y)e^{\lambda xy}I(x\leq y)dy=g(x)\\ \int_R f_۱(x)f_۲(y)e^{\lambda xy}I(x\leq y)dx=h(y)\\ \int\int_{R^۲} xyf_۱(x)f_۲(y)e^{\lambda xy}I(x\leq y)dxdy=\rho\sigma_X\sigma_Y+\mu_X\mu_Y\end{cases} \qquad (۶)$$

به دست می‌آیند.

برهان چون توابع چگالی حاشیه‌ای $f(x,y)$ معلوم هستند، پس برای توابع دلخواه N و M میانگین‌های

$$\mu_۱=E(M(X)),\ \mu_۲=E(N(Y)) \qquad (۷)$$

نیز معلوم هستند. با توجه به قضیه ۱، معلوم بودن h و g معادل معلوم بودن $E(N(Y))$ و $E(M(X))$ است. چون ضریب همبستگی مقدار معلوم ρ است. بنابر این عبارت

$$EXY=\rho\sigma_X\sigma_Y+\mu_X\mu_Y=C \qquad (۸)$$

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

معلوم می‌باشد. حال برای تعیین تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی تحت شرایط (۷) و (۸) باید (۲) ماکسیمم گردد. با استفاده از روش اویلر- لاگرانژ، لاگرانژین به صورت

$$\begin{aligned} L &= \int\int_{R^2} f(-\ln f dxdy + \lambda(\int\int_{R^2} xyf dxdy - C) \\ &+\lambda_1(\int\int_{R^2} M(x)f dxdy - \mu_1) + \lambda_2(\int\int_{R^2} N(y) f dxdy - \mu_2) \\ &= \int\int_{R^2} \{-f\ln f + (\lambda xy + \lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y))f\} dxdy \\ &-(\lambda C + \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2). \end{aligned}$$

است. حال چون $-f\ln f + (\lambda xy + \lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y)))f$ تابعی مقعر و پیوسته بر حسب f است جواب بهینه، بطور یکتا آنتروپی را ماکسیمم می‌کند. لذا تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی جواب معادله

$$\frac{\partial}{\partial f}\{-f\ln f + (\lambda xy + \lambda_1 M(x) + \lambda_2 N(y))f\} = 0,$$

است. بنابراین

$$f_M(x,y) = e^{\lambda_1 M(x)} e^{\lambda_2 N(y)} e^{\lambda xy}, \quad x \leq y.$$

در نتیجه فرم تابع چگالی احتمال ماکسیمم آنتروپی به صورت

$$f_M(x,y) = f_1(x) f_2(y) e^{\lambda xy} I(x \leq y)$$

است. از آنجایی که توابع چگالی حاشیه‌ای و ضریب همبستگی معلوم هستند بدیهی است که λ، f_1 و f_2 از (۶) قابل حصول می‌باشند.

مثال ۱ : فرض کنیم X و Y متغیرهای بطور تصادفی مرتب شده، به صورت $Y \leq X \quad a.s.$ باشند و بترتیب دارای توزیع‌های بتای $B(3,3)$ و $B(1,3)$ باشند، در این صورت فرم تابع چگالی احتمال توأم (X,Y) به صورت

$$f_M(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)\, I(0 \leq y \leq x \leq 1)$$

است لذا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای به صورت

$$\begin{cases} g(x) = \int_R f_M(x,y)dy = \int_0^x f_1(x) f_2(y) dy \\ h(y) = \int_R f_M(x,y)dx = \int_y^1 f_1(x) f_2(y) dx \end{cases}$$

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

هستند. از طرفی با توجه به مفروضات مثال توابع چگالی احتمال به صورت

$$g(x) = 30x^2(1-x)^2, \quad 0 < x < 1; \quad h(y) = 3(1-y)^2, \quad 0 < y < 1$$

هستند، لذا

$$\begin{cases} 30x^2(1-x)^2 = f_1(x)\int_0^x f_2(y)dy \\ 3(1-y)^2 = f_2(y)\int_y^1 f_1(x)dx \end{cases}$$

با تعریف $A(x) = \int_0^x f_2(y)dy$ و $B(y) = \int_y^1 f_1(x)dx$ داریم

$$\begin{cases} A(x)B'(x) = -30x^2(1-x)^2 \\ A'(x)B(x) = 3(1-x)^2 \end{cases} \tag{9}$$

که در آن $A'(x)$ و $B'(x)$ به ترتیب مشتق‌های $A(x)$ و $B(x)$ نسبت به x هستند. در نتیجه $[A(x)B(x)]' = -30x^2(1-x)^2 + 3(1-x)^2$ و از آنجا

$$A(x)B(x) = -6x^5 + 15x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 3x \tag{10}$$

از (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{3(1-x)^2}{-6x^5 + 15x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 3x}$$

پس از انتگرال گیری داریم

$$\ln A(x) = -\frac{1}{3}\ln(x-1) + \ln x - \frac{2}{3}\ln(2x+1) + C_1'$$

بنا بر این

$$A(x) = C_1\frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}}.$$

به طور مشابه از (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود

$$\frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{30x^2(1-x)^2}{-6x^5 + 15x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 3x}$$

پس از اندکی محاسبات داریم $B(x) = C_2(1-x)^{\frac{1}{3}}(2x+1)^{\frac{5}{3}}$ حال مشتق‌های $A(x)$ و $B(x)$ را عبارتند از

$$A'(x) = C_1\frac{-1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}(2x+1)^{\frac{5}{3}}}, \quad B'(x) = 10C_2x(1-x)^{\frac{7}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}$$

لذا تابع چگالی احتمال توأم (X,Y) به صورت

$$\begin{aligned} f_M(x,y) &= f_1(x)f_2(y)I(0 \leq y \leq x \leq 1) \\ &= -A'(y)B'(x)I(0 \leq y \leq x \leq 1) \\ &= C\frac{x(1-x)^{\frac{7}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}}{(1-y)^{\frac{4}{3}}(2y+1)^{\frac{5}{3}}}I(0 \leq y \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

به دست می‌آید. از آنجا که f_M یک تابع چگالی احتمال توأم است $\int\int_{R^2} f_M(x,y)dxdy = 1$ و از آن $C = 1/91$ به دست می‌آید. بنابراین

$$f_M(x,y) = 1/91\frac{x(1-x)^{\frac{7}{3}}(2x+1)^{\frac{2}{3}}}{(1-y)^{\frac{4}{3}}(2y+1)^{\frac{5}{3}}}I(0 \leq y \leq x \leq 1)$$

۳ مقایسه آنتروپی توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی تحت قیود مختلف

فرض کنید E $(x = (x_1 \cdots x_n)' \in E)$ یک ناحیه محدب R^n باشد و $\mathcal{F}_1$ را مجموعه توابع چگالی (جرم) احتمال توأم بردار تصادفی $X = (X_1, \cdots, X_n)'$ تعریف شود که دارای محمل E هستند و دارای توابع چگالی (جرم) احتمال حاشیه‌ای $g_i, \quad i = 1, \cdots, n$ باشند. یعنی:

$$\mathcal{F}_1 = \{f : E \longrightarrow R^+ \mid \text{هستند.}\ f\ \text{توابع چگالی (جرم) احتمال}\ g_i;\ \ i = 1, \cdots, n\}$$

فرض کنید $\mathcal{F}_2$ $(\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1)$, مجموعه توابع چگالی (جرم) احتمال توام در $\mathcal{F}_1$ باشند که ماتریس کوواریانس آن $\sum$ باشد، یعنی

$$\mathcal{F}_2 = \{f \mid f \in \mathcal{F}_1;\ \ Cov(X) = \Sigma\}$$

تعیین توابع چگالی (جرم) احتمال ماکسیمم آنتروپی روی $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ با معیار شانون به صورت

$$\begin{aligned} f(x) &= arg\max_{f \in \mathcal{F}_1} H(f)I(x \in E), \\ k(x) &= arg\max_{f \in \mathcal{F}_2} H(f)I(x \in E). \end{aligned}$$

مورد نظر است.

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

قضیه ۴ تابع چگالی (جرم) احتمال توأم ماکسیمم آنتروپی روی مجموعه $\mathcal{F}_۱$ به صورت

$$f(x)=\prod_{i=۱}^{n} f_i(x_i)I(x\in E)$$

است، که در آن $f_n,\cdots,f_۱$ از حل دستگاه معادلات تابعی

$$\int_E f(x)dx_{-i}=g_i(x_i);\quad i=۱,\cdots,n$$

به دست می‌آید، که در آن $dx_{-i}=dx_۱\cdots dx_{i-۱}dx_{i+۱}\cdots dx_n$ است.
برهان با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت به عنوان توزیع پیشین این حکم، نتیجه قضیه ۱ در مرجع ۵ است .

قضیه ۵ : تابع چگالی احتمال (تابع احتمال) توأم چند متغیره ماکسیمم آنتروپی روی مجموعه $\mathcal{F}_۲$ به صورت

$$k(x)=\prod_{i=۱}^{n} k_i(x_i)e^{(x-\mu)'\Lambda(x-\mu)}I(x\in E)$$

است، که در آن ها $\mu=(\mu_۱,\cdots,\mu_n)$ ،$\mu_i=EX_i$ است و $f_i, i=۱,\cdots,n$ و $\Lambda=(\lambda_{i,j})_{m.n}$ از حل دستگاه معادله‌های حاصل از توزیع‌های حاشیه‌ای و ماتریس و واریانس کوواریانس به دست می‌آید.
برهان با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت به عنوان توزیع پیشین این حکم، نتیجه قضیه ۲ در مرجع ۵ است.
می‌دانیم با افزایش اطلاعات مقدار آنتروپی کاهش پیدا می‌کند. بنابراین انتظار می‌رود با افزایش تعداد قیود آنتروپی کاهش یابد. در این بخش ثابت می‌شود، میزان کاهش آنتروپی تابع چگالی (تابع احتمال) توام بدست آمده در قضیه ۵ نسبت به تابع چگالی (جرم) احتمال توام در قضیه ۴ برابر فاصله کولبک k نسبت به f است. به عبارت دیگر قضیه زیر را داریم

قضیه ۶ : با مفروضات قضیه‌های ۴ و ۵ داریم $D(k\|f)=H(f)-H(k)$ و $H(f)\geq H(k)$.

برهان چون توابع چگالی احتمال توأم $f(x_۱,\cdots,x_n)$ و $k(x_۱,\cdots,x_n)$ دارای توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای یکسان $g(x_۱)$، $\cdots$ و $g(x_n)$ می‌باشد، به ازای هر

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

$i = ۱, \cdots, n$، داریم:

$$\int\limits_{R^n} f(x_۱, \cdots, x_n) \ln f_i(x_i) dx = E_f(\ln f_i(X_i))$$
$$= E_{g_i}(\ln f_i(X_i))$$
$$= E_k(\ln f_i(X_i))$$
$$= \int\limits_{R^n} k(x_۱, \cdots, x_n) \ln f_i(x_i) dx. \quad (۱۱)$$

با استفاده از تعریف ۱ داریم

$$\begin{aligned} H(f) - H(k) &= \int\limits_{R^n} k \ln k dx - \int\limits_{R^n} f \ln f dx \\ &= \int\limits_{R^n} k \ln k dx - \int\limits_{R^n} f \sum_{i=۱}^{n} \ln f_i(x_i) dx \\ &= \int\limits_{R^n} k \ln k dx - \sum_{i=۱}^{n} \int\limits_{R^n} f \ln f_i(x_i) dx, \end{aligned} \quad (۱۲)$$

با قرار دادن رابطه (۱۱) در (۱۲) داریم:

$$\begin{aligned} H(f) - H(k) &= \int\limits_{R^n} k \ln k dx - \sum_{i=۱}^{n} \int\limits_{R^n} k \ln f_i(x_i) dx \\ &= \int\limits_{R^n} k \ln k dx - \int\limits_{R^n} k \ln f dx \\ &= \int\limits_{R^n} k \ln \frac{k}{f} dx = D(k \| f) \end{aligned}$$

بنابراین

$$H(f) - H(k) = D(k \| f)$$

چون $D(k \| f) \geq ۰$ است نتیجه می‌گیریم: $H(f) \geq H(k)$

۴ بحث و نتیجه‌گیری

روش‌های معمول برای تعیین توزیع‌های ماکسیمم آنتروپی یک متغیره و چند متغیره تحت قیود معین برای توزیع‌های چند متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای و ضریب

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

همبستگی معین بین متغیرها از طریق اندازه آنتروپی شانون تعمیم داده شده است.
فرض کنید $f(x_1, \cdots, x_n)$ توابع چگالی یا جرم احتمال توأم ماکسیمم آنتروپی با اندازه شانون باشد، در این صورت

الف- اگر فقط توزیع حاشیه‌ای X_1 معلوم باشد، آنگاه

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) I((x_1, \cdots, x_n) \in E)$$

ب- اگر توزیع‌های حاشیه‌ای X_1 و X_2 معلوم باشند، آنگاه

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) I((x_1, \cdots, x_n) \in E)$$

ج- اگر تمام توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم باشند، آنگاه

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) I((x_1, \cdots, x_n) \in E)$$

د- اگر توزیع حاشیه‌ای X_1 و X_2 و ضریب همبستگی بین آنها معلوم باشند، آنگاه

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) e^{\lambda_1 x_1 x_2} I((x_1, \cdots, x_n) \in E)$$

هـ- اگر توزیع‌های حاشیه‌ای X_1، $\cdots$ و X_n و ضریب همبستگی بین هر دو متغیر معلوم باشد، آنگاه

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \exp\{\sum_{i<j} \lambda_{i,j} x_i x_j\} I((x_1, \cdots, x_n) \in E)$$

که در آنها توابع f_1، $\cdots$، f_n و ثابت‌های λ_1، λ_2 و $\cdots$ با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای تعیین می‌گردند. همچنین ثابت شد در توزیع های دو متغیره اگر علاوه بر توزیع‌های حاشیه ای نیز ضریب همبستگی به قیود اضافه شود میزان کاهش آنتروپی برابر فاصله کولبک لیبلر آن دو تابع (چگالی) احتمال آنها است. از مواردی که نیاز به مطالعه بیشتر دارد، تعیین حداقل و حداکثر ضریب همبستگی بین هر دو متغیر تصادفی در یک محمل معین برای توزیع احتمال بدست آمده در قضیه ۴ می‌باشد. همچنین تعیین توابع توزیع ماکسیمم آنتروپی با استفاده از سایر اندازه‌های آنتروپی مانند اندازه رنی، کاپور و ... از مواردی هستند که نیاز به تحقیقات بعدی دارند.

مراجع

Jaynes, E. T. (1968), Prior Probabilities. *IEEE Transaction* **4**, 227-248

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]

Kamae, T., U. Krengel, and G. L. O'Brien (1977), Stochastic Inequalities on Partially Ordered Spaces, *The Annals of Probability*, **5**, 899-912.

Kapur, J. N. (1989), Maximum Entropy Models in Science and Engineering. *Willey eastern limited, India.*

Strassen, V. (1965), The Existence of Probability Measures with Given Marginals, *Annals of Mathematical Statistics,* **36** ,423-439.

Meeuwissen, M. H. (1993a). Probability Distributions with Given Marginals and Given Correlation that Have Maximum Entropy. *Report 93-81, The Faculty of Technical Mathematics and Informatics,* Delf, The Netherland.

Meeuwissen, M. H. (1993b), Dependent Random Variables in Uncertainty Analysis *PhD Thesis, The faculty of Technical Mathematics and Informatics,* Delf, The Netherland

Meeuwissen, M. H. (1994), Tree Dependent Random Variables *Report 94-28, TWI,* Delf, The Netherland

Meeuwissen, M. H. and Bedford, T. (1995), Minimally Informative Distributions with Given Rank Correlation for Use in Uncertainty Analysis *Report 95-135 , The faculty of Technical Mathematics and Informatics,* Delf, The Netherland

Mansoury, S. Pasha, E. and Mohammadzadeh M. (2005), Determination of Maximum Bayesian Entropy Probability Distribution *Journal of Sciences Islamic Republic of Iran* **16**, 339-345

Kiefer, N. (2009), The Maximum Entropy Distribution for Stochastically Ordered Random Variables with Fixed Marginals *Internet. Cornell University Departments of Economics and Statistical Sciences, Working Paper,* 09-01.

The Effect of Correlation on the Change of Entropy of the Maximum Entropy joint Distribution

Mansoury, S. and Pasha, E.

Abbaspour University of Technology, Tehran, Iran.

Tarbiat Moallem University, Tehran, Iran.

Abstract: Stochastically ordered random variables with given marginal distributions are combined into a joint distribution preserving the ordering and the marginals using a maximum entropy principle. A closed-form of the maximum entropy density function is obtained. Next we have compared the entropies of maximum entropy distributions, under two constraints The constraints are either prescription of marginal distributions and the marginals and covariance matrix

Keywords: Stochastically ordered random variables, Maximum entropy principle , Kullback Liebler distance.

Mathematics Subject Classification (2000): 62B10

[DOR: 20.1001.1.17358183.1388.3.2.17.0]